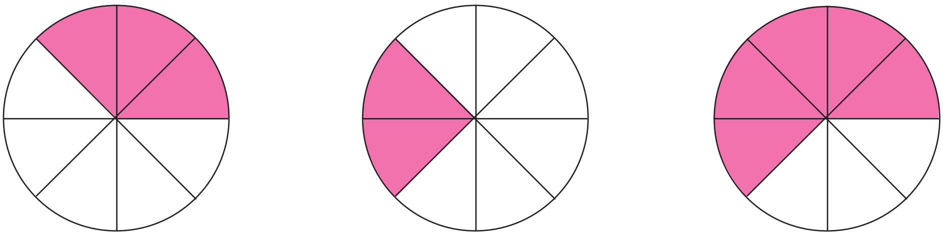
Α.2.4 Πρόσθεση – Αφαίρεση κλασμάτων

1 Πρόσθεση ομώνυμων κλασμάτων

Παρατηρούμε ότι:



$\frac{3}{8}$ του μεγέθους $+$ $\frac{2}{8}$ του μεγέθους $=$ $\frac{5}{8}$ του μεγέθους.

Φαίνεται, λοιπόν, λογικό να πούμε ότι: $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.

Γενικά:

Το άθροισμα δύο ομώνυμων κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή τον ίδιο.

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

Παραδείγματα

- $\frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10}$
- $\frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1$
- $\frac{7}{8} + \frac{5}{8} = \frac{12}{8} = \frac{12:4}{8:4} = \frac{3}{2}$
- $\frac{17}{12} + \frac{43}{12} = \frac{17+43}{12} = \frac{60}{12} = 5$

2 Πρόσθεση ετερώνυμων κλασμάτων

Για να προσθέσουμε ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και μετά τα προσθέτουμε σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα.

Παραδείγματα

- $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3\cdot2}{4\cdot2}=\frac{1}{8}+\frac{6}{8}=\frac{1+6}{8}=\frac{7}{8}$.
- $\frac{2}{3}+\frac{5}{2}=\frac{\overset{2}{2}}{3}+\frac{\overset{3}{5}}{2}=\frac{2\cdot2}{3\cdot2}+\frac{5\cdot3}{2\cdot3}=\frac{4}{6}+\frac{15}{6}=\frac{4+15}{6}=\frac{19}{6}$.

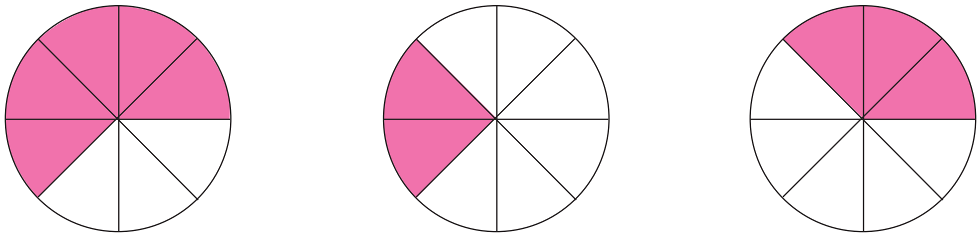
Για την πρόσθεση κλασμάτων ισχύουν οι ιδιότητες:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	
Πράξη / Ιδιότητα	Πρόσθεση
Αντιμεταθετική	$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\alpha}{\beta}$
Προσεταιριστική	$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right)+\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\kappa}{\lambda}\right)$

Ισχύει επίσης: $0+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}+0=\frac{\alpha}{\beta}$.

3 Αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων

Παρατηρούμε ότι:



$\frac{5}{8}$ του μεγέθους $-$ $\frac{2}{8}$ του μεγέθους $=$ $\frac{3}{8}$ του μεγέθους.

Φαίνεται, λοιπόν, λογικό να πούμε ότι: $\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$.

Γενικά:

Η διαφορά $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}$ δύο ομώνυμων κλασμάτων είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή τη διαφορά των αριθμητών και παρονομαστή γ, δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

Παραδείγματα

- $\frac{18}{5} - \frac{2}{5} = \frac{18-2}{5} = \frac{16}{5}$.
- $\frac{48}{5} - \frac{3}{5} = \frac{48-3}{5} = \frac{45}{5} = 9$.

4 Αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων

Για να αφαιρέσουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα και μετά κάνουμε την αφαίρεση σύμφωνα με τον προηγούμενο κανόνα.

Παραδείγματα

- $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8} - \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5-2}{8} = \frac{3}{8}$.
- $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \overset{5}{\frac{3}{4}} - \overset{4}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{15-8}{20} = \frac{7}{20}$.

5 Μεικτοί αριθμοί

Μερικές φορές στο άθροισμα ενός φυσικού με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας παραλείπουμε το + και γράφουμε για παράδειγμα:

$2 + \frac{1}{8} = 2\frac{1}{8}$, $10 + \frac{6}{7} = 10\frac{6}{7}$.

