35 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Θεωρία

1. Βασικοί ορισμοί

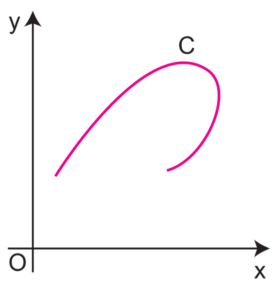
Έστω f μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.

- **Γραφική παράσταση** της f λέγεται το σύνολο των σημείων M(x, y) ενός καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία ισχύει $y = f(x)$.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με $\mathbf{C_f}$. Είναι δηλαδή $C_f = \{M(x, y) \;/\; y = f(x)\}$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ [με δύο μεταβλητές x και y], η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες κάθε σημείου της C_f και δεν επαληθεύεται από κανένα άλλο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης** της f.

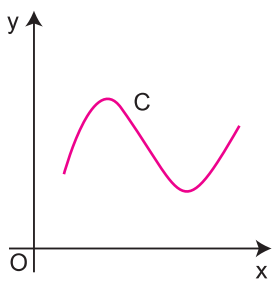
2. Είναι κάθε καμπύλη (σ' ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων xOy) γραφική παράσταση συνάρτησης;

Να βρείτε αν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης (με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y) η καμπύλη που δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

i)

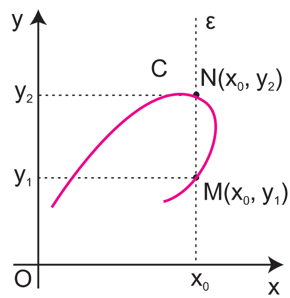


ii)



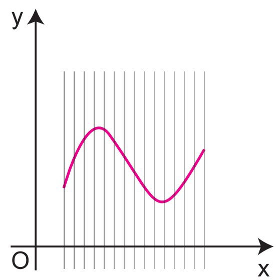
Λύση

i) Παρατηρούμε ότι υπάρχει κατακόρυφη ($//y'y$) ευθεία ε που τέμνει την C σε δύο διαφορετικά σημεία, τα M και N. Θα αποδείξουμε ότι η C δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, εργαζόμενοι με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση f τέτοια, ώστε $C_f = C$ [δηλαδή που να έχει γραφική παράσταση την C].



Αν x_0 είναι η κοινή τετμημένη των M, N και $ψ_1$, $ψ_2$ αντίστοιχα (με $ψ_1 \neq ψ_2$) οι τεταγμένες τους, τότε $f(x_0) = y_1$ [διότι $M(x_0, y_1) \in C_f$] και $f(x_0) = y_2$ [διότι $N(x_0, y_2) \in C_f$]. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί από τον ορισμό της συνάρτησης δεν μπορεί το στοιχείο x_0 του πεδίου ορισμού της f να αντιστοιχίζεται με την f στα δύο διαφορετικά στοιχεία y_1, y_2.

ii) Παρατηρούμε ότι κάθε κατακόρυφη ($//y'y$) ευθεία που τέμνει την C την τέμνει σε ένα μόνο σημείο (δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της C με την ίδια τετμημένη). Έστω A το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ που σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζει την τεταγμένη του (μοναδικού, όπως είδαμε) σημείου της C το οποίο έχει τετμημένη x.



Ορίζεται έτσι μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η C. Άρα η C είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

Μια καμπύλη C σ' ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων xOy είναι γραφική παράσταση συνάρτησης (με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y) αν και μόνο αν κάθε κατακόρυφη ($//y'y$) ευθεία τέμνει την C σε ένα το πολύ σημείο [ή, αλλιώς, αν δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία της C με την ίδια τετμημένη].

[Επομένως η C δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης αν και μόνο αν υπάρχει κατακόρυφη ευθεία η οποία έχει με την C δύο (ή περισσότερα) κοινά σημεία, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχουν στην C δύο (ή περισσότερα) σημεία με την ίδια τετμημένη.]

Λυμένες ασκήσεις

Πότε ένα σημείο $N(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $[N(x_0, y_0) \in C_f \Leftrightarrow f(x_0) = y_0]$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \sqrt{x-3}$. Να εξετάσετε αν τα σημεία $N_1(12, 5)$, $N_2(4, 10)$ και $N_3(2, α)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f.

Λύση

Ένα σημείο $N(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα $f(x_0) = y_0$.

- Έχουμε:

$$f(12) = 2 + \sqrt{12-3} = 5 = y_{N_1}$$

Επομένως το N_1 ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

- Έχουμε:

$$f(4) = 2 + \sqrt{4-3} = 3 \neq 10 = y_{N_2}$$

Επομένως το N_2 δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

- Η τετμημένη $x = 2$ του σημείου N_3 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού $A = [3, +\infty)$ της f, επομένως το N_3 δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

4. Να βρείτε για ποια τιμή του α το σημείο $N(2, -3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx^3 + 5$.

