5.2 Αριθμητική πρόοδος

Α΄ Ομάδα

1. **i)** Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 3 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 7$ και διαφορά $\omega = 3$.

Συνεπώς $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 7 + (\nu - 1) \cdot 3 = 7 + 3\nu - 3 = 3\nu + 4$, δηλαδή ο νιοστός όρος είναι ο $\alpha_\nu = 3\nu + 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

ii) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 2 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 11$ και διαφορά $\omega = 2$.

Συνεπώς $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 11 + (\nu - 1) \cdot 2 = 11 + 2\nu - 2 = 2\nu + 9$, δηλαδή ο νιοστός όρος είναι ο $\alpha_\nu = 2\nu + 9$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

iii) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού –3 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = -3$.

Συνεπώς $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 5 + (\nu - 1) \cdot (-3) = 5 - 3\nu + 3 = 8 - 3\nu$, δηλαδή ο νιοστός όρος είναι ο $\alpha_\nu = -3\nu + 8$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

iv) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού $\frac{1}{2}$ στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και διαφορά $\omega = \frac{1}{2}$.

Συνεπώς $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 2 + (\nu - 1)\frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\nu + 3}{2}$, δηλαδή ο νιοστός όρος είναι ο $\alpha_\nu = \frac{\nu + 3}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

v) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού –3 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = -6$ και διαφορά $\omega = -3$.

Συνεπώς $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = -6 + (\nu - 1)(-3) = -6 - 3\nu + 3 = -3 - 3\nu$,

δηλαδή ο νιοστός όρος είναι ο $\alpha_\nu = -3\nu - 3,\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

2. **i)** Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 5 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = -2$ και διαφορά $\omega = 5$.

Συνεπώς:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = -2 + (\nu - 1) \cdot 5 = -2 + 5\nu - 5 = 5\nu - 7,\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

Τότε $\alpha_{15} = 5 \cdot 15 - 7 = 75 - 7 = 68$.

ii) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 7 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 11$ και διαφορά $\omega = 7$.

Συνεπώς:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 11 + (\nu - 1) \cdot 7 = 11 + 7\nu - 7 = 7\nu + 4,\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

Τότε $\alpha_{20} = 7 \cdot 20 + 4 = 140 + 4 = 144$.

iii) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 11 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$ και διαφορά $\omega = 11$.

Συνεπώς:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 4 + (\nu - 1) \cdot 11 = 4 + 11\nu - 11 = 11\nu - 7,\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

Τότε $\alpha_{30} = 11 \cdot 30 - 7 = 330 - 7 = 323$.

iv) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 8 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 17$ και διαφορά $\omega = 8$.

Συνεπώς:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 17 + (\nu - 1) \cdot 8 = 17 + 8\nu - 8 = 8\nu + 9,\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

Τότε $\alpha_{35} = 8 \cdot 35 + 9 = 280 + 9 = 289$.

v) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού $\frac{2}{3}$ στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = \frac{2}{3}$.

Συνεπώς $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)\frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2\nu}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2\nu+1}{3}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Τότε $\alpha_{50} = \frac{2\cdot 50+1}{3} = \frac{101}{3}$.

vi) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού $\frac{3}{4}$ στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ και διαφορά $\omega = \frac{3}{4}$.

Συνεπώς $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = \frac{1}{2} + (\nu-1)\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3\nu}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3\nu-1}{4}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Τότε $\alpha_{47} = \frac{3\cdot 47-1}{4} = \frac{140}{4} = 35$.

3. Έστω α_ν η αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω και νιοστό όρο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

i) $\begin{cases} \alpha_6 = 12 \\ \alpha_{10} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 12 \\ \alpha_1 + 9\omega = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 12 \\ \alpha_1 + 9\omega - \alpha_1 - 5\omega = 16 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 12 - 5\omega \\ 4\omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 12 - 5\omega \\ \omega = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 12 - 5\cdot 1 \\ \omega = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 7 \\ \omega = 1 \end{cases}.$

ii) $\begin{cases} \alpha_5 = 14 \\ \alpha_{12} = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ \alpha_1 + 11\omega = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ \alpha_1 + 11\omega - \alpha_1 - 4\omega = 42 - 14 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 14 - 4\omega \\ 7\omega = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 14 - 4\omega \\ \omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 14 - 4\cdot 4 \\ \omega = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \omega = 4 \end{cases}.$

iii) $\begin{cases} \alpha_3 = 20 \\ \alpha_7 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ \alpha_1 + 6\omega = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ \alpha_1 + 6\omega - \alpha_1 - 2\omega = 32 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 20 - 2\omega \\ 4\omega = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 20 - 2\omega \\ \omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 20 - 2\cdot 3 \\ \omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 14 \\ \omega = 3 \end{cases}.$

4. Έστω α_ν η αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω και νιοστό όρο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

i) $\begin{cases} \alpha_5 = -5 \\ \alpha_{15} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = -5 \\ \alpha_1 + 14\omega = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = -5 \\ \alpha_1 + 14\omega - \alpha_1 - 4\omega = -2 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -5 - 4\omega \\ 10\omega = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -5 - 4 \cdot \dfrac{3}{10} \\ \omega = \dfrac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{62}{10} = -\dfrac{31}{5} \\ \omega = \dfrac{3}{10} \end{cases}.$

Συνεπώς $\alpha_\nu = -\dfrac{62}{10} + (\nu - 1) \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{3\nu - 65}{10}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και

$\alpha_{50} = \dfrac{3 \cdot 50 - 65}{10} = \dfrac{85}{10} = \dfrac{17}{2}.$

ii) $\begin{cases} \alpha_7 = 55 \\ \alpha_{22} = 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 55 \\ \alpha_1 + 21\omega = 145 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 55 \\ \alpha_1 + 21\omega - \alpha_1 - 6\omega = 145 - 55 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 55 - 6\omega \\ 15\omega = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 55 - 6\omega \\ \omega = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 55 - 6 \cdot 6 \\ \omega = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 19 \\ \omega = 6 \end{cases}.$

Συνεπώς $\alpha_\nu = 19 + (\nu - 1) \cdot 6 = 6\nu + 13$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και

$\alpha_{18} = 6 \cdot 18 + 13 = 121.$

5. Έστω α_ν η αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω και νιοστό όρο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

i) Έχουμε $\alpha_\nu = 2 + (\nu - 1) \cdot 5 = 2 + 5\nu - 5 = 5\nu - 3$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε:

$\alpha_\nu = 97 \Leftrightarrow 5\nu - 3 = 97 \Leftrightarrow 5\nu = 100 \Leftrightarrow \nu = 20$, δηλαδή $\alpha_{20} = 97$

ii) Έχουμε $\alpha_\nu = 80 + (\nu - 1) \cdot (-3) = 80 - 3\nu + 3 = -3\nu + 83$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε:

$\alpha_\nu = -97 \Leftrightarrow -3\nu + 83 = -97 \Leftrightarrow -3\nu = -180 \Leftrightarrow \nu = 60,$

δηλαδή $\alpha_{60} = -97$.

6. **i)** Αν x είναι ο αριθμητικός μέσος των 10, –40, ισχύει:

$$x = \frac{10 + (-40)}{2} = \frac{-30}{2} = -15.$$

ii) $2 \cdot (3x - 2) = 5x + 1 + 11 \Leftrightarrow 6x - 4 = 5x + 12 \Leftrightarrow 6x - 5x = 12 + 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 16.$

7. Έστω x, y οι δύο ζητούμενοι αριθμοί, με x > y.