Ένα τέτοιο σύμβολο, όπως τα $2\frac{1}{8}$ και $10\frac{6}{7}$ (ένας φυσικός αριθμός που ακολουθείται από ένα κλάσμα μικρότερο του 1), λέγεται **μεικτός αριθμός**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 4$ β) $4 - \frac{2}{5}$ γ) $1 + \frac{5}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$

ΛΥΣΗ

α) ΕΚΠ(3, 2) = 6.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 4 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{1} = \overset{2}{\frac{2}{3}} + \overset{3}{\frac{1}{2}} + \overset{6}{\frac{4}{1}} =$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{24}{6} = \frac{4 + 3 + 24}{6} = \frac{31}{6}.$$

β) $4 - \frac{2}{5} = \frac{4}{1} - \frac{2}{5} = \frac{\overset{5}{4}}{1} - \frac{\overset{1}{2}}{5} = \frac{20}{5} - \frac{2}{5} = \frac{20 - 2}{5} = \frac{18}{5}.$

γ) ΕΚΠ(2, 4, 5) = 20.

$$1 + \frac{5}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{\overset{20}{1}}{1} + \frac{\overset{10}{5}}{2} - \frac{\overset{5}{3}}{4} + \frac{\overset{4}{2}}{5} =$$

$$= \frac{20}{20} + \frac{50}{20} - \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{20 + 50 - 15 + 8}{20} = \frac{63}{20}.$$

Πώς μετατρέπουμε ένα μεικτό αριθμό σε κλάσμα.

7 Να μετατρέψετε το μεικτό αριθμό $5\frac{7}{8}$ σε κλάσμα.

ΛΥΣΗ

$$5\frac{7}{8} = 5 + \frac{7}{8} = \frac{5}{1} + \frac{7}{8} = \frac{\overset{8}{5}}{1} + \frac{\overset{1}{7}}{8} = \frac{40}{8} + \frac{7}{8} = \frac{40 + 7}{8} = \frac{47}{8}.$$

Πώς μετατρέπουμε ένα κλάσμα σε μεικτό αριθμό.

8 Να κάνετε μεικτό αριθμό καθένα από τα κλάσματα: α) $\frac{62}{5}$, β) $\frac{197}{5}$.

ΛΥΣΗ

α) Βήμα 1ο:

$$\begin{array}{r|l} 62 & 5 \\ \cline{2-2} 12 & 12 \\ 2 & \end{array}$$

Βήμα 2ο: $62 = 12 \cdot 5 + 2$.

Βήμα 3ο: $\frac{62}{5} = \frac{12 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{12 \cdot 5}{5} + \frac{2}{5} = 12 + \frac{2}{5} = 12\frac{2}{5}.$

β) Βήμα 1ο:

$$\begin{array}{r|l} 197 & 6 \\ \cline{2-2} 17 & 32 \\ 5 & \end{array}$$

Βήμα 2ο: $197 = 32 \cdot 6 + 5$.

Βήμα 3ο: $\frac{197}{6} = \frac{32 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{32 \cdot 6}{6} + \frac{5}{6} = 32 + \frac{5}{6} = 32\frac{5}{6}.$

Πώς κάνουμε πράξεις με μεικτούς αριθμούς.

9 Να γίνουν οι πράξεις:

α) $8 + 2\frac{1}{7}$, β) $16 - 10\frac{1}{2}$, γ) $10\frac{1}{8} - 6\frac{2}{5}$.

ΛΥΣΗ

α) $8 + 2\frac{1}{7} = 8 + 2 + \frac{1}{7} = 10 + \frac{1}{7} = \overset{7}{\frac{10}{1}} + \overset{1}{\frac{1}{7}} = \frac{70}{7} + \frac{1}{7} = \frac{71}{7}$.

β) $16 - 10\frac{1}{2} = 16 - \left(10 + \frac{1}{2}\right) = 16 - \left(\overset{2}{\frac{10}{1}} + \overset{1}{\frac{1}{2}}\right) = 16 - \left(\frac{20}{2} + \frac{1}{2}\right) =$

$= 16 - \frac{21}{2} = \overset{2}{\frac{16}{1}} - \overset{1}{\frac{21}{2}} = \frac{32}{2} - \frac{21}{2} = \frac{32 - 21}{2} = \frac{11}{2}$.

γ) $10\frac{1}{8} - 6\frac{2}{5} = \left(10 + \frac{1}{8}\right) - \left(6 + \frac{2}{5}\right) = \left(\overset{40}{\frac{10}{1}} + \overset{5}{\frac{1}{8}}\right) - \left(\overset{40}{\frac{6}{1}} + \overset{8}{\frac{2}{5}}\right) =$

$= \left(\frac{400}{40} + \frac{5}{40}\right) - \left(\frac{240}{40} + \frac{16}{40}\right) = \frac{405}{40} - \frac{256}{40} = \frac{149}{40}$.

