4.1 Πολυώνυμα

Η έννοια του πολυωνύμου

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. **Μονώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν}, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$ (σταθερές) και $x \in \mathbb{R}$ (μεταβλητή).
2. **Πολυώνυμο του x** ονομάζουμε κάθε παράσταση της μορφής:
$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
όπου $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$ (σταθερές) και $x \in \mathbb{R}$ (μεταβλητή).
Τα μονώνυμα $\alpha_\nu x^\nu$, $\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}$, ..., $\alpha_1 x$, α_0 λέγονται **όροι του πολυωνύμου** και οι αριθμοί α_ν, $\alpha_{\nu-1}$, ..., α_1, α_0 λέγονται **συντελεστές του πολυωνύμου**. Επιπλέον, ο όρος α_0 λέγεται **σταθερός όρος του πολυωνύμου**.
3. Κάθε πολυώνυμο της μορφής α_0, με $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγεται **σταθερό πολυώνυμο**. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**.
4. Θεωρούμε το πολυώνυμο $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Ο φυσικός αριθμός ν λέγεται **βαθμός του πολυωνύμου**. Κάθε σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.
5. Δύο πολυώνυμα θα λέμε ότι είναι **ίσα** αν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων είναι ίσοι, δηλαδή τα πολυώνυμα:
$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ και } \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$$
με $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$, $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\beta_\mu, \beta_{\mu-1}, \ldots, \beta_1, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\mu \geq \nu$, είναι ίσα αν ισχύει ότι:
$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_{\nu-1} = \beta_{\nu-1},\ \alpha_\nu = \beta_\nu \text{ και}$$
$$\beta_{\nu+1} = \beta_{\nu+2} = \ldots = \beta_{\mu-1} = \beta_\mu = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κάθε μονώνυμο είναι και πολυώνυμο.

Αριθμητική τιμή και ρίζα πολυωνύμου

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. **Αριθμητική τιμή** ενός πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$ ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει αν στο $P(x)$ θέσουμε όπου x το ρ, δηλαδή το $P(\rho)$.
2. Το ρ λέγεται **ρίζα του πολυωνύμου** $P(x)$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

Πράξεις με πολυώνυμα

- Η πρόσθεση (και η αφαίρεση) δύο πολυωνύμων δίνει ένα νέο πολυώνυμο, που προκύπτει κάνοντας τις προσθαφαιρέσεις στα ομοβάθμια μονώνυμα.
- Ο πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων δίνει ένα νέο πολυώνυμο, που προκύπτει με τη βοήθεια της διπλής επιμεριστικής ιδιότητας.
- Η διαίρεση δύο πολυωνύμων γενικά **δεν είναι** πολυώνυμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ο βαθμός του πολυωνύμου που προκύπτει από το άθροισμα (ή τη διαφορά) δύο πολυωνύμων είναι μικρότερος ή ίσος με το μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων, δηλαδή:
$$\text{βαθμός}[P(x) \pm Q(x)] \leq \text{μέγιστο}\{\text{βαθμό}[P(x)], \text{βαθμό}[Q(x)]\}$$
2. Ο βαθμός του πολυωνύμου που προκύπτει από το γινόμενο δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών, δηλαδή:
$$\text{βαθμός}\{P(x)Q(x)\} = \text{βαθμός}[P(x)] + \text{βαθμός}[Q(x)]$$
3. Ο βαθμός του πολυωνύμου που προκύπτει ως δύναμη είναι ίσος με το γινόμενο του εκθέτη επί τον βαθμό του πολυωνύμου, δηλαδή:
$$\text{βαθμός}[P(x)]^{\nu} = \nu\,\text{βαθμός}[P(x)], \text{ με } \nu \in \mathbb{N}$$

Μέθοδοι και εφαρμογές

1η ΜΕΘΟΔΟΣ: Μονώνυμα – Πολυώνυμα – Ίσα πολυώνυμα – Πράξεις πολυωνύμων

Υπόδειξη:

- *Μονώνυμο:* μορφή αx^ν, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$ (σταθερές) και $x \in \mathbb{R}$ (μεταβλητή).
- *Πολυώνυμο:* μορφή $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$ (σταθερές) και $x \in \mathbb{R}$ (μεταβλητή).
- *Ίσα πολυώνυμα:* ίδιος βαθμός, ίσοι ομοβάθμιοι όροι.

1. Να εξετάσετε ποιες από τις ακόλουθες παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες πολυώνυμα:

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

$$P(x)=\frac{5}{3}x^4,\qquad Q(x)=-2\sqrt[4]{x^7},\qquad A(x)=4x^{-7},$$

$$B(x)=\frac{\sqrt{5}x^8}{9x^3},\qquad \Gamma(x)=-\sqrt{8}x^{\frac{2}{3}},\qquad \Delta(x)=11x^5-3x^2,$$

$$E(x)=3x^4-\frac{5}{x^2},\qquad Z(x)=\frac{2}{7}x^4-\frac{1}{\sqrt{3}}x^2,\qquad H(x)=2x^4+5x^{\frac{1}{5}}.$$

Λύση

	P(x)	Q(x)	A(x)	B(x)	Γ(x)	Δ(x)	E(x)	Z(x)	H(x)
Μονώνυμο	✓			✓					
Πολυώνυμο	✓			✓		✓		✓	

2. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσα τα πολυώνυμα $P(x) = (2\kappa - 2\lambda)x^2 + (\kappa + \lambda)x + (2\mu - 2)$ και $Q(x) = (\mu + \lambda + 1)x^2 + \mu x + 2\lambda$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$P(x)=Q(x) \Leftrightarrow (2\kappa-2\lambda)x^2+(\kappa+\lambda)x+(2\mu-2)=(\mu+\lambda+1)x^2+\mu x+2\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa-2\lambda=\mu+\lambda+1 \\ \kappa+\lambda=\mu \\ 2\mu-2=2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa-3\lambda-\mu=1 \\ \kappa+\lambda-\mu=0 \\ 2\mu-2\lambda=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa-3\lambda-(\lambda+1)=1 \\ \kappa+\lambda-(\lambda+1)=0 \\ \mu=\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\kappa-4\lambda=2 \\ \kappa=1 \\ \mu=\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cdot 1-4\lambda=2 \\ \kappa=1 \\ \mu=\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\lambda=0 \\ \kappa=1 \\ \mu=\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \kappa=1 \\ \mu=1 \end{cases}.$$

3. Να βρείτε τα α, β, γ $\in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 - 2x + 1$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = \alpha x(x - 3) + (\beta + 2)x + \gamma - 1$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Πρέπει να ισχύει $4x^2 - 2x + 1 = \alpha x(x - 3) + (\beta + 2)x + \gamma - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 1 = \alpha x^2 + (\beta + 2 - 3\alpha)x + \gamma - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4 = \alpha$ και $-2 = \beta + 2 - 3\alpha$ και $\gamma - 1 = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha = 4$ και $\beta = 3\alpha - 4$ και $\gamma = 2 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (4, 8, 2)$.

4. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x + 7$ και $Q(x) = x^2 + 2$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:
α) $P(x) + Q(x)$, **β) $P(x) - 5Q(x)$,**
γ) $P(x)Q(x)$, **δ) $Q^2(x) - P(x)$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

α) $P(x) + Q(x) = (4x^3 + 5x^2 - 6x + 7) + (x^2 + 2) = 4x^3 + 6x^2 - 6x + 9$.
β) $P(x) - 5Q(x) = (4x^3 + 5x^2 - 6x + 7) - 5(x^2 + 2) = 4x^3 - 6x - 3$.
γ) $P(x)Q(x) = (4x^3 + 5x^2 - 6x + 7)(x^2 + 2) =$
$= 4x^5 + 8x^3 + 5x^4 + 10x^2 - 6x^3 - 12x + 7x^2 + 14 =$
$= 4x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 17x^2 - 12x + 14$.
δ) $Q^2(x) - P(x) = (x^2 + 2)^2 - (4x^3 + 5x^2 - 6x + 7) =$
$= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 =$
$= x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x - 3$.

2η ΜΕΘΟΔΟΣ: Βαθμός πολυωνύμου – Μηδενικό πολυώνυμο

Υπόδειξη: *Βαθμός πολυωνύμου* είναι ο εκθέτης του μεγιστοβάθμιου όρου.
Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου δίνονται με τη βοήθεια παραμέτρων, τότε:

- Εντοπίζουμε το x με τη μεγαλύτερη δύναμη (έστω ν) και, αν α(λ) είναι ο συντελεστής του x^ν, λύνουμε την $\alpha(\lambda) \neq 0$, οπότε το πολυώνυμο είναι ν βαθμού.
- Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στο αρχικό πολυώνυμο καθεμία από τις τιμές του λ που εξαιρέσαμε και σε κάθε περίπτωση έχουμε ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο του οποίου ο βαθμός βρίσκεται εύκολα.

Μηδενικό πολυώνυμο είναι το πολυώνυμο που έχει όλους τους συντελεστές του μηδέν και για το οποίο δεν ορίζεται βαθμός.

5. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^4 + (\lambda^2 + 2\lambda)x + \lambda + 2$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Για να είναι το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^4 + (\lambda^2 + 2\lambda)x + \lambda + 2$ το μηδενικό, αρκεί:

$$\begin{cases} \lambda^3-4\lambda=0 \\ \lambda^2+2\lambda=0 \\ \lambda+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)=0 \\ \lambda(\lambda+2)=0 \\ \lambda+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=0 \text{ ή } \lambda=2 \text{ ή } \lambda=-2 \\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-2 \\ \lambda=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda=-2.$$

Ένα πολυώνυμο είναι το μηδενικό όταν όλοι οι συντελεστές του είναι ταυτόχρονα ίσοι με μηδέν.