Τότε $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 2 \cdot 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y + x - y = 50 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 10 \\ 2x = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 10 \\ x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - 10 \\ x = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ x = 30 \end{cases}.$$

8. **i)** Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 2 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 7$ και διαφορά $\omega = 2$. Θέλουμε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων, άρα $\nu = 40$, οπότε:

$$\Sigma_{40} = \frac{2\alpha_1 + (40 - 1)\omega}{2} \cdot 40 = \frac{2 \cdot 7 + 39 \cdot 2}{2} \cdot 40 = 46 \cdot 40 = 1.840.$$

ii) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 2 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 0$ και διαφορά $\omega = 2$. Θέλουμε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων, άρα $\nu = 40$, οπότε:

$$\Sigma_{40} = \frac{2\alpha_1 + (40 - 1)\omega}{2} \cdot 40 = \frac{2 \cdot 0 + 39 \cdot 2}{2} \cdot 40 = 39 \cdot 40 = 1.560.$$

iii) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 4 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 6$ και διαφορά $\omega = 4$. Θέλουμε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων, άρα $\nu = 40$, οπότε:

$$\Sigma_{40} = \frac{2\alpha_1 + (40 - 1)\omega}{2} \cdot 40 = \frac{2 \cdot 6 + 39 \cdot 4}{2} \cdot 40 = 84 \cdot 40 = 3.360.$$

iv) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού 5 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = -7$ και διαφορά $\omega = 5$. Θέλουμε το άθροισμα των 40 πρώτων όρων, άρα $\nu = 40$, οπότε:

$$\Sigma_{40} = \frac{2\alpha_1 + (40 - 1)\omega}{2} \cdot 40 = \frac{2 \cdot (-7) + 39 \cdot 5}{2} \cdot 40 = 181 \cdot 20 = 3.620.$$

9. **i)** Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού –3 στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και διαφορά $\omega = -3$. Θέλουμε το άθροισμα των 80 πρώτων όρων, άρα $\nu = 80$, οπότε:

$$\Sigma_{80} = \frac{2\alpha_1 + (80-1)\omega}{2} \cdot 80 = \frac{2 \cdot 2 + 79 \cdot (-3)}{2} \cdot 80 = (-233) \cdot 40 = -9.320.$$

ii) Κάθε όρος προκύπτει από την πρόσθεση του σταθερού αριθμού $\frac{2}{3}$ στον προηγούμενο, οπότε έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$ και διαφορά $\omega = \frac{2}{3}$. Θέλουμε το άθροισμα των 80 πρώτων όρων, άρα $\nu = 80$, οπότε:

$$\Sigma_{80} = \frac{2\alpha_1 + (80-1)\omega}{2} \cdot 80 = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 79 \cdot \frac{2}{3}}{2} \cdot 80 = \frac{156}{3} \cdot 40 = 2.080.$$

10. **i)** Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$, διαφορά $\omega = 4$ και νιοστό όρο

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 1 + (\nu-1)4 = 4\nu - 3,\ \nu \in \mathbb{N}^*.$

Για να βρούμε το άθροισμα, χρειαζόμαστε το πλήθος των όρων, άρα αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε:

$\alpha_\nu = 197 \Leftrightarrow 4\nu - 3 = 197 \Leftrightarrow 4\nu = 200 \Leftrightarrow \nu = 50.$

Συνεπώς:

$$\Sigma_{50} = \frac{2\alpha_1 + (50-1)\omega}{2} \cdot 50 = \frac{2 \cdot 1 + 49 \cdot 4}{2} \cdot 50 = 99 \cdot 50 = 4.950.$$

ii) Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 9$, διαφορά $\omega = 3$ και νιοστό όρο

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 9 + (\nu-1) \cdot 3 = 3\nu + 6,\ \nu \in \mathbb{N}^*.$

Για να βρούμε το άθροισμα, χρειαζόμαστε το πλήθος των όρων, άρα αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε:

$\alpha_\nu = 90 \Leftrightarrow 3\nu + 6 = 90 \Leftrightarrow 3\nu = 84 \Leftrightarrow \nu = 28.$

Συνεπώς:

$$\Sigma_{28} = \frac{2\alpha_1 + (28-1)\omega}{2} \cdot 28 = \frac{2 \cdot 9 + 27 \cdot 3}{2} \cdot 28 = 99 \cdot 14 = 1.386.$$

iii) Οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = -7$, διαφορά $\omega = -3$ και νιοστό όρο

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = -7 + (\nu-1)\cdot(-3) = -3\nu - 4,\ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Για να βρούμε το άθροισμα, χρειαζόμαστε το πλήθος των όρων, άρα αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε:

$$\alpha_\nu = -109 \Leftrightarrow -3\nu - 4 = -109 \Leftrightarrow -3\nu = -105 \Leftrightarrow \nu = 35.$$

Συνεπώς:

$$\Sigma_{35} = \frac{2\alpha_1 + (35-1)\omega}{2} \cdot 35 = \frac{2 \cdot (-7) + 34 \cdot (-3)}{2} \cdot 35 = (-58) \cdot 35 = -2.030.$$

11. **i)** Έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$ και διαφορά $\omega = 4$.

Αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε:

$$\Sigma_\nu = 180 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 4 + (\nu-1)\cdot 4}{2} \cdot \nu = 180 \Leftrightarrow (2\nu + 2)\nu = 180 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0 \Leftrightarrow \nu = -10$ (απορρίπτεται) ή $\nu = 9$.

Επομένως οι 9 πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα 180.

ii) Έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$ και διαφορά $\omega = 5$.

Αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε:

$$\Sigma_\nu = 180 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 5 + (\nu-1)\cdot 5}{2} \cdot \nu = 180 \Leftrightarrow (5\nu + 5)\nu = 360 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 72 = 0 \Leftrightarrow \nu = -9$ (απορρίπτεται) ή $\nu = 8$.

Επομένως οι 8 πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου έχουν άθροισμα 180.

12. Το πλήθος των κεραμιδιών σε κάθε σειρά είναι αριθμητική πρόοδος α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 53$, διαφορά $\omega = -2$ και $\nu \leq 15$. Ο νιοστός όρος της είναι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 53 + (\nu-1)\cdot(-2) = -2\nu + 55,\ \nu \in \mathbb{N}^*,\ \nu \leq 15.$$

Συνεπώς η 15η σειρά θα έχει $\alpha_{15} = -2\cdot 15 + 55 = 25$ κεραμίδια, ενώ η στέγη

έχει συνολικά $\Sigma_{15} = \dfrac{2\cdot 53 + (15-1)\cdot(-2)}{2}\cdot 15 = 39\cdot 15 = 585$ κεραμίδια.

Β΄ Ομάδα

1. Θεωρούμε τη διαφορά:

$\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = 12 - 4\nu - [12 - 4(\nu-1)] = 12 - 4\nu - 12 + 4\nu - 4 = -4,$

που είναι σταθερός αριθμός, άρα η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος
με $\alpha_1 = 12 - 4 \cdot 1 = 8$ και διαφορά $\omega = -4$.