---

10 Ένας αγρότης πούλησε τα $\frac{2}{7}$ της παραγωγής του. Ποιο μέρος της παραγωγής του έμεινε απούλητο;

ΛΥΣΗ

Όλη η παραγωγή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι τα $\frac{7}{7}$ της παραγωγής. Απούλητα έμειναν τα $1 - \frac{2}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ της παραγωγής.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

11. Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε κλάσματα, πρέπει οπωσδήποτε αυτά να είναι ομώνυμα. Πρόσθεση ή αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων δεν μπορεί να γίνει απευθείας, αλλά μόνο αν αυτά μετατραπούν πρώτα σε ομώνυμα.

12. Για να προσθέσουμε ένα κλάσμα με ένα φυσικό αριθμό, γράφουμε πρώτα το φυσικό αριθμό ως κλάσμα με παρονομαστή το 1. Για παράδειγμα:

$2 + \frac{3}{10} = \frac{2}{1} + \frac{3}{10} = \frac{2 \cdot 10}{1 \cdot 10} + \frac{3}{10} = \frac{20}{10} + \frac{3}{10} = \frac{20+3}{10} = \frac{23}{10}$.

13. Για να μετατρέψουμε ένα μεικτό αριθμό σε κλάσμα, μπορούμε να θυμόμαστε ότι: $\alpha + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \gamma + \beta}{\gamma}$.

Για παράδειγμα: $5\frac{2}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 2}{9} = \frac{47}{9}$.

14. Ένα κλάσμα του οποίου ο **αριθμητής** είναι άθροισμα (ή διαφορά) μπορεί να γραφεί (να «σπάσει», όπως λέμε) σαν άθροισμα (ή διαφορά) κλασμάτων.

$\frac{\alpha+\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha-\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha+\beta-\kappa+\delta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\kappa}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma}$.

■ **ΠΡΟΣΟΧΗ:** Δεν μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο αν ο παρονομαστής είναι άθροισμα ή διαφορά, π.χ. $\frac{6}{3+2} \neq \frac{6}{3} + \frac{6}{2}$, και γενικά:

$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} \neq \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma}$, αν α είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

Επίσης, αν οι α, β, γ, δ είναι θετικοί, τότε: $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} \neq \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

15. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\frac{3}{11} + \frac{2}{11}$ β) $\frac{7}{3} + \frac{2}{3}$ γ) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ δ) $\frac{17}{7} + \frac{2}{7}$

ε) $\frac{33}{141} + \frac{53}{141}$ στ) $\frac{42}{181} + \frac{59}{181}$ ζ) $\frac{59}{157} + \frac{32}{157}$ η) $\frac{65}{201} + \frac{73}{201}$

16. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$ β) $\frac{3}{5} + \frac{5}{8}$ γ) $\frac{6}{7} + \frac{3}{14}$ δ) $\frac{9}{8} + \frac{3}{4}$

ε) $\frac{2}{5} + \frac{7}{15}$ στ) $\frac{7}{4} + \frac{17}{16}$ ζ) $\frac{2}{9} + \frac{7}{27}$

17. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\frac{2}{15} + \frac{9}{10}$ β) $\frac{11}{20} + \frac{23}{8}$ γ) $\frac{9}{64} + \frac{3}{16}$ δ) $\frac{67}{90} + \frac{19}{120}$ ε) $\frac{101}{120} + \frac{11}{150}$

18. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\frac{3}{2} + 2$ β) $\frac{5}{11} + \frac{5}{22}$ γ) $\frac{5}{12} + \frac{4}{15} + \frac{3}{20}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19. Να γράψετε σαν μεικτούς αριθμούς τα αθροίσματα:

α) $5 + \frac{1}{4}$ β) $75 + \frac{2}{7}$ γ) $\frac{4}{13} + 12$

20. Να γράψετε ως κλάσμα καθέναν από τους παρακάτω μεικτούς αριθμούς:

α) $3\frac{2}{5}$ β) $4\frac{1}{3}$ γ) $7\frac{2}{5}$ δ) $8\frac{1}{10}$ ε) $9\frac{1}{7}$ στ) $0\frac{2}{7}$

21. Να γράψετε ως μεικτό αριθμό καθένα από τα κλάσματα:

α) $\frac{73}{8}$ β) $\frac{73}{9}$ γ) $\frac{83}{6}$ δ) $\frac{151}{12}$ ε) $\frac{135}{13}$ στ) $\frac{2}{7}$

22. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{6}{7}\right) + \frac{1}{7}.$

23. Ένας γεωργός έσπειρε $13\frac{1}{2}$ στρέμματα καπνό, $48\frac{1}{4}$ στρέμματα καλαμπόκι και $87\frac{3}{8}$ στρέμματα βαμβάκι. Πόσα στρέμματα καλλιεργεί ο γεωργός συνολικά;