Λύση

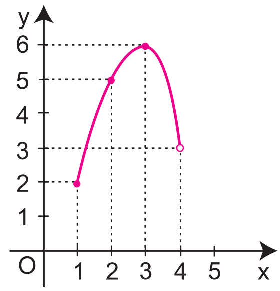
Το σημείο $N(2, -3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f μόνο αν ισχύει η ισότητα $f(2) = -3$, δηλαδή $α \cdot 2^3 + 5 = -3$, δηλαδή $8α = -8$, δηλαδή $α = -1$.

Εύρεση τιμής $f(x_0)$ και πεδίο ορισμού συνάρτησης f από την C_f

5. **Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε:**

i) τις τιμές f(2) και f(6), εφόσον υπάρχουν.

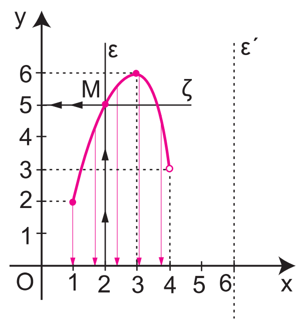
ii) το πεδίο ορισμού της f.



Λύση

i) Γενικά, το $f(x_0)$ είναι η τεταγμένη εκείνου του σημείου της C_f το οποίο έχει τετμημένη x_0 (εφόσον υπάρχει τέτοιο σημείο).

- Από τη θέση x = 2 του άξονα x΄x [δηλαδή από το σημείο (2, 0)] φέρνουμε ευθεία ε // y΄y η οποία τέμνει την C_f στο σημείο Μ. Από το Μ φέρνουμε ευθεία ζ // x΄x η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στη θέση 5 [δηλαδή στο σημείο (0, 5)]. Άρα f(2) = 5.



- Από τη θέση x = 6 του άξονα x΄x φέρνουμε ευθεία ε΄ // y΄y η οποία, όπως παρατηρούμε, δεν τέμνει την C_f. Άρα δεν ορίζεται τιμή της f για x = 6.

ii) Το πεδίο ορισμού Α μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f. Έτσι, για να βρούμε το Α, θεωρούμε την προβολή της C_f (δηλαδή κάθε σημείου της C_f) στον άξονα x΄x. Το σύνολο των τετμημένων όλων των σημείων που προκύπτουν είναι το πεδίο ορισμού της f.

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \le x < 4\} = [1, 4)$.

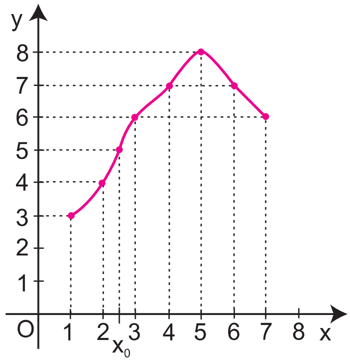
Πώς εξετάζουμε γραφικά αν ένας αριθμός κ είναι τιμή μιας συνάρτησης f – Γραφική επίλυση εξίσωσης της μορφής f(x) = κ

6. **Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα.**

i) Να εξετάσετε αν είναι τιμή της f ο αριθμός:

α) 4 β) 5 γ) 6 δ) 2

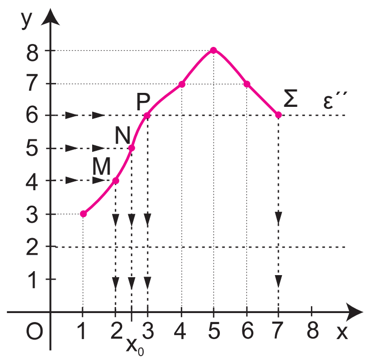
ii) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 6 [δηλαδή να βρείτε όλα τα x για τα οποία ισχύει f(x) = 6].



Λύση

i) Ο αριθμός y_0 είναι τιμή της f αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ με $f(x_0) = y_0$, δηλαδή αν υπάρχει σημείο της C_f με τεταγμένη y_0.

α) Από τη θέση 4 του άξονα y΄y [δηλαδή από το σημείο (0, 4)] φέρνουμε ευθεία ε // x΄x η οποία, όπως παρατηρούμε στο σχήμα, τέμνει την C_f στο σημείο Μ. Άρα το 4 είναι τιμή της f [συγκεκριμένα ισχύει f(2) = 4].



β) Από τη θέση 5 του άξονα y΄y φέρνουμε ευθεία ε΄ // x΄x η οποία τέμνει την C_f στο σημείο Ν. Άρα το 5 είναι τιμή της f [αν x_0 είναι η τετμημένη του Ν, τότε $f(x_0) = 5$].

γ) Από τη θέση 6 του άξονα y΄y φέρνουμε ευθεία ε΄΄ // x΄x η οποία τέμνει την C_f στα σημεία Ρ και Σ. Άρα το 6 είναι τιμή της f [και ισχύει f(3) = f(7) = 6].

δ) Από τη θέση 2 του άξονα y΄y φέρνουμε ευθεία // x΄x η οποία, όπως βλέπουμε στο σχήμα, δεν τέμνει την C_f. Άρα το 2 δεν είναι τιμή της f.

ii) Οι λύσεις της εξίσωσης f(x) = κ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f τα οποία έχουν τεταγμένη ίση με κ.