2. **i)** Οι <u>θετικοί</u> περιττοί αριθμοί αποτελούν αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 2$. Θέλουμε το άθροισμα των 200 πρώτων όρων, άρα $\nu = 200$, οπότε:

$$\Sigma_{200} = \frac{2\alpha_1 + (200-1)\omega}{2}\cdot 200 = \frac{2\cdot 1 + 199\cdot 2}{2}\cdot 200 = 200\cdot 200 = 40.000.$$

ii) Οι θετικοί άρτιοι αριθμοί αποτελούν αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και διαφορά $\omega = 2$. Θέλουμε το άθροισμα των 300 πρώτων όρων, άρα $\nu = 300$, οπότε:

$$\Sigma_{300} = \frac{2\alpha_1 + (300-1)\omega}{2}\cdot 300 = \frac{2\cdot 2 + 299\cdot 2}{2}\cdot 300 = 301\cdot 300 = 90.300.$$

iii) Οι δοσμένοι περιττοί αριθμοί αποτελούν αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 17$, διαφορά $\omega = 2$ και $\alpha_\nu = 379 \Leftrightarrow 17 + (\nu - 1)\cdot 2 = 379 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 17 + 2\nu - 2 = 379 \Leftrightarrow 2\nu = 379 + 2 - 17 \Leftrightarrow 2\nu = 364 \Leftrightarrow \nu = 182$.
Θέλουμε το άθροισμα των 182 πρώτων όρων, άρα $\nu = 182$, οπότε:

$$\Sigma_{182} = \frac{2\alpha_1 + (182-1)\omega}{2}\cdot 182 = \frac{2\cdot 17 + 181\cdot 2}{2}\cdot 182 = 198\cdot 182 = 36.036.$$

3. **i)** Τα πολλαπλάσια του 5 από το 1 ως το 199 αποτελούν αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 5$, διαφορά $\omega = 5$ και τελευταίο όρο $\alpha_\nu = 195$.

Όμως, $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega = 5 + (\nu-1)\cdot 5 = 5 + 5\nu - 5 = 5\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$,
οπότε $5\nu = 195 \Leftrightarrow \nu = 39$, δηλαδή αναζητούμε το

$$\Sigma_{39} = \frac{2\alpha_1 + (39-1)\omega}{2} \cdot 39 = \frac{2 \cdot 5 + 38 \cdot 5}{2} \cdot 39 = 100 \cdot 39 = 3.900.$$

ii) Τα πολλαπλάσια του 3 από το 10 ως το 200 αποτελούν αριθμητική πρόοδο α_ν με πρώτο όρο $\alpha_1 = 12$, διαφορά $\omega = 3$ και τελευταίο όρο $\alpha_\nu = 198$.
Όμως, $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 12 + (\nu - 1) \cdot 3 = 12 + 3\nu - 3 = 3\nu + 9$,
$\nu \in \mathbb{N}^*$, οπότε $3\nu + 9 = 198 \Leftrightarrow 3\nu = 189 \Leftrightarrow \nu = 63$, δηλαδή αναζητούμε το

$$\Sigma_{63} = \frac{2\alpha_1 + (63-1)\omega}{2} \cdot 63 = \frac{2 \cdot 12 + 62 \cdot 3}{2} \cdot 63 = 105 \cdot 63 = 6.615.$$

4. **i)** Θεωρούμε τη διαφορά:
$\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = 5\nu - 4 - [5 \cdot (\nu - 1) - 4] = 5\nu - 4 - 5\nu + 5 + 4 = 5$,
που είναι σταθερή, άρα η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$ και διαφορά $\omega = 5$. Αναζητούμε το

$$\Sigma_{30} = \frac{2\alpha_1 + (30-1)\omega}{2} \cdot 30 = \frac{2 \cdot 1 + 29 \cdot 5}{2} \cdot 30 = 147 \cdot 15 = 2.205.$$

ii) Θεωρούμε τη διαφορά:
$\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = -5\nu - 3 - [-5 \cdot (\nu - 1) - 3] = -5\nu - 3 + 5\nu - 5 + 3 = -5$,
που είναι σταθερή, άρα η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος με
$\alpha_1 = -5 \cdot 1 - 3 = -8$ και διαφορά $\omega = -5$. Αναζητούμε το

$$\Sigma_{40} = \frac{2\alpha_1 + (40-1)\omega}{2} \cdot 40 = \frac{2 \cdot (-8) + 39 \cdot (-5)}{2} \cdot 40 = (-211) \cdot 20 = -4.220.$$

5.
- Οι ακέραιοι από το 1 μέχρι το 200 αποτελούν αριθμητική πρόοδο α_ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$, με $\omega_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$ και $\nu = 200$, οπότε:

$$A = 1 + 2 + ... + 200 = \frac{2 \cdot 1 + (200-1) \cdot 1}{2} \cdot 200 = 20.100.$$

- Οι ακέραιοι από το 1 μέχρι το 200 που είναι πολλαπλάσια του 4 αποτελούν αριθμητική πρόοδο β_ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$, με $\omega_2 = 4$, $\beta_1 = 4$ και $\nu = 50$,

οπότε $B = 4 + 8 + 12 + ... + 200 = \dfrac{2 \cdot 4 + (50-1) \cdot 4}{2} \cdot 50 = 5.100.$

- Οι ακέραιοι από το 1 μέχρι το 200 που είναι πολλαπλάσια του 9 αποτελούν αριθμητική πρόοδο γ_ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$, με $\omega_3 = 9$, $\gamma_1 = 9$ και

$\gamma_\nu \leq 200 \Leftrightarrow 9 + (\nu - 1) \cdot 9 \leq 200 \Leftrightarrow 9\nu \leq 200 \Leftrightarrow \nu \leq \dfrac{200}{9} < 22{,}3$, άρα

$\nu = 22$, οπότε $\Gamma = 9 + 18 + ... + 198 = \dfrac{2 \cdot 9 + (22-1) \cdot 9}{2} \cdot 22 = 2.277.$

- Αν όμως απλώς αφαιρέσουμε από το Α τα Β και Γ, έχουμε αφαιρέσει τα κοινά πολλαπλάσια των 4 και 9 δύο φορές. Επομένως αυτά πρέπει να προστεθούν μία φορά για να βρούμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.
  Τα κοινά πολλαπλάσια των 4 και 9 αποτελούν αριθμητική πρόοδο δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}^*$, με $\delta_1 = 36$, $\omega_4 = 36$ και

  $\delta_\nu \leq 200 \Leftrightarrow 36 + (\nu - 1) \cdot 36 \leq 200 \Leftrightarrow 36\nu \leq 200 \Leftrightarrow \nu \leq \dfrac{200}{36} < 5{,}6,$

  άρα $\nu = 5$ και $\Delta = 36 + 72 + ... + 180 = \dfrac{2 \cdot 36 + (5-1) \cdot 36}{2} \cdot 5 = 540.$
- Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι:
  $\mathrm{A} - \mathrm{B} - \Gamma + \Delta = 20.100 - 5.100 - 2.277 + 540 = 13.263.$

6. Έχουμε αριθμητική πρόοδο α_ν με $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 2$ και αναζητούμε το ελάχιστο $\nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε:

$\Sigma_\nu > 4.000 \Leftrightarrow \dfrac{2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2}{2} \cdot \nu > 4.000 \Leftrightarrow \nu^2 > 4.000,$

οπότε $3.969 > \nu^2 > 4.000 \geq 4.096.$

Συνεπώς το ελάχιστο ν είναι το $\nu = \sqrt{4.096} = 64.$

7.
- 1η γραμμή: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 + (12 - 1)(-10) = 120 - 110 = 10.$

  $S_\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu = \dfrac{2 \cdot 120 + (12-1)(-10)}{2} \cdot 12 = 65 \cdot 12 = 780.$
- 2η γραμμή: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, άρα $109 = 5 + (27 - 1)\omega \Leftrightarrow 109 = 5 + 26\omega \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 26\omega = 104 \Leftrightarrow \omega = 4.$

  $S_\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu = \dfrac{2 \cdot 5 + (27-1)4}{2} \cdot 27 = 57 \cdot 27 = 1.539.$
- 3η γραμμή: $S_\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu$, άρα $210 = \dfrac{2 \cdot \alpha_1 + (12-1) \cdot 3}{2} \cdot 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 210 = (2\alpha_1 + 11 \cdot 3) \cdot 6 \Leftrightarrow 210 = 12\alpha_1 + 198 \Leftrightarrow 12\alpha_1 = 12 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1.$
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 1 + (12 - 1) \cdot 3 = 1 + 11 \cdot 3 = 34.$