6. **Για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:**

$$\mathbf{P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^2 + (\lambda^2 + 1)x + 2}$$

Λύση

Η μεγαλύτερη δύναμη του x που εμφανίζεται είναι η τρίτη και ο συντελεστής του x^3 είναι ο $\lambda^3 - 4\lambda$. Συνεπώς:

- Για $\lambda^3 - 4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq \pm 2$ έχουμε ότι το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού.
- Για $\lambda = 0$ το πολυώνυμο γίνεται:
  $P(x) = (0^3 - 4 \cdot 0)x^3 + (0^2 - 5 \cdot 0 + 6)x^2 + (0^2 + 1)x + 2$,
  άρα $P(x) = 6x^2 + x + 2$, οπότε είναι 2ου βαθμού.
- Για $\lambda = 2$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 5x + 2$,
  οπότε είναι 1ου βαθμού.
- Για $\lambda = -2$ το πολυώνυμο γίνεται $P(x) = 20x^2 + 5x + 2$,
  οπότε είναι 2ου βαθμού.

Άρα το πολυώνυμο P(x) είναι $\begin{cases} \text{3ου βαθμού αν } \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq \pm 2 \\ \text{2ου βαθμού αν } \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = -2 \\ \text{1ου βαθμού αν } \lambda = 2 \end{cases}$.

3η ΜΕΘΟΔΟΣ: Αριθμητική τιμή – Ρίζα πολυωνύμου

Υπόδειξη:

- *Η αριθμητική τιμή του P(x) για x = ρ* είναι ίση με το P(ρ).
- Το ρ είναι *ρίζα του P(x)* αν και μόνο αν P(ρ) = 0.

7. **Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x) = (\lambda^2 + 4\lambda)x^3 - (1 + \lambda)x^2 + (3\lambda + 2)x + 3$ για $x = -2$ να είναι 5.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Το πολυώνυμο P(x) παίρνει την τιμή 5 για $x = -2$ όταν $P(-2) = 5$.
Τότε:

$(\lambda^2 + 4\lambda)(-2)^3 - (1 + \lambda)(-2)^2 + (3\lambda + 2)(-2) + 3 = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8\lambda^2 - 32\lambda - 4 - 4\lambda - 6\lambda - 4 + 3 - 5 = 0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 42\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 21\lambda + 5 = 0$, με $\Delta = 21^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 441 - 80 = 361$ και

$$\lambda = \frac{-21 \pm \sqrt{361}}{2 \cdot 4} = \frac{-21 \pm 19}{8}, \text{ άρα } \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-21+19}{8} = \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4} \\ \lambda_2 = \dfrac{-21-19}{8} = -\dfrac{40}{8} = -5 \end{cases}.$$

8. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί –3 και 2 είναι ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = -3x^2 + 5x + 2$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Το ρ είναι ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow P(\rho) = 0$.

- $P(-3) = -3(-3)^2 + 5(-3) + 2 = -3 \cdot 9 - 15 + 2 =$
  $= -27 - 15 + 2 = -40 \neq 0,$
  άρα το –3 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).
- $P(2) = -3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 2 = -3 \cdot 4 + 10 + 2 = 0$, άρα το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

9. Να βρείτε τις τιμές των κ, $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + (1 - \kappa)x^2 + (\kappa + \lambda)x + \kappa$ έχει ρίζα το $x = 1$ και αριθμητική τιμή –33 για $x = -2$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{cases} P(-2) = -33 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2)^3 + (1-\kappa)(-2)^2 + (\kappa+\lambda)(-2) + \kappa = -33 \\ 2 + (1-\kappa) + (\kappa+\lambda) + \kappa = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16 + 4 - 4\kappa - 2\kappa - 2\lambda + \kappa = -33 \\ 2 + 1 - \kappa + \kappa + \lambda + \kappa = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\kappa - 2\lambda = -21 \\ \lambda + \kappa = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa + 2\lambda = 21 \\ \lambda = -3 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa + 2(-3-\kappa) = 21 \\ \lambda = -3 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\kappa - 6 - 2\kappa = 21 \\ \lambda = -3 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\kappa = 27 \\ \lambda = -3 - \kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 9 \\ \lambda = -12 \end{cases}.$$

10. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα τον αριθμό 4, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(1 - 3x)$ έχει ρίζα τον αριθμό –1.

Λύση

Αφού το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα τον αριθμό 4, θα ισχύει $P(4) = 0$.
Επίσης, $Q(-1) = P(1 - 3(-1)) = P(1 + 3) = P(4) = 0$,
οπότε το –1 είναι ρίζα του Q(x).

11. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο:

$$P(x) = (2\lambda^2 - 3)x^3 + 4\lambda x^2 - (\lambda - 5)x + 2.005$$

δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

Λύση

$P(1) = (2\lambda^2 - 3) + 4\lambda - (\lambda - 5) + 2.005 =$
$= 2\lambda^2 - 3 + 4\lambda - \lambda + 5 + 2.005 = 2\lambda^2 + 3\lambda + 2.007,$
όπου $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2.007 = -16.047 < 0$, άρα $P(1) \neq 0$.
Συνεπώς το 1 δεν μπορεί να είναι ρίζα του P(x).

4η ΜΕΘΟΔΟΣ: Εύρεση πολυωνύμου

Υπόδειξη: Βρίσκουμε τον βαθμό που πολυωνύμου και το θέτουμε στη μορφή $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$, όπου ν είναι ο βαθμός του πολυωνύμου.

12. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει:

$$(3x - 1)P(x) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3$$

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Το πολυώνυμο P(x) πολλαπλασιάζεται με ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού και δίνει πολυώνυμο 3ου βαθμού, άρα το P(x) είναι 2ου βαθμού.

Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$. Τότε:

$(3x - 1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\alpha x^3 + (3\beta - \alpha)x^2 + (3\gamma - \beta)x - \gamma = 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 \\ 3\beta - \alpha = -13 \\ 3\gamma - \beta = 13 \\ -\gamma = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 3\beta = \alpha - 13 \\ 3\gamma = \beta + 13 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \\ 3\gamma = \beta + 13 \\ \gamma = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \\ \gamma = 3 \\ \gamma = 3 \end{cases}.$$

Συνεπώς $P(x) = x^2 - 4x + 3$.

Ερωτήσεις νέου τύπου

✔ Να σημειώσετε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Κάθε μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού. ☐
2. Το άθροισμα δύο πολυωνύμων 2ου βαθμού δίνει πολυώνυμο 2ου βαθμού. ☐
3. Το $P(x) = x^3 + 4x - 14x + 12$ έχει ρίζα το $x = 2$. ☐
4. Το πηλίκο πολυωνύμων μπορεί να είναι πολυώνυμο. ☐
5. Το πολυώνυμο $P(x) = \lambda x^3 + 5x^2 + 2\lambda - 3$ είναι 3ου βαθμού. ☐

✔ **Να αντιστοιχίσετε τα πολυώνυμα της 1ης στήλης με τις ρίζες τους της 2ης στήλης.**

	1η στήλη Πολυώνυμο P(x)	2η στήλη Ρίζες του P(x)	
		1, –1, 2	**Α**
1	$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda$	0, 1, 2	**Β**
2	$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda$	0, –1, 2	**Γ**
3	$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$	0, 1, –2	**Δ**
4	$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4$	0, –1, –2	**Ε**
5	$\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$	1, –1, –2	**ΣΤ**
		1, –2, 2	**Ζ**

Ασκήσεις προς λύση

✔ Α΄ Ομάδα

1. Να βρείτε ποιες από τις ακόλουθες παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες πολυώνυμα:

$P(x) = -2{,}4x^4$, $\quad Q(x) = -2\sqrt[4]{x^8}$, $\quad A(x) = 8x^{-3}$,

$B(x) = \dfrac{\sqrt{8}x^2}{2x^6}$, $\quad \Gamma(x) = -3x^{-\frac{5}{2}}$, $\quad \Delta(x) = 13x^4 + 5x^3 - 2$,

$E(x) = 6x^{-4} + 2x$, $\quad Z(x) = 5x + x^2 - 4x^5$, $\quad H(x) = 5x^3 - 3x^{\frac{12}{3}}$.

2. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$P(x) = (\kappa - \lambda)x^2 + (\lambda - \kappa - \mu)x + \kappa$ και $Q(x) = (\kappa + 2\mu)x^2 + 3\lambda x + 4 - \lambda$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x) = (\alpha + \beta)x^2 + (2\beta - \gamma)x$ και $Q(x) = 10x^2 - (-\gamma - 2\alpha)x + 6 - \beta + \gamma$

Να βρείτε για ποιες τιμές των α, $\beta \in \mathbb{R}$ είναι ίσα.

4. Να βρείτε τα α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2 + 3x + 2$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = \alpha x(x + 2) + \beta x + \gamma + 5$.

5. Να βρείτε τα α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο $P(x) = 5x^2 - 11x + 7$ να παίρνει τη μορφή $P(x) = \alpha x(x - 3) + \beta x + 6 - \beta + \gamma$.

6. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5$ και $Q(x) = 3x^2 - x + 1$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:
α) $P(x) + Q(x)$, **β)** $P(x) - Q(x)$,
γ) $P(x)Q(x)$, **δ)** $4Q(x) - 5P(x)$.

7. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 5x^3 + x^2 - 2$ και $Q(x) = x^2 + 3x - 4$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:
α) $3P(x) + 4Q(x)$, **β)** $2P(x) - Q(x)$,
γ) $Q^2(x)$, **δ)** $Q(P(x))$.

8. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο:
$$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda)x^2 + \lambda^2 - 9$$
είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

9. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο:
$$P(x) = (\lambda^4 - 16\lambda^2)x^4 - (\lambda^2 + 4\lambda)x^2 + \lambda^2 + 5\lambda + 4$$
είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (2\alpha - 2\beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta + 2\gamma)x + \gamma + \alpha - 1$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε το $P(x)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (5\alpha + 3\beta - 2\gamma)x^2 + (\alpha + 2\beta)x + 2\gamma - 3$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε το $P(x)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - 5)x^2 + (\beta + 2)x + 200\alpha - 500\beta - 2.005$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν μπορεί να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^3 - 16\lambda)x^4 + (\lambda^2 - 5\lambda + 4)x^2 + (\lambda + 1)x + 2\lambda$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ.

14. Για κάθε τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:
$$P(x) = (\lambda^5 + \lambda^3 - 2\lambda)x^4 + (\lambda^2 - 5\lambda - 6)x^2 + (\lambda^2 - 1)x + 2$$

15. Για κάθε τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου:
$$P(x) = (\lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 4)x^4 + (\lambda^2 + \lambda - 6)x^2 + (\lambda^2 - 4)x + \lambda - 2$$

16. Δίνεται το πολυώνυμο:
$$P(x) = (2\lambda^2 - 8)x^3 + (\lambda^2 + \lambda - 6)x^2 + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)x + \lambda^4 - 16,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
α) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
β) Να βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$. Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές του πολυωνύμου για:
α) $x = 1$, **β)** $x = -1$, **γ)** $x = 0$, **δ)** $x = 2$.

18. Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου:
$$P(x) = (\lambda^2 + 8)x^3 - (5 + \lambda)x^2 + (2\lambda - 5)x - 9\lambda$$
για $x = -1$ να είναι -36.

19. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί -3 και 2 είναι ρίζες του $P(x) = -3x^4 + 25x - 2$.

20. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$ είναι ρίζες του πολυωνύμου:
$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$

21. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο:
$$P(x) = (\kappa - \lambda)x^3 - 2\kappa x^2 - (\kappa + \lambda)x + 8 - 3\lambda$$
έχει ρίζα το $x = -1$ και αριθμητική τιμή -40 για $x = 3$.

22. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -3, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P(7 - 2x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 5.

23. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -5, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 - 1 + P(3x - 8)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

24. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο:
$$P(x) = (\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda)x^3 - 2\lambda x^2 + (3\lambda - \lambda^3)x + 2.005$$
δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

25. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + (\alpha + 3)x + 4$. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το $P(x)$ να παίρνει τη μορφή $(x + \kappa)^2(x - \lambda)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

26. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:
$$(2x + 5)P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 4x + 10$$

27. **α)** Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει:
$$(3x - 2)P(x) = 6x^3 - 22x^2 + 27x - 10$$
β) Να λύσετε την εξίσωση $6x^3 - 22x^2 + 27x - 10 = 0$.

28. Να βρείτε τα $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο:
$$P(x) = (\kappa + 1)x^4 - (7 - \kappa)x^3 - (3\kappa + 1)x^2 + 2\kappa x + \kappa^2 - 1$$
να έχει ρίζα το $x = -1$. Στη συνέχεια να βρείτε την αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = -3$.

29. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού, αν ισχύει:
$$P(x) + 2P(-x) = 3(x^2 + 2)$$

30. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς -4 και 2, αν η τιμή του για $x=1$ είναι -2.

31. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς 1, 2 και 3, αν η τιμή του για $x=0$ είναι -6.

32. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2+x+4$. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό κ, αν ισχύει $P(\kappa+1)=4$.

✔ Β΄ Ομάδα

33. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(x^5-3x^3+2x^2-1)^3-6x+7$.
α) Να βρείτε τον σταθερό όρο του $P(x)$.
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$.

34. Σε ένα πολυώνυμο $P(x)$ ο σταθερός όρος είναι 5 και το άθροισμα των συντελεστών του ισούται με 4. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $Q(x)=P(P(P(x)-4)-5)-5x$.

35. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^8+\beta x^6+\gamma x^4+\delta x^2+7x$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν $P(2)=5$, να βρείτε το $P(-2)$.

36. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^9+\beta x^7+\gamma x^5+\delta x^3-11$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Αν $P(-4)=9$, να βρείτε το $P(4)$.

37. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{\alpha}{x-1}+\dfrac{\beta}{x+1}$ για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$.

38. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}=\dfrac{\alpha}{3-x}-\dfrac{\beta}{x+2}$ για κάθε $x \neq 3$ και $x \neq -2$.

39. Αν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ και $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:
$$P(x)=(\gamma-\alpha)x^2+(\beta-\gamma)x+(\alpha-\beta)$$
είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

40. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ 2ου βαθμού, αν ισχύουν:
$$P(1-x)=P(x+1),\ P(0)=1 \text{ και } P(1)=-3$$

41. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(x-1)^{2005}$ και $Q(x)=x^{2005}-1$. Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα είναι ίσα.

42. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $2P(x)+3P(1-x)=x$.

43. Να βρείτε πολυώνυμα P(x) και Q(x) 1ου βαθμού για τα οποία ισχύει:
$$(x-2)^2P(x)-(x^2-3x+2)Q(x)=-6x^3+6x^2+28x-32$$

44. Να βρείτε το πολυώνυμο 2ου βαθμού P(x) και το πολυώνυμο 1ου βαθμού Q(x) ώστε να ισχύει $(x^2-1)P(x)+x^3Q(x)=x^3+1$.

45. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει:
$$2P(x-1)+3P(-x)=2x+3$$

46. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) 1ου βαθμού ώστε:
$$P(P(x))-P(x)=6x+12$$

47. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) ώστε $[P(x)]^2=x^4+6x^3+8x^2-3x-4$.

48. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x), αν ισχύει $[P(x)]^2+P(x)=(x+1)(x+2)$.

49. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει $P(x-3)=4x+5$.

50. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει $P(x+2)=3x-1$.

51. Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα P(x) για τα οποία ισχύει $3[P(x)]^2=2P(x)$.

52. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ για το οποίο ισχύει:
$$P(x_1)=P(x_2)=P(x_3)=0,\ \text{με}\ x_1\neq x_2\neq x_3\neq x_1$$
Να αποδείξετε ότι το P(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

53. Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο:
$$P(x)=(\alpha+2-\gamma)x^3-(\beta+5)x^2+(3\beta+5\gamma)x+5\alpha+8\delta-9$$
να έχει περισσότερες από 3 ρίζες.

54. Δίνονται τα πολυώνυμα:
$$P(x)=\alpha x^3-\beta x^2+\gamma x+\delta\ \text{και}\ Q(x)=(4\alpha-5)x^3-(\beta^2+2)x^2+(\beta-\gamma)x+6$$
Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το $f(x)=P(x)-Q(x)$ είναι:

α) 3ου βαθμού,
β) 2ου βαθμού,
γ) 1ου βαθμού,
δ) το μηδενικό πολυώνυμο.

55. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x^2+(\alpha-3\beta-1)x+\gamma+3}{x^2+x+1}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το A(1, 2). Να βρείτε τους α, β, γ ώστε η συνάρτηση f να είναι σταθερή.

56. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=x^2-(2\alpha+1)x+\alpha^2+\alpha,\ Q(x)=(x-\alpha-1)^{2\nu}+(x-\alpha)^{\nu}-1, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R},\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ είναι και ρίζες του $Q(x)$.

57. Αν τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα, να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $f(x) + g(x)$ και $f(x)g(x)$ δε θα έχουν επίσης κοινή ρίζα.

58. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$ για τα οποία ισχύει:

$$f^2(x) - xg^2(x) - xp^2(x) = 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ και $p(x)$ είναι μηδενικά.

59. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x) = P(P(x))$. Αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = P(x) - x$, να αποδείξετε ότι το ρ είναι και ρίζα του πολυωνύμου $g(x) = Q(x) - x$.

60. Αν $f(x)$, $g(x)$ είναι δύο πολυώνυμα χωρίς ρίζες, να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα $P(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$, $Q(x) = \beta f(x) + \alpha g(x)$, με $\alpha, \beta\in\mathbb{R}^*$ και $|\alpha| \neq |\beta|$, δεν έχουν κοινή ρίζα.

61. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$, με $Q(x) = P(x)P(-x)$. Να αποδείξετε ότι το $Q(x)$ έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x.

62. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x) = P(P(P(x)))$, με $P(\alpha) = \beta$, $P(\beta) = \gamma$ και $P(\gamma) = \alpha$, όπου $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $Q(\alpha) = \alpha$, **β)** $Q(\beta) = \beta$, **γ)** $Q(\gamma) = \gamma$.

63. **α)** Να βρείτε τα $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq 1$ να ισχύει:

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x-1}$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}$.

64. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 5(\gamma - \alpha)x^3 + \alpha(3\gamma^2 - \beta^2)x - 7(\beta - \alpha) + 2$, με $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$. Αν οι α, β, γ είναι οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{B}=120^{\circ}$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το σταθερό πολυώνυμο.

4.2 Διαίρεση πολυωνύμων

Αλγοριθμική διαίρεση

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

όπου ο βαθμός του $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $\delta(x)$ ή $\upsilon(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Το $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ λέγεται **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκο** και το $\upsilon(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν σε μια διαίρεση πολυωνύμων το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ είναι 0, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην τέλεια διαίρεση του $\Delta(x)$ με το $\delta(x)$ λέμε ότι το **$\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$** ή το **$\Delta(x)$ διαιρείται με το $\delta(x)$** ή το **$\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$** ή το **$\delta(x)$ είναι διαιρέτης του $\Delta(x)$**.