24. Ένα μηχάνημα εκσκαφής τελειώνει ένα έργο σε 4 ημέρες, ενώ ένα άλλο σε 6 ημέρες. Τι μέρος του έργου θα τελειώσουν σε μία ημέρα αν εργαστούν και τα δύο μηχανήματα;

25. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

α) $\frac{9}{4} - \frac{3}{4}$ β) $\frac{8}{21} - \frac{8}{21}$ γ) $\frac{14}{23} - \frac{7}{23}$ δ) $\frac{17}{11} - \frac{5}{11}$

ε) $\frac{21}{30} - \frac{5}{30}$ στ) $\frac{9}{15} - \frac{6}{15}$ ζ) $\frac{19}{12} - \frac{11}{12}$ η) $\frac{32}{7} - \frac{11}{7}$

26. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

α) $\frac{147}{211} - \frac{29}{211}$ β) $\frac{214}{501} - \frac{175}{501}$ γ) $\frac{579}{1.000} - \frac{463}{1.000}$

δ) $\frac{5}{7} - \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)$ ε) $\frac{5}{3} - \left(\frac{10}{6} - 1\right)$

27. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

α) $\frac{7}{8} - \frac{9}{16}$ β) $\frac{5}{7} - \frac{2}{5}$ γ) $\frac{9}{10} - \frac{3}{4}$ δ) $\frac{5}{12} - \frac{3}{10}$ ε) $\frac{5}{11} - \frac{3}{7}$ στ) $\frac{27}{20} - \frac{7}{10}$

28. Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: α) $7 - \frac{4}{3} = 5\frac{2}{3}$, β) $13 - \frac{5}{7} = 12\frac{2}{7}$.

29. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{7}\right).$

30. Αν είναι $x = \frac{1}{6} + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right)$ και $y = \frac{2}{3} + \left(7 - \frac{1}{6}\right)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = x + y$.

31. Να βρείτε σε ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε τον αριθμό $\frac{7}{4}$ για να βρούμε άθροισμα $\frac{9}{2}$.

32. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι $\frac{23}{5}$. Ο ένας προσθετέος είναι ο $\frac{29}{15}$. Να βρείτε ποιος αριθμός είναι ο άλλος προσθετέος.

33. Το άθροισμα τριών αριθμών είναι 3. Οι δύο από αυτούς είναι οι $\frac{5}{4}$ και $\frac{2}{3}$. Να βρεθεί ο τρίτος.

34. Από ποιον αριθμό πρέπει να αφαιρεθεί ο $\frac{5}{12}$ για να προκύψει διαφορά $\frac{11}{6}$;

35. Ποιο κλάσμα πρέπει:

α) Να προσθέσουμε στο $\frac{1}{2}$ για να βρούμε αποτέλεσμα $\frac{7}{8}$;

β) Να αφαιρέσουμε από το $\frac{1}{2}$ για να βρούμε αποτέλεσμα $\frac{1}{3}$;

36. Με δύο δικά σας παραδείγματα, να διαπιστώσετε ότι, αν $\frac{α}{β} < \frac{γ}{δ}$, τότε: $\frac{α}{β} < \frac{α+γ}{β+δ} < \frac{γ}{δ} < \frac{α}{β} + \frac{γ}{δ}$.

37. Ο Πέτρος διαβάζει το $\frac{1}{6}$ ενός βιβλίου την πρώτη ημέρα και το $\frac{1}{3}$ του ίδιου βιβλίου τη δεύτερη ημέρα. Να βρείτε ποιο μέρος του βιβλίου του μένει ακόμη να διαβάσει.

38. α) Να υπολογίσετε τις διαφορές: $1 - \frac{10}{11}$, $1 - \frac{11}{12}$, $1 - \frac{12}{13}$, $1 - \frac{13}{14}$.

β) Να διατάξετε τους αριθμούς $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{14}$ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

γ) Να διατάξετε τους αριθμούς $\frac{10}{11}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{13}{14}$ από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

39. Μία βρύση μπορεί να γεμίσει μια δεξαμενή σε 4 ώρες, ενώ μία άλλη μπορεί να αδειάσει τη δεξαμενή (όταν είναι γεμάτη) σε 5 ώρες. Αν ανοιχτούν συγχρόνως και οι δύο βρύσες, να βρείτε τι μέρος της δεξαμενής θα γεμίσει σε 1 ώρα.

40. Να εξηγήσετε γιατί ισχύει $1 - \frac{α}{α+1} = \frac{1}{α+1}$.