- 4η γραμμή: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, άρα $-8 = \alpha_1 + (16 - 1) \cdot 2 \Leftrightarrow -8 = \alpha_1 + 30 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \alpha_1 = -38.$

$$S_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega}{2}\nu = \frac{2 \cdot (-38) + (16-1) \cdot 2}{2} \cdot 16 = (-23) \cdot 16 = -368.$$

Συνεπώς ο συμπληρωμένος πίνακας είναι ο ακόλουθος:

α_1	ω	ν	α_ν	S_ν
120	–10	12	**10**	**780**
5	**4**	27	109	**1.539**
1	3	12	**34**	210
–38	2	16	–8	**–368**

8. *<u>ΑΝ ΤΟ ΡΟΛΟΪ ΧΤΥΠΑ ΑΠΟ 1 ΩΣ 12 ΦΟΡΕΣ</u>:*

Οι χτύποι αποτελούν αριθμητική πρόοδο α_ν με διαφορά $\omega = 1$,

πρώτο όρο $\alpha_1 = 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\nu \leq 12$.

Αναζητούμε αρχικά το πλήθος των χτύπων στο 12ωρο,

οπότε $\Sigma_{12} = \dfrac{2 \cdot 1 + (12-1) \cdot 1}{2} \cdot 12 = (2 + 11 \cdot 1) \cdot 6 = 13 \cdot 6 = 78$ χτύποι.

Το σύνολο των χτύπων στο 24ωρο είναι $2 \cdot \Sigma_{12} = 2 \cdot 78 = 156$.

<u>ΑΝ ΤΟ ΡΟΛΟΪ ΧΤΥΠΑ ΑΠΟ 1 ΩΣ 24 ΦΟΡΕΣ</u>:

Οι χτύποι αποτελούν αριθμητική πρόοδο β_ν με διαφορά $\omega' = 1$,

πρώτο όρο $\beta_1 = 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\nu \leq 24$.

Αναζητούμε το πλήθος των χτύπων στο 24ωρο,

οπότε $S_{24} = \dfrac{2 \cdot 1 + (24-1) \cdot 1}{2} \cdot 24 = (2 + 23 \cdot 1) \cdot 12 = 25 \cdot 12 = 300$ χτύποι.

9. Έστω α_ν το πλήθος των καθισμάτων στη νιοστή σειρά. Αφού το πλήθος των θέσεων αυξάνεται από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντα αριθμό θέσεων, η α_ν είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\nu \leq 33$, $\alpha_1 = 800$ και $\alpha_{33} = 4.160$.

Συνεπώς:

$\alpha_{33} = 4.160 \Leftrightarrow 800 + (33 - 1)\omega = 4.160 \Leftrightarrow 800 + 32\omega = 4.160 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 32\omega = 4.160 - 800 \Leftrightarrow 32\omega = 3.360 \Leftrightarrow \omega = \frac{3.360}{32} \Leftrightarrow \omega = 105.$$

Το σύνολο των θέσεων είναι το άθροισμα των 33 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου, οπότε ισχύει:

$$\Sigma_{33} = \frac{2\cdot 800 + (33-1)\cdot 105}{2}\cdot 33 = \frac{2\cdot 800 + 32\cdot 105}{2}\cdot 33 = \frac{1.600 + 3.360}{2}\cdot 33 =$$

$$= \frac{4.960}{2}\cdot 33 = 2.480\cdot 33 = 81.840 \text{ θέσεις έχει το στάδιο.}$$

Η μεσαία σειρά καθισμάτων είναι η 17η και έχει πλήθος

$$\alpha_{17} = 800 + (17-1)\cdot 105 = 800 + 16\cdot 105 = 800 + 1.680 = 2.480 \text{ θέσεις.}$$

10. Έστω α_ν η αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, πρώτο όρο α_1 και νιοστό όρο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Έχουμε ότι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{12} = 80$.

Τότε:

$$\alpha_{12} = 80 \Leftrightarrow 3 + (12 - 1)\omega = 80 \Leftrightarrow 3 + 11\omega = 80 \Leftrightarrow 11\omega = 80 - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 11\omega = 77 \Leftrightarrow \omega = \frac{77}{11} \Leftrightarrow \omega = 7.$$

Συνεπώς οι ζητούμενοι ενδιάμεσοι όροι είναι οι:

$\alpha_2 = 10, \alpha_3 = 17, \alpha_4 = 24, \alpha_5 = 31, \alpha_6 = 38, \alpha_7 = 45, \alpha_8 = 52, \alpha_9 = 59,$

$\alpha_{10} = 66, \alpha_{11} = 73.$

11. Το άθροισμα $\nu + (\nu - 1) + (\nu - 2) + \ldots + 1$ είναι άθροισμα ν όρων αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο ν και τελευταίο όρο 1, οπότε από τον τύπο $\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\cdot \nu$ βρίσκουμε ότι:

$$\nu + (\nu-1) + (\nu-2) + \ldots + 1 = \frac{\nu+1}{2}\cdot\nu = \frac{(\nu+1)\nu}{2} \quad \textbf{(I)}.$$

Συνεπώς:

$$1+\frac{\nu-1}{\nu}+\frac{\nu-2}{\nu}+...+\frac{1}{\nu}=\frac{\nu}{\nu}+\frac{\nu-1}{\nu}+\frac{\nu-2}{\nu}+...+\frac{1}{\nu}=$$

$$=\frac{\nu+(\nu-1)+(\nu-2)+...+1}{\nu}\overset{(I)}{=\!=}\frac{\frac{(\nu+1)\nu}{2}}{\nu}=\frac{(\nu+1)\nu}{2\nu}=\frac{\nu+1}{2}.$$

12. Το κόστος του νιοστού μέτρου δίνεται από την αριθμητική πρόοδο α_ν που έχει διαφορά $\omega = 5$ € και πρώτο όρο $\alpha_1 = 20$ €.
Θέλουμε το συνολικό κόστος της γεώτρησης να είναι μέχρι 4.700 €, άρα αναζητούμε $\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε:

$$\Sigma_\nu \le 4.700 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 20+(\nu-1)5}{2}\nu \le 4.700 \Leftrightarrow (40+5\nu-5)\nu \le 9.400 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\nu^2+35\nu-9.400 \le 0 \Leftrightarrow \nu^2+7\nu-1.880 \le 0 \ \textbf{(I)}.$$

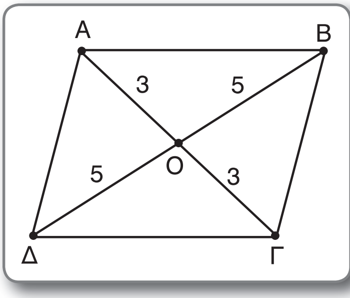
Το τριώνυμο $\nu^2+7\nu-1.880$ έχει διακρίνουσα
$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1.880) = 7.569 = 87^2$
και ρίζες $\nu = \dfrac{-7\pm 87}{2} \Leftrightarrow \nu = -47 < 0$ (απορρίπτεται) ή $\nu = 40$.
Συνεπώς η (I) έχει λύση:
$1 \le \nu \le 40$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, δηλαδή η γεώτρηση μπορεί να πάει μέχρι 40 μέτρα.

5. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

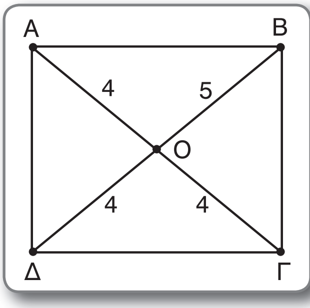
5.1 έως 5.2

Ερωτήσεις Κατανόησης

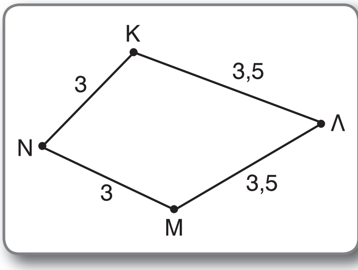
1. **i)** Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει ότι ΑΟ = ΟΓ = 3 και ΒΟ = ΟΔ = 5, δηλαδή οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



ii) Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει ότι ΑΟ = ΟΓ = 3 και ΒΟ ≠ ΟΔ, δηλαδή οι διαγώνιοι δε διχοτομούνται, οπότε δεν είναι παραλληλόγραμμο.



iii) Στο διπλανό τετράπλευρο ΚΛΜΝ ισχύει ΚΛ ≠ ΜΝ και ΚΝ ≠ ΛΜ, δηλαδή οι απέναντι πλευρές δεν είναι ίσες, οπότε το ΚΛΜΝ δεν είναι παραλληλόγραμμο.



iv) Στο διπλανό τετράπλευρο ΑΔΚΡ ισχύουν:

$\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180^{o} \Leftrightarrow \widehat{\varphi} = 180^{o} - \widehat{\omega}$ **(I)**

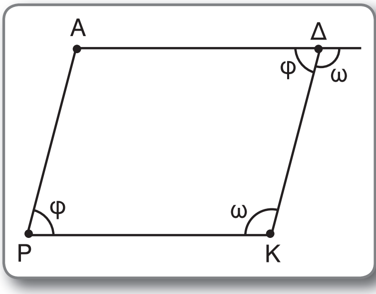
και

$\widehat{A} + \hat{P} + \widehat{K} + \widehat{A\Delta K} = 360^{o} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{\varphi} + \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} = 360^{o} \overset{(I)}{\Longrightarrow}$

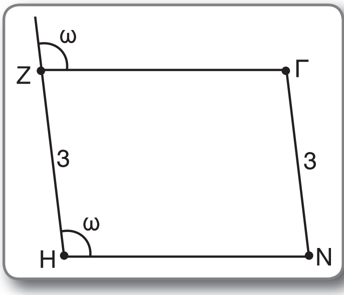
$\Rightarrow \widehat{A} + 180^{o} - \widehat{\omega} + \widehat{\omega} + 180^{o} - \widehat{\omega} = 360^{o} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \widehat{A} + 360^{o} - \widehat{\omega} = 360^{o} \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{\omega}.$

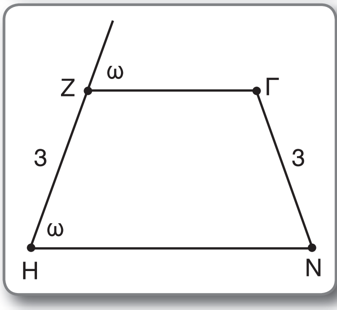


Επομένως στο τετράπλευρο ΑΔΚΡ ισχύει ότι $\widehat{A} = \widehat{K} = \widehat{\omega}$ και $\hat{P} = \widehat{A\Delta K} = \widehat{\varphi}$, δηλαδή οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, οπότε το ΑΔΚΡ είναι παραλληλόγραμμο.

v) Στο διπλανό τετράπλευρο ΖΗΝΓ έχουμε δύο παράλληλες πλευρές (ΖΓ // ΗΝ, αφού είναι ίσες οι εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες ω) και οι άλλες δύο πλευρές είναι ίσες (ΖΗ = ΓΝ = 3).



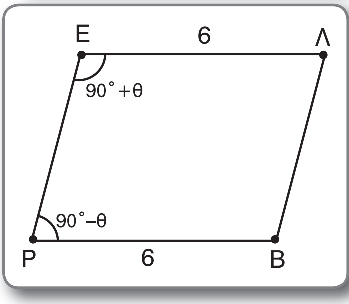
Τα δύο αυτά στοιχεία δεν εξασφαλίζουν ότι το τετράπλευρο ΖΗΝΓ είναι παραλληλόγραμμο, όπως φαίνεται και στο διπλανό τετράπλευρο.



vi) Στο διπλανό τετράπλευρο ΕΡΒΛ ισχύει ότι

$\widehat{E} + \hat{P} = 90^{o} + \hat{\theta} + 90^{o} - \hat{\theta} = 180^{o}$,

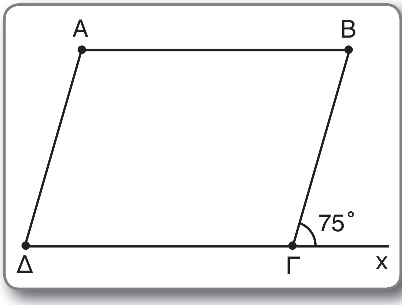
οπότε ΕΛ // ΡΒ, αφού δύο εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές. Συνεπώς στο τετράπλευρο ΕΡΒΛ ισχύει ΕΛ // ΡΒ και ΕΛ = ΡΒ = 6, δηλαδή δύο απέναντι πλευρές είναι ίσες και παράλληλες, οπότε το ΕΡΒΛ είναι παραλληλόγραμμο.



2. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν ισχύει μία από τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

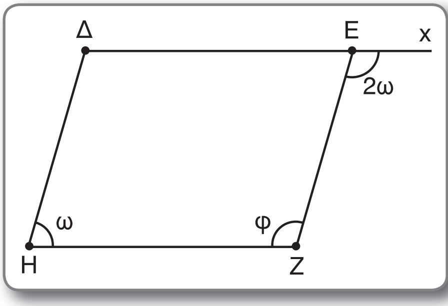
i) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
ii) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
iii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
v) Οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

3. Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, άρα ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ // ΒΓ.



Συνεπώς:
$\widehat{\mathrm{B\Gamma x}} = \widehat{\mathrm{B}}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, που τέμνονται από τη ΒΓ, οπότε $\widehat{\mathrm{B}} = 75^o$.
Επίσης:
$\widehat{\mathrm{B\Gamma\Delta}} = 180^o - \widehat{\mathrm{B\Gamma x}} = 180^o - 75^o = 105^o$.
Τέλος, αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta} = 75^o$ και $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B\Gamma\Delta}} = 105^o$.

4. Αφού το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, άρα ΔΕ // ΗΖ και ΔΗ // ΕΖ.



Συνεπώς:
$\widehat{\mathrm{ZEx}} = \widehat{\mathrm{Z}}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΔΕ, ΗΖ, που τέμνονται από την ΕΖ, οπότε $\widehat{\varphi} = 2\widehat{\omega}$ **(I)**, και $\widehat{\mathrm{H}} + \widehat{\mathrm{Z}} = 180^o$ ως εντός και επί τα αυτά γωνίες των παραλλήλων ΔΗ, ΕΖ, που τέμνονται από τη ΖΗ, οπότε $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180^o$ **(II)**.
Η (II) γίνεται λόγω της (I):

$$2\widehat{\omega} + \widehat{\omega} = 180^o \Leftrightarrow 3\widehat{\omega} = 180^o \Leftrightarrow \widehat{\omega} = \frac{180^o}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\omega} = 60^o, \text{ άρα } \widehat{\varphi} = 2\widehat{\omega} = 2 \cdot 60^o = 120^o.$$

5. **i)** Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και όχι μόνο τις δύο, οπότε η πρόταση είναι λανθασμένη **(Λ)**.