Παράδειγμα διαίρεσης πολυωνύμων

Έστω ότι έχουμε τη διαίρεση των πολυωνύμων $\Delta(x) = -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1$ και $\delta(x) = x^2 - 5$. Τότε:

$$\begin{array}{l|l} -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 & x^2 - 5 \\ \cline{2-2} & -3x^3 \end{array}$$

Πρώτα βρίσκουμε το μονώνυμο που, όταν πολλαπλασιάζεται με τον μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρέτη, δίνει τον μεγιστοβάθμιο όρο του διαιρετέου, το οποίο γράφεται στο πηλίκο.

$$\begin{array}{l|l} -3x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 9x^2 + x - 1 & x^2 - 5 \\ \cline{2-2} +3x^5 + 0x^4 - 15x^3 & -3x^3 \end{array}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο αυτό με τον διαιρετέο, και το γινόμενο γράφεται κάτω από τον διαιρετέο με αντίθετα πρόσημα. Αν κάποιος όρος δεν υπάρχει, τον βάζουμε με συντελεστή μηδέν.

$$
\begin{array}{r|l}
-3x^5+7x^4-6x^3+9x^2+x-1 & x^2-5 \\ \cline{2-2}
+3x^5+0x^4-15x^3 \quad & -3x^3 \\ \cline{1-1}
7x^4-21x^3+9x^2+x-1 &
\end{array}
$$

Έπειτα προσθέτουμε τα δύο πολυώνυμα και προκύπτει ένα τρίτο πολυώνυμο, που γράφεται κάτω από αυτά.

$$
\begin{array}{r|l}
-3x^5+7x^4-6x^3+9x^2+x-1 & x^2-5 \\ \cline{2-2}
+3x^5+0x^4-15x^3 \quad & -3x^3+7x^2 \\ \cline{1-1}
7x^4-21x^3+9x^2+x-1 & \\
-7x^4+0x^3+35x^2 \quad & \\ \cline{1-1}
-21x^3+44x^2+x-1 &
\end{array}
$$

Μετά εφαρμόζουμε διαδοχικά την ίδια διαδικασία, ώσπου να καταλήξουμε σε πολυώνυμο του οποίου ο βαθμός να είναι μικρότερος του βαθμού του διαιρέτη.

$$
\begin{array}{r|l}
-3x^5+7x^4-6x^3+9x^2+x-1 & x^2-5 \\ \cline{2-2}
+3x^5+0x^4-15x^3 \quad & -3x^3+7x^2-21x \\ \cline{1-1}
7x^4-21x^3+9x^2+x-1 & \\
-7x^4+0x^3+35x^2 \quad & \\ \cline{1-1}
-21x^3+44x^2+x-1 & \\
+21x^3+0x^2-105x \quad & \\ \cline{1-1}
44x^2-104x-1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-3x^5+7x^4-6x^3+9x^2+x-1 & x^2-5 \\ \cline{2-2}
+3x^5+0x^4-15x^3 \quad & -3x^3+7x^2-21x+44 \\ \cline{1-1}
7x^4-21x^3+9x^2+x-1 & \\
-7x^4+0x^3+35x^2 \quad & \\ \cline{1-1}
-21x^3+44x^2+x-1 & \\
+21x^3+0x^2-105x \quad & \\ \cline{1-1}
44x^2-104x-1 & \\
-44x^2+0x+220 & \\ \cline{1-1}
-104x+219 &
\end{array}
$$

Άρα από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:
$-3x^5+7x^4-6x^3+9x^2+x-1=(x^2-5)(-3x^3+7x^2-21x+44)+(-104x+219)$,
με πηλίκο το $\pi(x)=-3x^3+7x^2-21x+44$ και υπόλοιπο το $\upsilon(x)=-104x+219$.

Προσοχη

Αν το πολυώνυμο που εκφράζει τον διαιρετέο μιας διαίρεσης δύο πολυωνύμων είναι **ελλιπές** (δηλαδή δεν υπάρχουν με φθίνουσα σειρά όλες οι δυνάμεις του x), τότε, για να κάνουμε τη διαίρεση, συμπληρώνουμε εμείς τους όρους που λείπουν βάζοντας ως συντελεστές τους μηδενικά.

➤ Παραδειγμα

Αν $\Delta(x)=4x^3+5x-3$, τότε γράφουμε $\Delta(x)=4x^3+0x^2+5x-3$.

Διαίρεση πολυωνύμου με το x – ρ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, ισχύει δηλαδή $\boldsymbol{\upsilon = P(\rho)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

Σχήμα Horner

Όταν θέλουμε είτε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $\Delta(x) : (x - \rho)$ είτε να εξετάσουμε αν το ρ είναι ρίζα του $\Delta(x)$, τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό που ονομάζουμε **σχήμα Horner**. Το σχήμα Horner αποτελείται από τρεις γραμμές αριθμών και την κατασκευή του θα την περιγράψουμε παρακάτω.

Έστω λοιπόν η διαίρεση $(5x^3 + 4x^2 - 7x - 9) : (x + 1)$.
Τότε, για να εφαρμόσουμε το σχήμα Horner, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Γράφουμε πρώτα όλους τους συντελεστές του διαιρετέου κατά τη φθίνουσα σειρά των δυνάμεων στο αριστερό μέρος της διάταξης και το ρ στο δεξί μέρος της διάταξης.

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \downarrow & & & & \\ \hline 5 & & & & \end{array}$$

Καταρχήν κατεβάζουμε κάτω από τη γραμμή τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου.

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \downarrow & -5 & & & \\ \hline 5 & & & & \end{array}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το νούμερο κάτω από τη γραμμή με το ρ και το αποτέλεσμα το γράφουμε στην προηγούμενη γραμμή, στην αμέσως δεξιότερη θέση.

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \downarrow & -5 & & & \\ \hline 5 & -1 & & & \end{array}$$

Έπειτα προσθέτουμε τα δύο νούμερα της δεξιότερης στήλης και γράφουμε το αποτέλεσμα στην ίδια στήλη, στην τρίτη γραμμή.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο την ίδια διαδικασία, έχουμε:

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \downarrow & -5 & 1 & & \\ \hline 5 & -1 & -6 & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \downarrow & -5 & 1 & 6 & \\ \hline 5 & -1 & -6 & -3 & \end{array}$$

Επομένως έχουμε $5x^3 + 4x^2 - 7x - 9 = (x + 1)(5x^2 - x - 6) - 3$.

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -7 & -9 & -1 \\ \downarrow & -5 & 1 & 6 & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\underbrace{5 \quad -1 \quad -6}_{\pi(x)}} & \underbrace{-3}_{\upsilon} & \end{array}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ισοδύναμες και πολύ χρήσιμες για τη διαίρεση των πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με τύπο $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$.

$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \upsilon(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ η διαίρεση $\Delta(x) : \delta(x)$ είναι τέλεια $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ το $\Delta(x)$ διαιρείται με το $\delta(x)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$

2. Όπως στη διαίρεση πολυωνύμων, έτσι και στο σχήμα Horner, αν το πολυώνυμο που εκφράζει τον διαιρετέο μιας διαίρεσης δύο πολυωνύμων είναι **ελλιπές**, τότε συμπληρώνουμε εμείς τους όρους που λείπουν βάζοντας ως συντελεστές τους μηδενικά.

Μέθοδοι και εφαρμογές

1η ΜΕΘΟΔΟΣ: Διαίρεση πολυωνύμων

Υπόδειξη: Αν το πολυώνυμο που είναι διαιρέτης είναι της μορφής $x - \rho$, τότε χρησιμοποιούμε είτε την ολοκληρωμένη διαίρεση είτε το σχήμα Horner. Σε αντίθετη περίπτωση χρησιμοποιούμε την ολοκληρωμένη διαίρεση.

1. **Να κάνετε τις διαιρέσεις:**
α) $(2x^3 + 5x^2 - 6x - 1) : (x - 1)$,
β) $(5x^3 - 7\alpha x + 11\alpha) : (x + 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
γ) $(10x^4 + 7x^2 - 3x + 5) : (2x^2 - 1)$.
Στη συνέχεια να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης για καθεμία από αυτές.

Λύση

α) ***1ος τρόπος***

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 5x^2 - 6x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 2x^2 & 2x^2 + 7x + 1 \\ \cline{1-1} 7x^2 - 6x - 1 & \\ -7x^2 + 7x & \\ \cline{1-1} x - 1 & \\ -x + 1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2ος τρόπος

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -6 & -1 & 1 \\ & 2 & 7 & 1 & \\ \hline 2 & 7 & 1 & 0 & \end{array}$$

Επομένως το πηλίκο είναι $2x^2 + 7x + 1$ και το υπόλοιπο είναι 0, ενώ ισχύει:
$2x^3 + 5x^2 - 6x - 1 = (x - 1)(2x^2 + 7x + 1)$.

β)

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -7\alpha & 11\alpha & -2\alpha \\ & -10\alpha & 20\alpha^2 & -40\alpha^3 + 14\alpha^2 & \\ \hline 5 & -10\alpha & 20\alpha^2 - 7\alpha & -40\alpha^3 + 14\alpha^2 + 11\alpha & \end{array}$$

Επομένως το πηλίκο είναι $5x^2 - 10\alpha x + 20\alpha^2 - 7\alpha$ και
το υπόλοιπο είναι $-40\alpha^3 + 14\alpha^2 + 11\alpha$, ενώ ισχύει:
$5x^3 - 7\alpha x + 11\alpha = (x + 2\alpha)(5x^2 - 10\alpha x + 20\alpha^2 - 7\alpha) - 40\alpha^3 + 14\alpha^2 + 11\alpha$.

γ)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
10x^4 & +\,0x^3 & +\,7x^2 & -\,3x & +\,5 & 2x^2-1 \\
\cline{6-6}
-10x^4 & & +\,5x^2 & & & 5x^2+6 \\
\cline{1-5}
 & & 12x^2 & -\,3x & +\,5 & \\
 & & -12x^2 & & +\,6 & \\
\cline{3-5}
 & & & -3x & +\,11 &
\end{array}
$$

Επομένως το πηλίκο είναι $5x^2 + 6$ και το υπόλοιπο είναι $-3x + 11$, ενώ ισχύει:
$10x^4 + 7x^2 - 3x + 5 = (2x^2 - 1)(5x^2 + 6) - 3x + 11$.