41. Να εξηγήσετε γιατί ισχύει:

α) $\frac{α}{β} + \frac{γ}{δ} = \frac{α \cdot δ + β \cdot γ}{β \cdot δ}$ β) $\frac{α}{β} - \frac{γ}{δ} = \frac{α \cdot δ - β \cdot γ}{β \cdot δ}$ γ) $α + \frac{β}{γ} = \frac{α \cdot γ + β}{γ}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

42. Να εξηγήσετε γιατί ισχύει:

α) $\frac{4\cdot\alpha + 5\cdot\beta}{20} = \frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{4}$ β) $\frac{10\cdot\alpha + 15\cdot\beta + 6\cdot\gamma}{30} = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{5}$

43. Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: α) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$ β) $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} + 1$

44. α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει:

i) $\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ii) $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ iii) $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

iv) $\frac{1}{4\cdot 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ και γενικά v) $\frac{1}{\alpha\cdot(\alpha + 1)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha + 1}$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

45. Να σημειώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

	Σ	Λ		Σ	Λ
α) $\frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$.	☐	☐	β) $\frac{1}{7} + \frac{8}{7} = \frac{9}{14}$.	☐	☐
γ) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$.	☐	☐	δ) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.	☐	☐
ε) $\frac{13}{18} - \frac{5}{18} = 1$.	☐	☐			

46. Το αποτέλεσμα της διαφοράς $4 - 3\frac{1}{5}$ είναι: Α. $1\frac{1}{5}$ Β. $\frac{2}{5}$ Γ. 1 Δ. $\frac{4}{5}$

47. Το αποτέλεσμα του αθροίσματος $\frac{15}{20} + \frac{3}{10} + 1$ είναι: Α. $\frac{19}{30}$ Β. $2\frac{1}{20}$ Γ. $\frac{19}{20}$ Δ. $\frac{31}{18}$

48. Ο αριθμός που πρέπει να αφαιρέσουμε από το 2 για να βρούμε το άθροισμα $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ είναι: Α. $\frac{1}{16}$ Β. $\frac{1}{2}$ Γ. $\frac{1}{8}$ Δ. 1

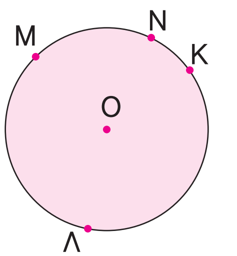
49. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε άθροισμα ή διαφορά το σωστό αποτέλεσμα:

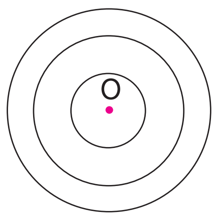
Α.	$\frac{7}{10} + \frac{3}{10}$ ●	●	$\frac{1}{6}$
Β.	$\frac{16}{9} + \frac{2}{9}$ ●	●	1
Γ.	$\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ ●	●	$\frac{5}{6}$
Δ.	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$ ●	●	2

Β.1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου

1 Κύκλος - Κέντρο - Ακτίνα

- **Κύκλος** λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν από ένα σημείο Ο την ίδια απόσταση. Το σημείο Ο λέγεται **κέντρο** αυτού του κύκλου.
- Η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου ενός κύκλου από το κέντρο του λέγεται **ακτίνα** αυτού του κύκλου.
- Δύο κύκλοι με ίσες ακτίνες είναι ίσοι.
- Δύο ή περισσότεροι κύκλοι με το ίδιο κέντρο λέγονται **ομόκεντροι**.
- Ο κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ συμβολίζεται και (Ο, ρ).



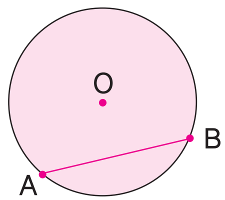


Ομόκεντροι κύκλοι

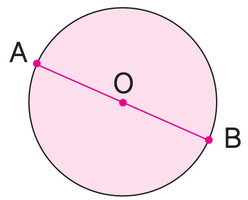
2 Χορδή - Διάμετρος κύκλου

- Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα δύο σημεία ενός κύκλου λέγεται **χορδή** αυτού του κύκλου.
- Ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα δύο σημεία ενός κύκλου και διέρχεται από το κέντρο του λέγεται **διάμετρος** αυτού του κύκλου.

  Με άλλα λόγια, διάμετρος ενός κύκλου λέγεται μια χορδή του που διέρχεται από το κέντρο του.



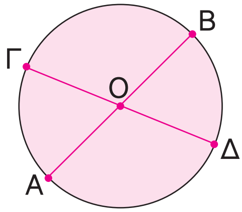
ΑΒ: χορδή



ΑΒ: διάμετρος

ΘΕΩΡΙΑ

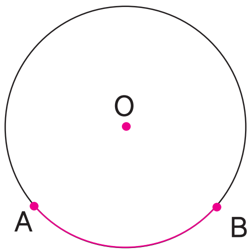
- Σε έναν κύκλο, μια διάμετρος:
  - έχει διπλάσιο μήκος από μία ακτίνα,
  - είναι μεγαλύτερη από κάθε χορδή που δεν είναι διάμετρος.
- Δύο σημεία ενός κύκλου λέγονται **αντιδιαμετρικά** αν είναι άκρα μιας διαμέτρου του, δηλαδή αν το ευθύγραμμο τμήμα (η χορδή) με άκρα τα σημεία αυτά διέρχεται από το κέντρο του.