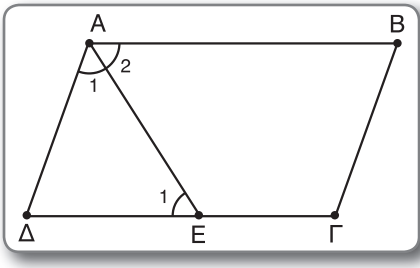
ii) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Εφόσον όλα τα ζεύγη των διαδοχικών γωνιών είναι παραπληρωματικές γωνίες, οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές, άρα έχουμε παράλληλες τις απέναντι πλευρές, οπότε η πρόταση είναι σωστή **(Σ)**.

iii) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και όχι μόνο τις δύο, οπότε η πρόταση είναι λανθασμένη **(Λ)**.

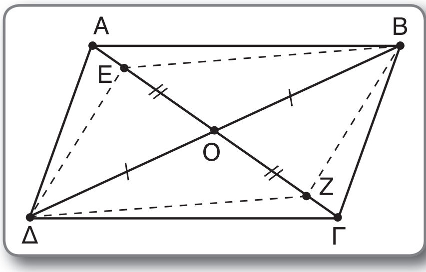
iv) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες και όχι μόνο τις δύο, οπότε η πρόταση είναι λανθασμένη **(Λ)**.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Το ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ **(I)**.
Επίσης, ισχύει ότι $\widehat{A}_2 = \widehat{E}_1$ **(II)** ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, που τέμνονται από το ΑΕ. Από τις (Ι), (ΙΙ) έχουμε $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με ΑΔ = ΔΕ **(III)**.
Τέλος, αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ΑΔ = ΒΓ, άρα από την (ΙΙΙ) βρίσκουμε ότι ΒΓ = ΔΕ.



2. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε ισχύει ότι ΟΒ = ΟΔ **(I)**.
Στο τετράπλευρο ΒΖΔΕ έχουμε ότι ΟΕ = ΟΖ (υπόθεση) και ΟΒ = ΟΔ [από την (Ι)], δηλαδή οι διαγώνιοι διχοτομούνται, άρα το ΒΖΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

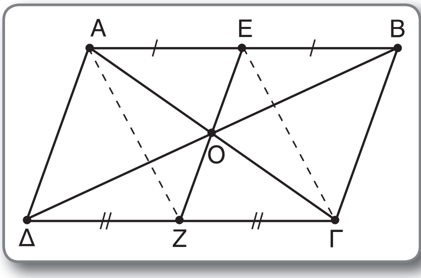


3. **i)** Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΑΒ = ΓΔ **(Ι)** και ΑΒ // ΓΔ.
Το Ε είναι το μέσο του ΑΒ, οπότε:

$$\mathrm{AE} = \mathrm{EB} = \frac{\mathrm{AB}}{2} \ \textbf{(II)}.$$

Το Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, οπότε:

$$\Gamma\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2} \ \textbf{(III)}.$$

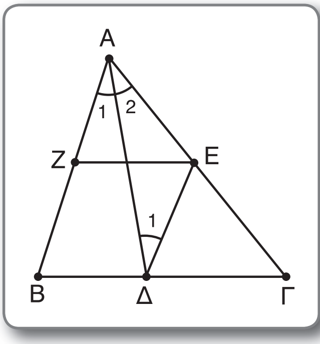


Από τις (Ι), (ΙΙ), (ΙΙΙ) προκύπτει ότι ΑΕ = ΓΖ και, αφού ΑΕ // ΓΖ (ΑΒ // ΓΔ), προκύπτει ότι το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοι ΒΔ, ΑΓ διχοτομούνται στο Ο, δηλαδή το Ο είναι κοινό μέσο των ΒΔ, ΑΓ.
Το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοι ΕΖ, ΑΓ διχοτομούνται, δηλαδή έχουν κοινό μέσο. Αφού το Ο είναι το μέσο του ΑΓ και η ΕΖ έχει μέσο το Ο, άρα τα τμήματα ΒΔ, ΑΓ, ΕΖ συντρέχουν στο Ο.

4. Το ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε:
$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ **(Ι)**.

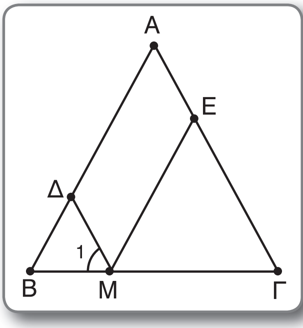
Επίσης, ισχύει ότι $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ **(ΙΙ)** ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ, που τέμνονται από το ΑΔ.
Από τις (Ι), (ΙΙ) προκύπτει ότι:
$\widehat{A}_2 = \widehat{\Delta}_1$, οπότε το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές με ΑΕ = ΕΔ **(ΙΙΙ)**.



Το ΖΕΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, αφού από την υπόθεση έχουμε: ΖΕ // ΒΔ (ΖΕ // ΒΓ) και ΒΖ // ΔΕ (ΑΒ // ΔΕ), οπότε ΕΔ = ΒΖ και από την (ΙΙΙ) βρίσκουμε ότι ΒΖ = ΑΕ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Το τετράπλευρο ΑΕΜΔ είναι παραλληλόγραμμο, αφού από την υπόθεση έχουμε ΑΕ // ΔΜ (ΑΓ // ΔΜ) και ΑΔ // ΕΜ (ΑΒ // ΕΜ), οπότε: ΜΕ = ΑΔ **(I)**.



Αφού το ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ,

ισχύει $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ **(II)**.

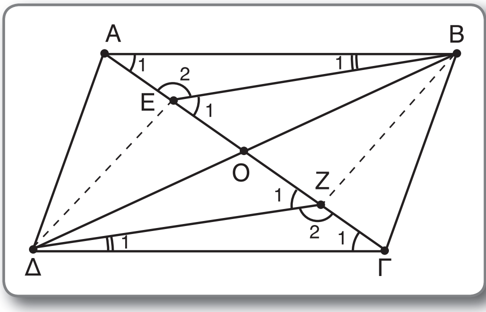
Επίσης, $\widehat{M}_1 = \widehat{\Gamma}$ **(III)**

ως εντός, εκτός και επί αυτά των παραλλήλων ΜΔ, ΑΓ, που τέμνονται από τη ΒΓ.

Από τις (II), (III) έχουμε ότι $\widehat{M}_1 = \widehat{B}$, άρα το τρίγωνο ΜΔΒ είναι ισοσκελές με ΜΔ = ΔΒ **(IV)**.

Συνεπώς $M\Delta + ME \overset{(I),\,(IV)}{=\!=\!=} \Delta B + A\Delta = AB$.

2. Ισχύει $\widehat{E}_1 = \widehat{Z}_1$ **(I)** ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΒΕ, ΔΖ, που τέμνονται από το ΕΖ, και $\widehat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ **(II)** ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, που τέμνονται από το ΑΓ.



Η $\widehat{E}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΕ, οπότε:

$\widehat{E}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 \Leftrightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1 - \widehat{A}_1 \overset{(I),\,(II)}{\Longrightarrow} \widehat{B}_1 = \widehat{Z}_1 - \hat{\Gamma}_1$ **(III)**.

Η $\widehat{Z}_1$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΖΓΔ, οπότε:

$\widehat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \widehat{\Delta}_1 \Leftrightarrow \widehat{\Delta}_1 = \widehat{Z}_1 - \hat{\Gamma}_1 \overset{(III)}{\Longrightarrow} \widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1$ **(IV)**.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΔΖΓ έχουν:

α) $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1$ [από τη (IV)],

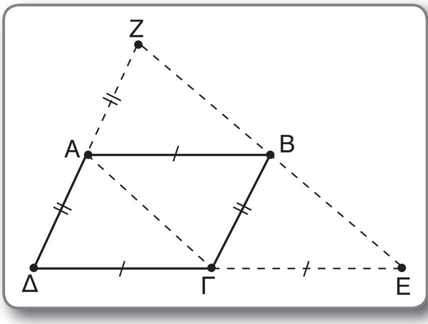
β) ΑΒ = ΓΔ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο),

γ) $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ [από τη (II)],

επομένως από το κριτήριο ΓΠΓ έχουμε $\overset{\Delta}{ABE} = \overset{\Delta}{\Delta Z\Gamma}$, άρα ΒΕ = ΔΖ.