2. **Αν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι περιττός, να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $(x^\nu + 1) : (x + 1)$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & -1 & \\
\hline
1 & -1 & 1 & \dots & -1 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος Horner έχουμε ότι:
$x^\nu + 1 = (x + 1)(x^{\nu-1} - x^{\nu-2} + x^{\nu-3} - \dots + x^2 - x + 1)$.

3. **Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^{3\nu} + x^{3\mu+1} + x^{3\rho+2}$, με $\nu, \mu, \rho \in \mathbb{N}^*$, διαιρείται με το $x^2 + x + 1$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$
\begin{aligned}
P(x) - (x^2 + x + 1) &= x^{3\nu} + x^{3\mu+1} + x^{3\rho+2} - x^2 - x - 1 = \\
&= x^{3\nu} - 1 + x(x^{3\mu} - 1) + x^2(x^{3\rho} - 1) = \\
&= (x^3)^\nu - 1 + x[(x^3)^\mu - 1] + x^2[(x^3)^\rho - 1] = \\
&= (x^3 - 1)[(x^3)^{\nu-1} + (x^3)^{\nu-2} + \dots + 1] \\
&\quad + x(x^3 - 1)[(x^3)^{\mu-1} + (x^3)^{\mu-2} + \dots + 1] \\
&\quad + x^2(x^3 - 1)[(x^3)^{\rho-1} + (x^3)^{\rho-2} + \dots + 1] = \\
&= (x^3 - 1)\pi(x).
\end{aligned}
$$

Άρα:

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^2 + x + 1 + (x^3 - 1)\pi(x) = \\
&= x^2 + x + 1 + (x - 1)(x^2 + x + 1)\pi(x) = \\
&= (x^2 + x + 1)[1 + (x - 1)\pi(x)].
\end{aligned}
$$

2η ΜΕΘΟΔΟΣ: Υπόλοιπο διαίρεσης

Υπόδειξη: Για να βρούμε το υπόλοιπο $υ(x)$ της διαίρεσης $Δ(x) : δ(x)$:

- είτε κάνουμε τη διαίρεση χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x)$, όπου βαθμός $υ(x) <$ βαθμός $δ(x)$ ή $υ(x)$ το μηδενικό πολυώνυμο
- είτε χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner, όταν $δ(x) = x - ρ$
- είτε $υ(x) = υ = Δ(ρ)$, όταν $δ(x) = x - ρ$
- είτε θέτουμε στην ταυτότητα της διαίρεσης τις ρίζες του $δ(x)$.

4. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Δ(x) = 5x^3 - 4x^2 - x + 3$ με τα πολυώνυμα:
α) $x - 2$, β) $x + 1$, γ) $2x - 3$.

Λύση

Για τη διαίρεση $Δ(x) = δ(x)(x - ρ) + υ$ έχουμε: $υ = Δ(ρ)$

α) $υ = Δ(2) = 5 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 2 + 3 = 25$.

β) $υ = Δ(-1) = 5(-1)^3 - 4(-1)^2 - (-1) + 3 = -5$.

γ) $Δ(x) = (2x - 3)π(x) + υ = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)π(x) + υ$,

οπότε για $x = \frac{3}{2}$ έχουμε $υ = Δ\left(\frac{3}{2}\right) = 5\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + 3 = \frac{75}{8}$.

5. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο, το υπόλοιπο και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $Δ(x) = 7x^4 - 5x^2 - x - 1$ με τα πολυώνυμα:
α) $x - 1$, β) $x + 2$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

α)

$$\begin{array}{ccccc|c} 7 & 0 & -5 & -1 & -1 & 1 \\ & 7 & 7 & 2 & 1 & \\ \hline 7 & 7 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

Τότε το πηλίκο είναι $7x^3 + 7x^2 + 2x + 1$, το υπόλοιπο είναι 0 και η ταυτότητα της διαίρεσης:

$7x^4 - 5x^2 - x - 1 = (x - 1)(7x^3 + 7x^2 + 2x + 1)$.

β)

7	0	−5	−1	−1	−2
	−14	28	−46	94	
7	−14	23	−47	93	

Τότε το πηλίκο είναι $7x^3 - 14x^2 + 23x - 47$, το υπόλοιπο είναι 93 και η ταυτότητα της διαίρεσης:
$7x^4 - 5x^2 - x - 1 = (x + 2)(7x^3 - 14x^2 + 23x - 47) + 93$.

6. Αν $P(x) = x^{17} - 12x^{16} + 12x^{15} - 12x^{14} + \ldots + 12x - 1$, να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$P(x) : (x - 11)$$

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

1	−12	12	−12	…	12	−1	11
	11	−11	11	…	−11	11	
1	−1	1	−1	…	1	10	

Επομένως $υ = P(11) = 10$.

7. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$(x^{100} - 3x^{47} + 5x^{13} - 4x + 1) : (x^2 - 1)$$

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Έστω $π(x)$ το πηλίκο και $υ(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης, οπότε ισχύει:
$x^{100} - 3x^{47} + 5x^{13} - 4x + 1 = (x^2 - 1)π(x) + υ(x)$,
όπου $υ(x) = 0$ ή βαθμός $υ(x) <$ βαθμός $(x^2 - 1) \Leftrightarrow$ βαθμός $υ(x) < 2$, δηλαδή $υ(x) = αx + β$, με $α, β \in \mathbb{R}$.
Τότε έχουμε:
$x^{100} - 3x^{47} + 5x^{13} - 4x + 1 = (x^2 - 1)π(x) + αx + β$ **(I)**.

- Η (I) για $x = 1$ γίνεται $α + β = 0$ **(II)**.
- Η (I) για $x = -1$ γίνεται $-α + β = 4$ **(III)**.

Από (II) – (III) έχουμε $2α = -4 \Leftrightarrow α = -2$
και από τη (II) βρίσκουμε $β = 2$, άρα $υ(x) = -2x + 2$.

Θέτουμε στη $Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x)$ όπου x τις ρίζες του $δ(x)$.

8. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του P(x) με τα $(x-2)$ και $(x+3)$ είναι 4 και -1 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2+x-6)$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x^2+x-6)$,
οπότε ισχύει $P(x)=(x^2+x-6)\pi(x)+\upsilon(x)$,
όπου $\upsilon(x)=0$ ή βαθμός $\upsilon(x)<$ βαθμός $(x^2+x-6) \Leftrightarrow$ βαθμός $\upsilon(x)<2$,
άρα $\upsilon(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Τότε:
$P(x)=(x^2+x-6)\pi(x)+\alpha x+\beta$ **(I)**.
Αφού η διαίρεση του P(x) με το $(x-2)$ δίνει υπόλοιπο 4, έχουμε:
$P(2)=4 \Leftrightarrow (2^2+2-6)\pi(2)+2\alpha+\beta=4 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=4$ **(II)**.
Αφού η διαίρεση του P(x) με το $(x+3)$ δίνει υπόλοιπο -1, έχουμε:
$P(-3)=-1 \Leftrightarrow [(-3)^2+(-3)-6]\pi(-3)+\alpha(-3)+\beta=-1 \Leftrightarrow 3\alpha-\beta=1$ **(III)**.
Από (II) + (III) έχουμε $5\alpha=5 \Leftrightarrow \alpha=1$,
οπότε από τη (II) βρίσκουμε $\beta=2$.
Επομένως $\upsilon(x)=x+2$.

9. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της τέλειας διαίρεσης $[f(x)-f(\rho)]:(x-\rho)$, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x):(x-\rho)^2$ είναι:

$$\upsilon(x)=\pi(\rho)x+f(\rho)-\rho\pi(\rho)$$

Λύση

Έστω $g(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $f(x):(x^2-2\rho x+\rho^2)$, οπότε ισχύει:
$f(x)=(x-\rho)^2g(x)+\upsilon(x)$, όπου $\upsilon(x)=0$ ή βαθμός $\upsilon(x)<$ βαθμός $(x-\rho)^2$,
άρα $\upsilon(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Τότε $f(x)=(x-\rho)^2g(x)+\alpha x+\beta$ **(I)**.
Θέτουμε στη σχέση (I) όπου x το ρ και έχουμε:
$f(\rho)=(\rho-\rho)^2g(\rho)+\alpha\rho+\beta \Leftrightarrow \beta=f(\rho)-\alpha\rho$ **(II)**.
Η (I) τότε δίνει:
$f(x)=(x-\rho)^2g(x)+\alpha x+f(\rho)-\alpha\rho \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)-f(\rho)=(x-\rho)^2g(x)+\alpha x-\alpha\rho \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x)-f(\rho)=(x-\rho)[(x-\rho)g(x)+\alpha]$.
Αυτό όμως σημαίνει ότι το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης $[f(x)-f(\rho)]:(x-\rho)$ είναι
$\pi(x)=[(x-\rho)g(x)+\alpha]$ και για $x=\rho$ έχουμε:
$\pi(\rho)=[(\rho-\rho)g(\rho)+\alpha] \Leftrightarrow \pi(\rho)=\alpha$ **(III)**.
Επομένως από τις (II) και (III) προκύπτει ότι $\upsilon(x)=\pi(\rho)x+f(\rho)-\rho\pi(\rho)$.

3η ΜΕΘΟΔΟΣ: Ρίζα πολυωνύμου – Παράγοντας πολυωνύμου

Υπόδειξη: Για να αποδείξουμε ότι το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $\Delta(x)$, αρκεί:

- είτε $\Delta(x) = (x - \rho)\pi(x)$
- είτε $\upsilon = 0$ (με διαίρεση πολυωνύμων ή με σχήμα Horner)
- είτε $\Delta(\rho) = 0$
- είτε ότι το $(x - \rho)$ να διαιρεί το $\Delta(x)$
- είτε ότι το $(x - \rho)$ να είναι παράγοντας του $\Delta(x)$
- είτε ότι το $\Delta(x)$ να διαιρείται με το $(x - \rho)$.