Α, Β: αντιδιαμετρικά
Γ, Δ: αντιδιαμετρικά

3 Τόξο - Ημικύκλιο

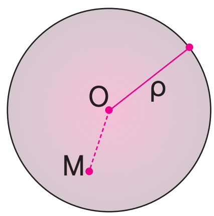
- Δύο σημεία Α και Β ενός κύκλου τον χωρίζουν σε δύο μέρη, που το καθένα από αυτά, μαζί με τα σημεία Α και Β, λέγεται **τόξο**.
  Καθένα από αυτά τα τόξα συμβολίζεται με $\overset{\frown}{AB}$ (ή $\overset{\frown}{BA}$).
  Τα σημεία Α, Β λέγονται άκρα καθενός από τα τόξα αυτά.
- Αν επιπλέον τα Α και Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία, τότε καθένα από τα τόξα που έχουν άκρα τα Α, Β λέγεται **ημικύκλιο** με άκρα τα Α, Β.



τόξο ΑΒ ή $\overset{\frown}{AB}$

4 Κυκλικός δίσκος

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ). Το σύνολο των σημείων του επιπέδου, τα οποία έχουν από το Ο απόσταση μικρότερη ή ίση του ρ, λέγεται **κυκλικός δίσκος** με κέντρο Ο και ακτίνα ρ ή κυκλικός δίσκος (Ο, ρ).
Έτσι, αν Μ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του κυκλικού δίσκου (Ο, ρ), θα ισχύει $MO \leq \rho$.

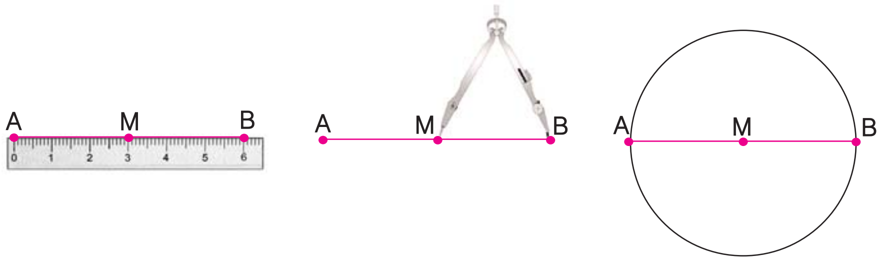


ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5 **Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 6 cm. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε έναν κύκλο, που να έχει ως διάμετρο το ΑΒ.**

ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε πρώτα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 6 cm. Για να σχεδιάσουμε έναν κύκλο, πρέπει να ξέρουμε το κέντρο του και την ακτίνα του. Το κέντρο του ζητούμενου κύκλου θα είναι το μέσο Μ του ΑΒ. Η ακτίνα του ζητούμενου κύκλου θα είναι ίση με το μισό των 6 cm, δηλαδή θα είναι 3 cm. Βρίσκουμε λοιπόν το μέσο Μ του ΑΒ (με το υποδεκάμετρο) και στη συνέχεια με ένα διαβήτη σχεδιάζουμε τον κύκλο που έχει κέντρο το Μ και ακτίνα το τμήμα ΜΒ.



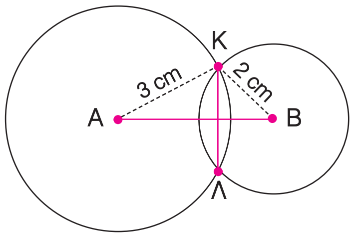
6 **Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 4 cm. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου τα οποία απέχουν:**
α) 3 cm από το Α β) 2 cm από το Β
γ) 3 cm από το Α και 2 cm από το Β

ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία αυτά αποτελούν κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα 3 cm.

β) Τα σημεία αυτά αποτελούν κύκλο με κέντρο Β και ακτίνα 2 cm.

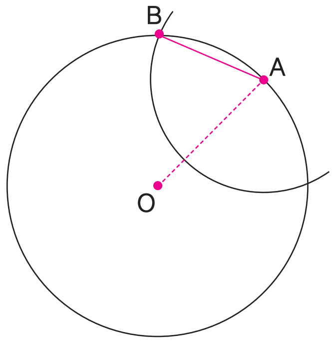
γ) Τα σημεία αυτά είναι τα κοινά σημεία Κ και Λ των δύο παραπάνω κύκλων.