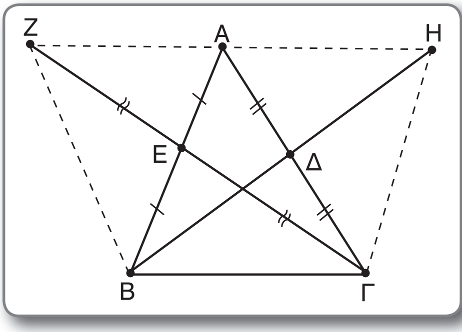
Το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι πλευρές ΒΕ, ΔΖ είναι ίσες και παράλληλες, άρα ΔΕ // ΒΖ.

3. Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΒΓ =// ΑΔ και ΑΒ =// ΓΔ. Αφού ΑΖ = ΒΓ (= ΑΔ) και ΒΓ // ΑΖ (ΒΓ // ΑΔ), έχουμε ότι το ΑΖΒΓ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΖΒ // ΑΓ **(Ι)**. Αφού ΓΕ = ΑΒ (= ΔΓ) και ΓΕ // ΑΒ (ΑΒ // ΓΔ), έχουμε ότι το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, άρα: ΕΒ // ΑΓ **(ΙΙ)**.



Όμως, από το σημείο Β διέρχεται μοναδική παράλληλη προς τη ΒΓ, οπότε από τις (Ι) και (ΙΙ) προκύπτει ότι τα σημεία Ζ, Β, Ε είναι συνευθειακά.

4. Στο τετράπλευρο ΑΖΒΓ ισχύει ότι ΖΕ = ΕΓ (υπόθεση) και ΑΕ = ΕΒ (Ε μέσο του ΑΒ), δηλαδή οι διαγώνιοι ΓΖ, ΑΒ διχοτομούνται, οπότε το ΑΖΒΓ είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει ότι ΑΖ = ΒΓ **(Ι)** και ΑΖ // ΒΓ **(ΙΙ)**.

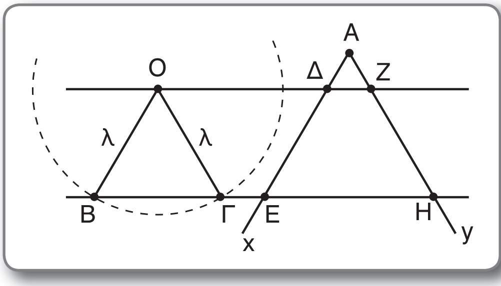


Στο τετράπλευρο ΑΗΓΒ ισχύει ότι ΒΔ = ΔΗ (υπόθεση) και ΑΔ = ΓΔ (Δ μέσο του ΑΓ), δηλαδή οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΗ διχοτομούνται, οπότε το ΑΗΓΒ είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει ότι ΑΗ = ΒΓ **(ΙΙΙ)** και ΑΗ // ΒΓ **(IV)**.

i) Από τις (Ι), (ΙΙΙ) ισχύει ότι ΑΗ = ΑΖ.

ii) Από το σημείο Α διέρχεται μοναδική παράλληλη προς τη ΒΓ, οπότε από τις (ΙΙ), (IV) βρίσκουμε ότι τα σημεία Ζ, Α, Η είναι συνευθειακά.

5. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Ο πάνω στη μία από τις δύο παράλληλες. Με κέντρο το Ο και ακτίνα λ γράφουμε κύκλο που τέμνει την άλλη παράλληλη στα σημεία Β και Γ. Από το σημείο Α φέρνουμε την Αx // ΟΒ, που τέμνει τις παράλληλες στα Δ, Ε, και την Αy // ΟΓ, που τέμνει τις παράλληλες στα Ζ, Η.



Συνεπώς ΟΒ // ΔΕ (Αx // ΟΒ) και ΟΔ // ΒΕ (υπόθεση), άρα το ΟΒΕΔ είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει ότι ΟΒ = ΔΕ = λ **(I)**.
Επίσης, ΟΓ // ΖΗ (Αy // ΟΓ) και ΟΖ // ΓΗ (υπόθεση), άρα το ΟΖΗΓ είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει ότι ΟΓ = ΖΗ = λ **(II)**.
Από τις (I), (II) προκύπτει ότι τα τμήματα ΔΕ, ΖΗ είναι ίσα με λ και ανήκουν σε τέμνουσες των παραλλήλων που διέρχονται από το σημείο Α.

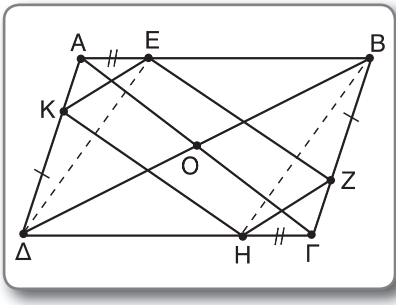
Σύνθετα θέματα

1. **i)** Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΑΒ =// ΓΔ **(I)** και ΑΔ =// ΒΓ **(II)**.
Όμως:

$$\text{ΑΚ} = \text{ΑΔ} - \text{ΚΔ} \overset{\text{(II), (Υ)}}{=\!=\!=} \text{ΒΓ} - \text{ΒΖ} = \text{ΖΓ} \ \textbf{(III)}$$

και

$$\text{ΕΒ} = \text{ΑΒ} - \text{ΑΕ} \overset{\text{(I), (Υ)}}{=\!=\!=} \text{ΓΔ} - \text{ΓΗ} = \text{ΔΗ} \ \textbf{(IV)}.$$



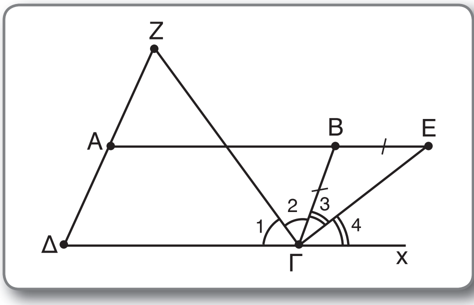
Τα τρίγωνα ΑΚΕ και ΓΖΗ έχουν:
α) ΑΕ = ΓΗ (υπόθεση),
β) ΑΚ = ΖΓ [από την (III)],
γ) $\widehat{\text{Α}} = \widehat{\text{Γ}}$ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο),
άρα από το κριτήριο ΠΓΠ έχουμε ότι $\overset{\Delta}{\text{ΑΚΕ}} = \overset{\Delta}{\text{ΓΖΗ}}$ και ΕΚ = ΖΗ **(V)**.
Τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΔΚΗ έχουν:
α) ΒΖ = ΔΚ (υπόθεση),
β) ΕΒ = ΔΗ [από την (IV)],
γ) $\widehat{\text{Β}} = \widehat{\Delta}$ (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο),
άρα από το κριτήριο ΠΓΠ έχουμε ότι $\overset{\Delta}{\text{ΒΕΖ}} = \overset{\Delta}{\text{ΔΚΗ}}$ και ΕΖ = ΚΗ **(VI)**.
Από τις (V), (VI) έχουμε τις απέναντι πλευρές του ΕΖΗΚ ίσες, άρα το ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο.

ii) Αφού το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ διχοτομούνται και έστω Ο το κοινό τους μέσο.
Επίσης, από τις (I), (IV) έχουμε ότι ΒΕ =// ΔΗ, οπότε το ΒΕΔΗ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοι ΒΔ, ΕΗ διχοτομούνται. Αφού το Ο είναι το μέσο της ΒΔ, θα είναι το μέσο και της ΕΗ, οπότε οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ συντρέχουν.