10. **Να αποδείξετε ότι το $(x - 2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 6$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 2 - 6 = 24 - 20 + 2 - 6 = 0$,
άρα το $(x - 2)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

Θα μπορούσαμε να κάνουμε είτε διαίρεση είτε σχήμα Horner.

11. **Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = (\alpha - 2)x^3 + \alpha x^2 + 3x - 6$ να διαιρείται με το $(x + 2)$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Για να διαιρείται το $P(x)$ με το $(x + 2)$, αρκεί να ισχύει:

$P(-2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha - 2)(-2)^3 + \alpha(-2)^2 + 3(-2) - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha - 2)(-8) + 4\alpha - 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8\alpha + 16 + 4\alpha - 6 - 6 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αν το ρ είναι ρίζα, δηλαδή αν $P(\rho) = 0$.

12. **Αν το $(x + 4)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι το $(x - 3)$ είναι παράγοντας του $P(11 - 5x)$.**

Λύση

Αφού το $(x + 4)$ είναι παράγοντας του $P(x)$, θα ισχύει $P(-4) = 0$.
Έστω $Q(x) = P(11 - 5x)$, οπότε $Q(3) = P(11 - 5 \cdot 3) = P(-4) = 0$,
άρα το $(x - 3)$ είναι παράγοντας του $Q(x) = P(11 - 5x)$.

13. **Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 3x^2 + 10$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $(x - \rho)$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα της μορφής $(x - \rho)$, πρέπει να ισχύει $P(\rho) = 0$.
Όμως $P(\rho) = \rho^4 + 3\rho^2 + 10 > 0$, αφού $\rho^4, 3\rho^2 \geq 0$ και $10 > 0$.
Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $(x - \rho)$.

14. Να βρείτε τα α, β $\in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\alpha - \beta)x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + x - 6$ να έχει ρίζες $x = 2$ και $x = -3$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)(x + 3)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Πρέπει $P(2) = 0$ και $P(-3) = 0$.
Συνεπώς:

$$\begin{cases} 2^4 + (\alpha-\beta)2^3 - (\alpha+\beta)2^2 + 2 - 6 = 0 \\ (-3)^4 + (\alpha-\beta)(-3)^3 - (\alpha+\beta)(-3)^2 + (-3) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 8\alpha - 8\beta - 4\alpha - 4\beta + 2 - 6 = 0 \\ 81 - 27\alpha + 27\beta - 9\alpha - 9\beta - 3 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + 4\alpha - 12\beta = 0 \\ 72 - 36\alpha + 18\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 3\beta = -3 \\ -2\alpha + \beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 6\beta = -6 \\ -2\alpha + \beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5\beta = -10 \\ -2\alpha + \beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ -2\alpha + \beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ -2\alpha + 2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ -2\alpha = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 3 \end{cases}.$$

Επομένως το πολυώνυμο είναι το $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$.
Τότε με τη βοήθεια του σχήματος Horner για το $P(x)$ και το $\rho = 2$ έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -5 & 1 & -6 & 2 \\ & 2 & 6 & 2 & 6 & \\ \hline 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

Συνεπώς $P(x) = (x - 2)(x^3 + 3x^2 + x + 3)$ **(I)**.
Επιπλέον, με τη βοήθεια του σχήματος Horner για το $x^3 + 3x^2 + x + 3$ και το $\rho = -3$ έχουμε:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 & -3 \\ & -3 & 0 & -3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Άρα $x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x + 3)(x^2 + 1)$ **(II)**.
Από τις (I), (II) βρίσκουμε ότι $P(x) = (x - 2)(x + 3)(x^2 + 1)$,
οπότε το ζητούμενο πηλίκο είναι το $x^2 + 1$.

15. **Να βρείτε τα α, $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\alpha + \beta)x^2 + 3x + (3\beta + \alpha)$ να έχει παράγοντα το $(x - 3)^2$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το P(x) και ρ = 3, έχουμε:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -\alpha-\beta & 3 & 3\beta+\alpha & 3 \\ & 3 & 9-3\alpha-3\beta & 36-9\alpha-9\beta & \\ \hline 1 & 3-\alpha-\beta & 12-3\alpha-3\beta & 36-8\alpha-6\beta & \end{array}$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι το x – 3 είναι παράγοντας του P(x) αν και μόνο αν το 3 είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν:
$36 - 8\alpha - 6\beta = 0 \Leftrightarrow 8\alpha + 6\beta = 36 \Leftrightarrow 4\alpha + 3\beta = 18$ **(I)**.
Διαιρώντας το πηλίκο π(x) της διαίρεσης P(x) : (x – 3) με το (x – 3), έχουμε το ακόλουθο σχήμα Horner:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3-\alpha-\beta & 12-3\alpha-3\beta & 3 \\ & 3 & 18-3\alpha-3\beta & \\ \hline 1 & 6-\alpha-\beta & 30-6\alpha-6\beta & \end{array}$$

Τότε, για να είναι το $(x - 3)^2$ παράγοντας του P(x), πρέπει το (x – 3) να είναι παράγοντας του π(x), οπότε πρέπει:
$30 - 6\alpha - 6\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 5 - \beta$ **(II)**.
Η (I) γίνεται από τη (II):
$4(5 - \beta) + 3\beta = 18 \Leftrightarrow 20 - 4\beta + 3\beta = 18 \Leftrightarrow \beta = 2$
και από τη (II) βρίσκουμε α = 3.

16. **Αν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι το x + y είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^\nu - y^\nu$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Για να είναι το x + y παράγοντας του $P(x) = x^\nu - y^\nu$, αρκεί το –y να είναι ρίζα του, δηλαδή αρκεί να ισχύει P(–y) = 0, το οποίο ισχύει, αφού:
$P(-y) = (-y)^\nu - y^\nu = y^\nu - y^\nu = 0$.

17. **Αν ο ν είναι παράγοντας του μ ($\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$), να αποδείξετε ότι το $x^\nu - y^\nu$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^\mu - y^\mu$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Αφού ο ν είναι παράγοντας του μ, υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε $\mu = \kappa\nu$.

Τότε $x^\mu - y^\mu = x^{\kappa\nu} - y^{\kappa\nu} = (x^\nu)^\kappa - (y^\nu)^\kappa =$

$= (x^\nu - y^\nu)[(x^\nu)^{\kappa-1} + (x^\nu)^{\kappa-2}y^\nu + \ldots + x^\nu(y^\nu)^{\kappa-2} + (y^\nu)^{\kappa-1}]$.

Επομένως το $x^\nu - y^\nu$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^\mu - y^\mu$.

18. **α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $\alpha x + \beta$ $(\alpha \neq 0)$ είναι $\upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

β) Να βρείτε τις συνθήκες για τις οποίες το πολυώνυμο $\alpha x^3 + \beta$ διαιρείται με το $\alpha x + \beta$, αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

Λύση

α) Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο και $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (\alpha x + \beta)$, οπότε $P(x) = (\alpha x + \beta)\pi(x) + \upsilon(x)$,

όπου $\upsilon(x) = 0$ ή βαθμός $\upsilon(x) <$ βαθμός $(\alpha x + \beta)$.

Συνεπώς $\upsilon(x) = \upsilon$, με $\upsilon \in \mathbb{R}$,

οπότε θα ισχύει $P(x) = (\alpha x + \beta)\pi(x) + \upsilon$.

Θέτουμε $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, οπότε:

$$P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left[\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \beta\right]\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \upsilon \Leftrightarrow \upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

β) Για να διαιρείται το $P(x) = \alpha x^3 + \beta$ με το $\alpha x + \beta$ $(\alpha \neq 0)$, πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσής τους να είναι μηδέν, οπότε σύμφωνα με το ερώτημα (α) πρέπει:

$$P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + \beta = 0 \Leftrightarrow -\alpha\frac{\beta^3}{\alpha^3} + \beta = 0 \Leftrightarrow \frac{-\beta^3 + \beta\alpha^2}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\beta^3 + \beta\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \beta(-\beta^2 + \alpha^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \text{ ή } \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta.$$

19. **Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)^{2\nu-1} + x^{2\nu+1} - 2x + 1$ έχει κοινούς παράγοντες με το πολυώνυμο $2x^3 + 3x^2 + x$, τους οποίους να υπολογίσετε.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$2x^3 + 3x^2 + x = x(2x^2 + 3x + 1) = x(x+1)(2x+1) = 2x(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Για να εξετάσουμε αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντες κάποια από τα πολυώνυμα x, x + 1 και $x+\frac{1}{2}$, αρκεί να εξετάσουμε αν έχει ρίζες τους αριθμούς 0, –1 και $-\frac{1}{2}$. Τότε:

- $P(0) = (0-1)^{2\nu-1} + 0^{2\nu+1} - 2\cdot 0 + 1 = (-1)^{2\nu-1} + 1 = -1 + 1 = 0.$
- $P(-1) = (-1-1)^{2\nu-1} + (-1)^{2\nu+1} - 2(-1) + 1 = -2^{2\nu-1} + 2 \neq 0.$
- $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}-1\right)^{2\nu-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{2\nu+1} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\left(\frac{3}{2}\right)^{2\nu-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu+1} + 2 \neq 0.$

Επομένως ο μοναδικός κοινός παράγοντας είναι το x.

20. Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = \nu x^{\nu+1} - (\nu+1)x^{\nu} + 1$ διαιρείται με το $(x-1)^2$. Στη συνέχεια να κάνετε τη διαίρεση.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το P(x) και για ρ = 1, έχουμε:

ν	–ν – 1	0	…	0	1	1
	ν	–1	…	–1	–1	
ν	–1	–1	…	–1	0	

Συνεπώς $P(x) = (x-1)(\nu x^{\nu} - x^{\nu-1} - x^{\nu-2} - \ldots - x - 1)$ **(Ι)**.

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για το $\nu x^{\nu} - x^{\nu-1} - x^{\nu-2} - \ldots - x - 1$ και για ρ = 1, έχουμε:

ν	–1	–1	…	–1	–1	1
	ν	ν – 1	…	ν – (ν – 2)	1	
ν	ν – 1	ν – 2	…	ν – (ν – 1)	0	

Επομένως:

$\nu x^{\nu} - x^{\nu-1} - x^{\nu-2} - \ldots - x - 1 =$

$= (x-1)[\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)x^{\nu-2} + (\nu-2)x^{\nu-3} + \ldots + 2x + 1]$ **(ΙΙ)**.

Συνεπώς από τις (Ι), (ΙΙ) βρίσκουμε:

$P(x) = (x-1)(x-1)[\nu x^{\nu-1} + (\nu-1)x^{\nu-2} + (\nu-2)x^{\nu-3} + \ldots + 2x + 1].$

Ερωτήσεις νέου τύπου

✔ Να σημειώσετε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

1. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το x είναι ίσο με $P(0)$. ❑
2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (\alpha x^2 - \beta x - \gamma)$ έχει τη μορφή $\kappa x + \lambda$, αν $\alpha \neq 0$. ❑
3. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 1)$ είναι πάντα ίσο με $P(1)$. ❑
4. Τα πολυώνυμα $P(x + 1)$ και $P(3x - 7)$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο, όταν διαιρούνται με το $(x - 4)$. ❑
5. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : Q(x)$ είναι 2ου βαθμού, ο βαθμός του $Q(x)$ μπορεί να είναι και αυτός 2ου βαθμού. ❑

✔ Να συμπληρώσετε το ακόλουθο σχήμα Horner.

		–27			–99	
	–20					
5	–14		7	–28		

Ασκήσεις προς λύση

✔ Α΄ Ομάδα

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της διαίρεσης:

α) $(x^3 - 4x^2 + 2x + 3) : (x^2 + 5x - 3)$, **β)** $(2x^3 + 5x^2 - 7x + 4) : (x^2 - x + 4)$,

γ) $(x^3 - 2x^2 - 2x - 1) : (x^2 + 2x + 1)$, **δ)** $(x^3 - x^2 + x + 9) : (x^3 + x^2 - x + 1)$.

2. Να κάνετε τις ακόλουθες διαιρέσεις:

α) $(8x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x + 2)$,

β) $(5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x^3 + 2x - 1)$,

γ) $(x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x - 6) : (x^2 + x + 1)$.

Στη συνέχεια να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης για καθεμία από αυτές.

3. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της διαίρεσης:
α) $(4x^3 + 3x^2 - 2x - 7) : (x + 5)$, **β)** $(x^3 + 5x^2 - 6x + 7) : (x - 4)$,
γ) $(3x^5 - 4x^3 + 2x - 5) : (x + 2)$, **δ)** $(5x^3 + 7x^2 + 6x + 4) : (x + 1)$.

4. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να κάνετε τις ακόλουθες διαιρέσεις:
α) $(x^3 + 2\alpha x^2 - \alpha x + 1) : (x^2 + \alpha x - 2\alpha)$, **β)** $(x^3 - 3\alpha x^2 + 5x - \alpha) : (x - 3\alpha)$.
Στη συνέχεια να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης για καθεμία από αυτές.

5. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της διαίρεσης:
α) $(6x^5 - 7x^3 + x^2 - 4x + 1) : (x^2 + 3x + 4)$, **β)** $(7x^3 - 2x^2 + 9) : (x^2 + 2)$,
γ) $(11x^5 + 5x^3 - 4x^2 + 2x + 1) : (x^2 - 3x + 5)$, **δ)** $(x^7 + x^4 + x + 1) : (x^3 + 3)$.

6. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο, όταν διαιρεθεί με το $5x^2 - 4x + 3$, δίνει πηλίκο $x^2 + 5$ και υπόλοιπο $4x + 5$.

7. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο, όταν διαιρεθεί με το $4x^3 + 2x - 1$, δίνει πηλίκο $3x^2 - 5$ και υπόλοιπο $2x - 7$.

8. Αν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι άρτιος, να γράψετε την ταυτότητα των διαιρέσεων:
α) $(x^\nu + 1) : (x + 1)$, **β)** $(x^\nu + 1) : (x - 1)$, **γ)** $(x^\nu - 1) : (x + 1)$.

9. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\Delta(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x + 7$ με τα πολυώνυμα:
α) $x - 3$, **β)** $x + 2$, **γ)** $4x - 2$.

10. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $(x + 2)$ του πολυωνύμου:
$$P(x) = (9 + 4x)^{2005} - (2x + 4)^{2004} + (3x + 7)^2 - 2x + 5$$

11. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $(x - 4)$ του πολυωνύμου:
$$P(x) = (5x - 18)^{2012} - 2(x - 2)^{2011} + (4 - x)^4 - x^2 + 11$$

12. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο, το υπόλοιπο και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $\Delta(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 7$ με τα πολυώνυμα:
α) $x + 1$, **β)** $x - 2$, **γ)** $x + 5$.

13. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε το πηλίκο, το υπόλοιπο και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x) = 3x^5 - 4x^3 + x^2 - 5$ με τα πολυώνυμα:
α) $x - 1$, **β)** $x - 2$, **γ)** $x + 1$.

14. Να βρείτε το υπόλοιπο στις ακόλουθες διαιρέσεις:
α) $(x^{2012} + 3x^{1972} + 4x^{1821} - x + 7) : (x^2 - 1)$,
β) $(x^{938} - 2x^{937} - 3x^{567} + 6x^{566} + x + 1) : (x^2 - 3x + 2)$.

15. Να βρείτε το υπόλοιπο στις ακόλουθες διαιρέσεις:
α) $(x^{2005} + 4x^{1972} - x^{1999} + 2.004x + 1) : (x^2 - 1)$,
β) $(x^{517} - 2x^{221} + 4x^{220} + 6x - 11) : (x^2 - 4)$ με τη βοήθεια δυνάμεων του 2.

16. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(-2) = 8$ και το 2 είναι ρίζα του, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)(x + 2)$.

17. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $P(x)$ με τα x και $(x + 3)$ είναι 0 και -9 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + 3x)$.

18. Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $P(x)$ με τα $(x + 4)$ και $(x + 5)$ είναι -9 και -7 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + 9x + 20)$.

19. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύουν $P(-10) = 4$, $P(0) = 1$ και $P(4) = 3$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^3 + 6x^2 - 40x)$.

20. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύουν $P(1) = 2$, $P(-2) = -2$ και $P(3) = 3$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$.

21. Να αποδείξετε ότι το $(x + 3)$ είναι παράγοντας των πολυωνύμων:
α) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 20x - 15$, **β)** $Q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

22. Να βρείτε τα $α, β \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x) = αx^3 + βx^2 + 4x - 8$ να έχει παράγοντα το $x^2 + 3x + 2$.

23. Να βρείτε τα $α, β \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x) = (α + β)x^3 + αx^2 + 4$ να διαιρείται με το $(x - 2)$ και το $(x + 1)$.

24. Να βρείτε τα $α, β \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x) = (2α - 4β)x^3 + α^2x^2 + 4β^2x + 2$ να έχει παράγοντα το $(x - 1)$.

25. Να βρείτε τα $α, β \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο:
$$P(x) = (α - 3β)x^3 + (2β + 1)x^2 + 4x + 5$$
να έχει παράγοντα το $x^2 + 5$.

26. Να βρείτε τα $α, β \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο:
$$P(x) = (4α + 5β)x^3 - (3β + α)x^2 + αx + 5$$
να έχει παράγοντα το $x^2 + 1$.

27. Αν το $(x - 2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$, να αποδείξετε ότι το $(x + 5)$ είναι παράγοντας του $P(12 + 2x)$.

28. Αν το -4 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, να αποδείξετε ότι το $(x + 7)$ είναι παράγοντας του $Q(x) = P(17 + 3x)$.

29. Να αποδείξετε ότι τα $P(x) = x^4 + 3x^2 + 10$ και $Q(x) = -x^{10} - 6x^6 - x^2 - 5$ δεν έχουν παράγοντα της μορφής $(x - \rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$.

30. Να αποδείξετε ότι τα $P(x) = -5x^{4\nu} - 7x^{2\nu} - 7$ και $Q(x) = x^{8\nu} + x^{6\nu} + x^{2\nu} + 1$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, δεν έχουν παράγοντα της μορφής $(x - \rho)$, $\rho \in \mathbb{R}$.

31. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\alpha + 2\beta)x^3 - x^2 - (\beta - \alpha)x - 6$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα α, β ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζες τις $x = 2$ και $x = -1$.

β) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να υπολογίσετε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - x - 2)$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

32. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x) = x^3 - (3\alpha + 2\beta)x^2 + 5x + (\beta - 4)$ να έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$.

33. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 11x^3 + 18x^2 - 4x - 8$ έχει παράγοντα το $(x - 2)^3$.

34. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x) = \alpha x^3 + (\alpha + \beta)x^2 - x - 2(\beta + 2\alpha)$$

να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

35. Αν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι περιττός, να αποδείξετε ότι το $x + y$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^\nu + y^\nu$.

36. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και το $P(x) = 5x^4 - 2x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 3$ διαιρούμενο με το $(x^2 - x - 2)$ δίνει υπόλοιπο $(5x + 6)$, να προσδιορίσετε τους α, β.

37. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + x^2 + 3x - 5$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x^2 - 1$ δίνει υπόλοιπο $\dfrac{3x + 1}{2}$, να προσδιορίσετε τους α, β.

38. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και το $P(x) = 6x^4 + \alpha x^3 - \beta x^2 + 4x - 1$ διαιρούμενο με τα $(x + 2)$ και $(x - 3)$ δίνει υπόλοιπο $(3x - 7)$, να προσδιορίσετε τους α, β.

39. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 16x^2 + 17x + 12$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 + 2x + 3$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

40. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και το $P(x) = x^4 - x^3 + \beta x + \alpha$ έχει παράγοντα το $(x^2 + 1)$, να προσδιορίσετε τους α, β.

✔ Β΄ Ομάδα

41. Αν το πολυώνυμο $x^2 + 4$ διαιρεί ακριβώς το πολυώνυμο:

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + 6x^2 + 3\beta x + \alpha - 2, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

να προσδιορίσετε τα α, β και να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + 1)$.

42. Να αποδείξετε ότι οι διαιρέσεις $P(x + 1) : (x - 3)$ και $P(x - 3) : (x - 7)$ έχουν το ίδιο υπόλοιπο, αν το $P(x)$ είναι πολυώνυμο.

43. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(x) = P(1 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - x)$ είναι το σταθερό πολυώνυμο.

44. Η διαίρεση των πολυωνύμων $P(x) : (x^2 - 4x + 3)$ δίνει υπόλοιπο $3x - 5$. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x) : (x - 1)$ και $P(x) : (x - 3)$.

45. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρεί τα πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$, να αποδείξετε ότι διαιρεί και τα πολυώνυμα:

α) $f(x)g(x)$, **β)** $f(x) + g(x)$, **γ)** $f(x) - g(x)$,
δ) $2f(x) + 3g(x)$, **ε)** $[f(x) + g(x)]^5$, **στ)** $f^2(x) + 4g^3(x)$.

46. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρεί το πολυώνυμο $f(x)$ και το $f(x)$ διαιρεί το πολυώνυμο $g(x)$, να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρεί το $g(x)$ και ότι το $P(x)$ διαιρεί το $\kappa f(x) + \lambda g(x)$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

47. Αν για τα πολυώνυμα $\Delta(x)$, $\delta(x)$, $\pi(x)$, $\upsilon(x)$ ισχύει $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$, όπου ο βαθμός του $\upsilon(x)$ είναι μικρότερος του βαθμού του $\pi(x)$, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $[\Delta(x)P(x)] : [\delta(x)P(x)]$, όπου $P(x)$ είναι επίσης πολυώνυμο.

48. Να βρείτε τα $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x) = \kappa x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 + (\kappa - 1)x - 1$ να διαιρείται με το $(x - 1)^3$.

49. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x) = x^4 + (\alpha + 2\beta)x^3 + \alpha x^2 - 3x + 2$ να διαιρείται με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη δύναμη του $(x - 1)$.

50. Να βρείτε τη μορφή των πολυωνύμων 3ου βαθμού τα οποία, αν διαιρεθούν με το $x + 1$, δίνουν υπόλοιπο 4, ενώ, αν διαιρεθούν με το $x^2 - x + 1$, δίνουν υπόλοιπο $x + 1$.

51. Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $101^\nu - 1$ διαιρείται με το 100.

52. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:
α) $(64x^5 - 32x^4 + 16x^2 - 1) : (2x - 1)$, **β)** $(625x^3 - 25x^2 + 5x - 2) : (5x + 3)$.

53. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και το $\alpha x + \beta$ $(\alpha \neq 0)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ $(\gamma \neq 0)$, να αποδείξετε ότι το $\gamma x + \delta$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

54. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha\gamma \neq 0$ και το $\alpha x + \beta$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, να αποδείξετε ότι το $\alpha x + \beta$ είναι παράγοντας του $Q(x) = \gamma x^3 + \delta x^2 + \alpha x + \beta$.

55. Αν $P(x) = x^4 - (\text{συν}\omega - \text{ημ}\omega)x^3 - (\text{συν}2\omega)x^2 - (\text{ημ}\omega)x - 2$, με $\omega \in \mathbb{R}$, να βρείτε τις τιμές του ω για τις οποίες το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$.

56. Αν $P(x) = x^4 + (\text{ημ}3\omega)x^3 + (2\text{ημ}2\omega)x^2 + (\text{ημ}\omega)x - 1$, με $\omega \in (\pi, 2\pi)$, να βρείτε τις τιμές του ω για τις οποίες το $P(x)$ διαιρείται με το $x - 1$.

57. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq -3$ να ισχύει:

$$\frac{3x^4 - 5x^3 + 2x - 48}{x^2 + x - 6} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\delta}{x-2} + \frac{\varepsilon}{x+3}$$

58. Να βρείτε τη συνθήκη ώστε το πολυώνυμο $P_1(x) = x^\nu + x^{\nu-1} + \ldots + x + 1$ να διαιρείται με το $P_2(x) = x^\mu + x^{\mu-1} + \ldots + x + 1$, όπου $\mu < \nu$ και $\mu, \nu \in \mathbb{Z}^*$.

59. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$[(x^2 - 1)^{2005} - 4(2x^2 - 1)^{2004} + 5x^{1999} + x - 6] : (x^3 - x)$$

60. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$(x^{7^5} + x^{7^4} + x^{7^3} + x^{7^2} + x^7 + x) : (x^2 - 1)$$

61. Αν $P(x)$ είναι ένα πολυώνυμο και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq \beta)$, να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - \alpha)(x - \beta)$ είναι:

$$\frac{P(\alpha) - P(\beta)}{\alpha - \beta}x + \frac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha - \beta}$$

62. Αν $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ $(\rho_1 \neq \rho_2)$ και οι διαιρέσεις του πολυωνύμου $P(x)$ με τα $x - \rho_1$ και $x - \rho_2$ δίνουν το ίδιο υπόλοιπο υ, να αποδείξετε ότι η διαίρεση του $P(x)$ με το $(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ δίνει επίσης υπόλοιπο υ.

63. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\alpha \neq \beta$) και για το πολυώνυμο $P(x)$ γνωρίζουμε ότι τα πηλίκα των διαιρέσεων $P(x) : (x - \alpha)$ και $P(x) : (x - \beta)$ είναι $f(x)$, $g(x)$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $f(\beta) = g(\alpha)$.

64. Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, με $\nu \geq 2$, να αποδείξετε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = -\nu x^{\nu+1} + x^{\nu-1} + (\nu^2 + 1)x - \nu^2 + \nu - 2$.

65. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία το $P(x) = \alpha x^{\nu+1} + \beta x^{\nu} + 1$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x - 1)^2$.

66. Αν $P(x)$, $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, όπου $Q(x) = P(x) - 2x$ και το $\rho \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα του $Q(x)$, να αποδείξετε ότι το ρ είναι ρίζα και του πολυωνύμου:

$$f(x) = P(Q(x)) - P(0) + P\left(\frac{P(x)}{2}\right) - 2\rho$$

67. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και τα πολυώνυμα:

$$P(x) = x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1 \text{ και } Q(x) = \alpha x^3 + x^2 + x + \beta, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αν το $x + \beta$ είναι παράγοντας του $P(x)$, να αποδείξετε ότι το $x + \beta$ είναι παράγοντας και του $Q(x)$.

68. Έστω τα $P(x) = (x^{\nu} + x^{\nu-1} + \ldots + x + 1)^2 - x^{2\nu}$ και $Q(x) = x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ldots + x + 1$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $Q(x)$.

β) Να προσδιορίσετε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : Q(x)$.

69. Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $P(x) = \nu x^{\nu+1} - (\nu + 1)x^{\nu} + 1$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)^2$.

70. Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και το πολυώνυμο $P(x) = (\nu + 1)x^{\nu} - \nu x^{\nu-1} + \alpha$ διαιρείται με το $x - 1$, να αποδείξετε ότι δε διαιρείται και με το $(x - 1)^2$.

71. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (1 - x)^{2\nu+1} - x^{2\nu-1} + 2x - 1$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει κοινούς παράγοντες με το πολυώνυμο $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$.

72. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (1 - x)^{2\nu} - x^{2\nu} + 2x - 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$.

73. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)$ που είναι 5ου βαθμού. Αν το $P(x) - 5$ διαιρείται με το $(x - 2)^3$, ενώ το πολυώνυμο $P(x) + 26x^2 + 7x + 3$ διαιρείται με το $x^2 + x + 1$, να βρείτε το $P(x)$.

74. Δίνονται τα πολυώνυμα P(x) και $Q(x) = (x - α)(x - β)(x - γ)$, με $α, β, γ \in \mathbb{R}$ και $α \neq β \neq γ \neq α$. Αν $P(α) = P(β) = P(γ) = 1$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το Q(x).

75. Δίνεται πολυώνυμο P(x) με $P(0) = 0$ και $P(x) = P(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το P(x) έχει παράγοντα το x^2.

76. Δίνεται πολυώνυμο P(x) για το οποίο ισχύει:

$$xP(x) + (x+2)P(x+3) = 2x+10 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με τα $x - 3$ και $x + 2$.
β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - x - 6)$.

77. Δίνονται τα πολυώνυμα P(x), Q(x) για τα οποία ισχύουν:
- το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$ είναι 7
- $Q(4-5x) = (5x+1)P(3x+4) - 14x + 2$.

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $Q(x) : (x - 9)$.

78. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)^{2012}$. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^3 - 3x^2 + 2x)$.

79. Δίνονται τα πολυώνυμα P(x), Q(x) για τα οποία ισχύουν:
- $P(7) = Q(7) = 3$
- $P(x) = Q(x) + Q(P(x)) + P(Q(x))$.

Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ διαιρείται με το $(x - 3)$.