7 **Να σχεδιάσετε έναν κύκλο με κέντρο ένα σημείο Ο και ακτίνα 4 cm και να πάρετε ένα σημείο του Α. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε μια χορδή ΑΒ με μήκος 3 cm.**

ΛΥΣΗ

- Χρησιμοποιώντας το διαβήτη και το υποδεκάμετρο, σχεδιάζουμε έναν κύκλο με κέντρο ένα οποιοδήποτε σημείο, που το ονομάζουμε Ο, και ακτίνα ρ = 4 cm.
- Σημειώνουμε ένα σημείο του κύκλου αυτού και το ονομάζουμε Α.
- Ψάχνουμε τώρα για ένα σημείο Β του



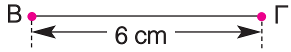
παραπάνω κύκλου, το οποίο να απέχει 3 cm από το Α (δηλαδή ΑΒ = 3 cm).
Τα σημεία που απέχουν 3 cm από το Α αποτελούν κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα 3 cm. Σχεδιάζουμε τον κύκλο που έχει κέντρο το Α και ακτίνα 3 cm. Ονομάζουμε Β το ένα από τα δύο κοινά σημεία των παραπάνω κύκλων. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μια χορδή του αρχικού κύκλου με μήκος 3 cm.

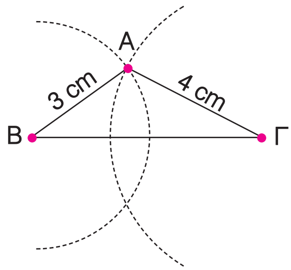
Πώς κατασκευάζουμε (σχεδιάζουμε) τρίγωνο αν γνωρίζουμε τα μήκη των τριών πλευρών του.

8 **Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έτσι, ώστε ΑΒ = 3 cm, ΒΓ = 6 cm και ΑΓ = 4 cm.**

ΛΥΣΗ

- Σχεδιάζουμε πρώτα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ μήκους 6 cm.
- Φέρνουμε (σχεδιάζουμε) κύκλο με κέντρο Β και ακτίνα 3 cm και δεύτερο κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα 4 cm.
- Ονομάζουμε Α το ένα από τα δύο κοινά σημεία των παραπάνω κύκλων.
- Σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Το τρίγωνο ΑΒΓ, που σχεδιάστηκε στο χαρτί μας, έχει ΒΓ = 6 cm, ΑΒ = 3 cm (ακτίνα του πρώτου κύκλου) και ΑΓ = 4 cm (ακτίνα του δεύτερου κύκλου).

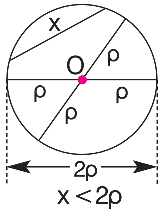




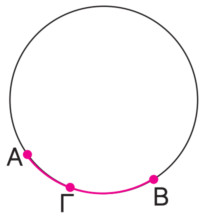
ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

9. Κύκλος (Ο, ρ) είναι μόνο τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ΜΟ = ρ, ενώ κυκλικός δίσκος (Ο, ρ) είναι τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία ΜΟ ≤ ρ. Ο κύκλος (Ο, ρ) περιέχεται στον κυκλικό δίσκο (Ο, ρ). Το κέντρο Ο δεν ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ), αλλά ανήκει στον κυκλικό δίσκο (Ο, ρ).

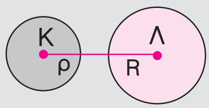
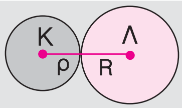
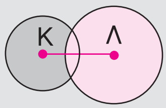
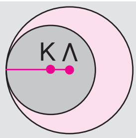
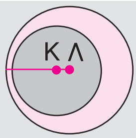
10. Κάθε διάμετρος ενός κύκλου είναι:
- μεγαλύτερη από κάθε χορδή του κύκλου που δεν είναι διάμετρος,
- διπλάσια από κάθε ακτίνα,
- ίση με κάθε άλλη διάμετρο.



11. Αν Α και Β είναι δύο σημεία ενός κύκλου, τότε, όπως είδαμε, υπάρχουν δύο τόξα αυτού του κύκλου με άκρα Α, Β, και με $\overset{\frown}{ΑΒ}$ συμβολίζουμε και τα δύο αυτά τόξα. Μερικές φορές, για να αναφερθούμε σε ένα από αυτά τα τόξα (για να δηλώσουμε ποιο από τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ εννοούμε), σημειώνουμε στο σχήμα ένα σημείο του τόξου, του δίνουμε ένα όνομα, π.χ. Γ, και λέμε «τόξο $\overset{\frown}{ΑΓΒ}$», εννοώντας «το τόξο $\overset{\frown}{ΑΒ}$ το οποίο περιέχει το σημείο Γ».