Επιπλέον, στο ερώτημα (i) αποδείξαμε ότι το ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοι ΕΗ, ΖΚ διχοτομούνται. Όμως, το Ο είναι το μέσο του ΕΗ, οπότε το Ο είναι και το μέσο του ΖΚ, άρα οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ, ΖΚ συντρέχουν.

2. Αφού ΔΖ = ΔΓ (υπόθεση), το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές με

$\widehat{Z} = \widehat{\Gamma}_1$ **(Ι)**.



Επίσης, ΒΕ = ΒΓ (υπόθεση), άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με

$\widehat{E} = \widehat{\Gamma}_3$ **(ΙΙ)**.

Επιπλέον, ισχύουν:

$\widehat{Z} = \widehat{\Gamma}_2$ **(ΙΙΙ)**

ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΖΔ, ΒΓ, που τέμνονται από τη ΖΓ, και

$\widehat{E} = \widehat{\Gamma}_4$ **(IV)**

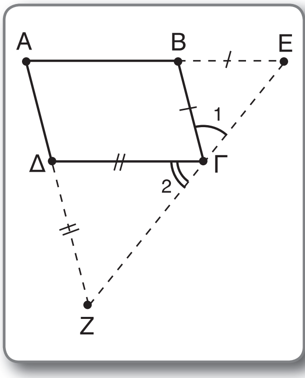
ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ, ΔΓ, που τέμνονται από τη ΓΕ.

Συνεπώς:

από τις (Ι), (ΙΙΙ) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, άρα το ΓΖ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΒ, ενώ από τις (ΙΙ), (IV) προκύπτει ότι $\widehat{\Gamma}_3 = \widehat{\Gamma}_4$, άρα το ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓx.

Επομένως τα ΓΖ, ΓΕ είναι διχοτόμοι των εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών ΒΓΔ, ΒΓx, επομένως τέμνονται κάθετα, άρα ΓΖ ⊥ ΓΕ ή $\widehat{Z\Gamma E} = 90^{\circ}$.

3. Αφού $\Delta Z = \Delta\Gamma$ (υπόθεση), το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές με $\widehat{Z} = \widehat{\Gamma}_2$ **(Ι)**.



Επίσης, ΒΕ = ΒΓ (υπόθεση), άρα το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές με $\widehat{E} = \widehat{\Gamma}_1$ **(ΙΙ)**.

Επιπλέον, η γωνία ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΒΓΕ, οπότε $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{E} + \widehat{\Gamma}_1$ και λόγω της (ΙΙ) γίνεται: $\widehat{AB\Gamma} = 2\widehat{\Gamma}_1 \Leftrightarrow \widehat{\Gamma}_1 = \dfrac{\widehat{AB\Gamma}}{2}$ **(ΙΙΙ)**.

Επίσης, η γωνία ΑΔΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΓΔΖ, οπότε $\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{Ζ} + \widehat{Γ}_2$ και λόγω της (Ι) γίνεται $\widehat{ΑΔΓ} = 2\widehat{Γ}_2 \Leftrightarrow \widehat{Γ}_2 = \dfrac{\widehat{ΑΔΓ}}{2}$ **(IV)**.

Όμως, οι γωνίες ΑΒΓ, ΑΔΓ είναι ίσες ως απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, άρα από τις (ΙΙΙ), (IV) έχουμε:

$\widehat{Γ}_1 = \widehat{Γ}_2 = \dfrac{\widehat{ΑΒΓ}}{2} = \dfrac{\widehat{ΑΔΓ}}{2}$ **(V)**.

Τότε:

$$\widehat{ΖΓΕ} = \widehat{Γ}_2 + \widehat{ΒΓΔ} + \widehat{Γ}_1 \overset{(V)}{=\!=} \frac{\widehat{ΑΒΓ}}{2} + \widehat{ΒΓΔ} + \frac{\widehat{ΑΒΓ}}{2} = \widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΒΓΔ} = 180^{o},$$

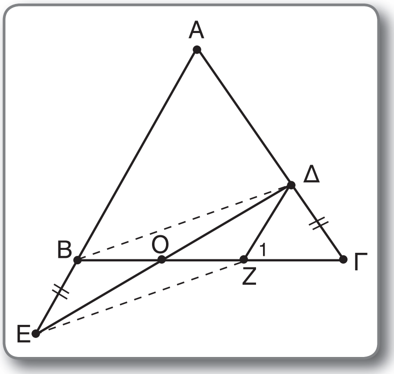
αφού οι γωνίες ΑΒΓ, ΒΓΔ είναι εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ, που τέμνονται από τη ΒΓ, άρα είναι παραπληρωματικές.

Τέλος, αφού $\widehat{ΖΓΕ} = 180^{o}$, τα σημεία Ε, Γ, Ζ είναι συνευθειακά.

4. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, οπότε $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{Γ}$ **(Ι)**.

Φέρνουμε τη ΔΖ // ΑΕ.

Τότε $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{Ζ}_1$ **(ΙΙ)**
ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΔΖ, ΑΕ, που τέμνονται από τη ΒΓ.



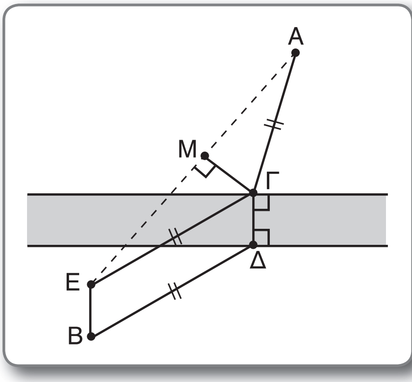
Από τις (Ι), (ΙΙ) προκύπτει ότι $\widehat{Ζ}_1 = \widehat{Γ}$, οπότε το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές με $ΔΖ = ΔΓ$ **(ΙΙΙ)**.

Από την υπόθεση ισχύει $ΒΕ = ΔΓ$, άρα λόγω της (ΙΙΙ) έχουμε $ΒΕ = ΔΖ$.

Συνεπώς ΔΖ =// ΒΕ, οπότε το ΒΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοι διχοτομούνται και το Ο είναι το μέσο του ΔΕ.

Συνεπώς η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.

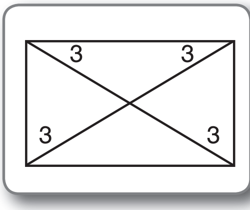
5. Έστω ότι στα σημεία Α και Β είναι τα δύο χωριά. Αναζητούμε τη θέση της γέφυρας (ΓΔ), που θα είναι κάθετη στις όχθες του ποταμού έτσι ώστε:
ΑΓ = ΒΔ **(I)**.
Φέρνουμε το ΒΕ =// ΓΔ, οπότε το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο και ισχύει:
ΒΔ = ΓΕ **(II)**.
Από τις (I), (II) προκύπτει ότι ΓΑ = ΓΕ, οπότε το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.
Συνεπώς η θέση του σημείου Γ προσδιορίζεται από τη μεσοκάθετο του ΑΕ, άρα προσδιορίζεται και η θέση του ΓΔ.



5.3 έως 5.5

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. **i)** Στο διπλανό τετράπλευρο οι διαγώνιοι είναι ίσες και διχοτομούνται, οπότε είναι ορθογώνιο.



Στο διπλανό τετράπλευρο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, ενώ υπάρχει και ορθή γωνία, οπότε είναι ορθογώνιο.