12. Οι σχετικές θέσεις που μπορεί να έχουν δύο διαφορετικοί κύκλοι είναι:

Λεκτική περιγραφή	Σχήμα	Σχέση του δ = ΚΛ με τις ακτίνες R, ρ	Πλήθος κοινών σημείων
Ο ένας να είναι εξωτερικός του άλλου		$δ > ρ + R$	0 (δεν έχουν κοινό σημείο)
Να εφάπτονται εξωτερικά		$δ = ρ + R$	1
Να τέμνονται		$R - ρ < δ < ρ + R$ (όπου $R \geq ρ$)	2
Να εφάπτονται εσωτερικά		$δ = R - ρ$ (όπου $R > ρ$)	1
Ο ένας να βρίσκεται εντός του άλλου		$δ < R - ρ$ (όπου $R > ρ$)	0

Έτσι μπορούμε να βρούμε τη σχετική θέση δύο κύκλων, καθώς και το πλήθος των κοινών σημείων τους χωρίς να τους σχεδιάσουμε, αρκεί να συγκρίνουμε την απόσταση των κέντρων τους (το δ παραπάνω) με το άθροισμα και τη διαφορά των ακτίνων τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

13. Με κέντρο ένα σημείο Κ, να σχεδιάσετε κύκλους με ακτίνες 3,2 cm, 4 cm και 25 mm.

14. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο με διάμετρο ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το οποίο να έχει μήκος 4,2 cm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο με κέντρο ένα σημείο Ο και ακτίνα 4 cm. Μετά να πάρετε σημείο Α του κύκλου και με διάμετρο ΟΑ να γράψετε κύκλο. Διέρχεται ο δεύτερος κύκλος από το κέντρο του πρώτου;

16. Να σχεδιάσετε ομόκεντρους κύκλους με διαμέτρους 6 cm, 70 mm και 5,8 cm.

17. Να γράψετε έναν κύκλο με κέντρο ένα σημείο Κ και ακτίνα $\rho = 6$ cm. Να πάρετε ένα σημείο Α του κύκλου και τα σημεία Β, Γ στην ακτίνα ΟΑ, ώστε ΟΒ = 2 cm και ΒΓ = 3 cm. Να φέρετε κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 στην ΟΑ στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν η ε_1 τέμνει τον κύκλο στα Δ, Ε και η ε_2 στα Ζ, Η, να συγκρίνετε τις χορδές ΔΖ και ΕΗ.

18. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών $\alpha = 5$ cm, $\beta = 3$ cm και $\gamma = 4$ cm. Στη συνέχεια να μετρήσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου.

19. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ μήκους 6 cm. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν: α) 4 cm από το Κ, β) 3 cm από το Λ. Πόσα σημεία του επιπέδου απέχουν 4 cm από το Κ και 3 cm από το Λ;

20. Να σχεδιάσετε δύο κύκλους με κέντρο Κ και ακτίνες 2 cm και 3 cm αντίστοιχα. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το Κ απόσταση μεγαλύτερη ή ίση από 2 cm και μικρότερη ή ίση από 3 cm.

21. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 35 mm. Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν:
α) από το Α λιγότερο από 3 cm και από το Β λιγότερο από 20 mm,
β) από το Α λιγότερο από 3 cm και από το Β περισσότερο από 20 mm.

22. Να σχεδιάσετε κύκλο (Ο, ρ) με ρ = 2,5 cm και να πάρετε ένα σημείο Α του κύκλου αυτού. Στη συνέχεια να χαράξετε δύο χορδές ΑΒ και ΑΓ του κύκλου με ΑΒ = 4 cm και ΑΓ = 5 cm.

23. Δίνεται κύκλος (Ο, 3 cm) και ένα σημείο του Μ. Να βρείτε, εφόσον υπάρχουν, τα σημεία του κύκλου που απέχουν από το Μ απόσταση ίση με:
α) 5 cm, β) 60 mm, γ) 75 mm.

24. Ένα πλοίο ακολουθεί ευθεία πορεία ΑΒ μήκους 12 ναυτικών μιλίων. Όταν βρίσκεται στη θέση Α, απέχει 9 ναυτικά μίλια από ένα φάρο Φ, ενώ, όταν βρίσκεται στη θέση Β, απέχει 5 ναυτικά μίλια από τον ίδιο φάρο. Να σχεδιάσετε το τρίγωνο ΑΒΦ παίρνοντας 1 cm για πραγματική απόσταση 1 ναυτικού μιλίου και να βρείτε πόσο κοντά στο φάρο πέρασε το πλοίο.

25. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
α) Η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου ενός κύκλου από το κέντρο του λέγεται ....
β) Κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο λέγονται ....
γ) Δύο κύκλοι με ίσες ακτίνες είναι ....
δ) Αν Α, Β είναι δύο σημεία ενός κύκλου (Ο, ρ), το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ λέγεται ....
ε) Μια χορδή ενός κύκλου που περνά από το κέντρο του λέγεται .... και είναι .... από την ακτίνα του κύκλου.
στ) Η διάμετρος ενός κύκλου χωρίζει τον κύκλο σε δύο ....