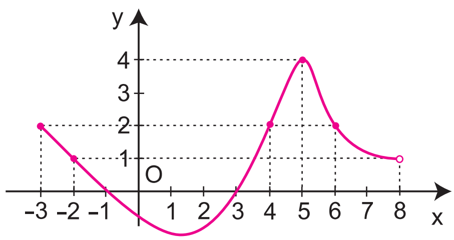
Αν φέρουμε από τη θέση 6 του άξονα y΄y ευθεία // x΄x, παρατηρούμε ότι αυτή τέμνει την C_f στα σημεία Ρ και Σ (και μόνο σ' αυτά). Οι τετμημένες των Ρ και Σ είναι 3 και 7 αντίστοιχα. Έτσι, η εξίσωση f(x) = 6 έχει λύσεις τους αριθμούς 3 και 7 (και μόνο αυτούς).

Γραφική επίλυση ανίσωσης της μορφής $f(x) \gtrless κ$

7. Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $f(x) > 0$ ii) $f(x) > 2$

iii) $f(x) \geq 2$ iv) $f(x) < 0$



Λύση

Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > κ$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f τα οποία έχουν τεταγμένη μεγαλύτερη από κ. Έτσι, για να λύσουμε γραφικά την ανίσωση $f(x) > κ$:

- Από τη θέση κ του άξονα y΄y [δηλαδή από το σημείο (0, κ)] φέρνουμε ευθεία ε // x΄x.
- Θεωρούμε τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από την ε.
- Προβάλλουμε αυτά τα τμήματα (δηλαδή κάθε σημείο τους) στον άξονα x΄x.
- Το σύνολο των τετμημένων των σημείων που προκύπτουν είναι το ζητούμενο σύνολο λύσεων της ανίσωσης $f(x) > κ$.

Ανάλογα ισχύουν για ανίσωση της μορφής $f(x) < κ$.

Ακολουθώντας την παραπάνω μεθοδολογία, βρίσκουμε ότι:

i) η ανίσωση $f(x) > 0$ αληθεύει αν και μόνο αν:
$-3 \leq x < -1$ ή $3 < x < 8$ [$f(x) > 0 \Leftrightarrow (-3 \leq x < -1$ ή $3 < x < 8)$]

ii) $f(x) > 2 \Leftrightarrow 4 < x < 6$

iii) $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x = -3$ ή $4 < x < 6$

iv) $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

Γραφική επίλυση εξίσωσης της μορφής f(x) = g(x) και ανίσωσης της μορφής f(x) ≷ g(x)

8. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Να λύσετε:

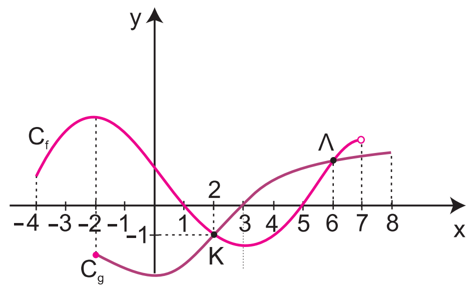
i) την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

ii) την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

iii) τη «διπλή ανίσωση»:

α) $f(x) > 0 > g(x)$

β) $f(x) < 0 < g(x)$



Λύση

i) Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g.

- Τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα Κ, Λ.
- Οι τετμημένες των Κ και Λ είναι 2 και 6 αντίστοιχα.
- Άρα οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι αριθμοί 2 και 6.

ii) Βρίσκουμε κάθε σημείο $M(x, f(x))$ της C_f που βρίσκεται πάνω από το σημείο $N(x, g(x))$ της C_g που έχει την ίδια τετμημένη (δηλαδή βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη ευθεία) με το Ν. Οι τετμημένες όλων αυτών των σημείων Μ είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$.

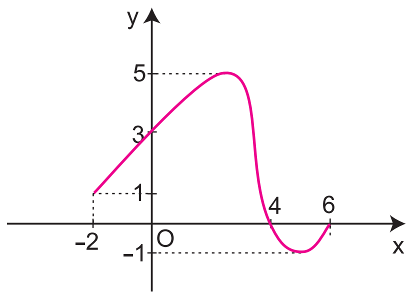
Έχουμε: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow -2 \leq x < 2$ ή $6 < x < 7$.

iii) α) $f(x) > 0 > g(x) \Leftrightarrow -2 \leq x < 1$.

β) $f(x) < 0 < g(x) \Leftrightarrow 3 < x < 5$.

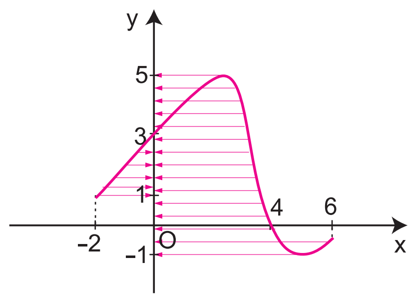
Εύρεση συνόλου τιμών συνάρτησης f από την C_f

9. Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.



Λύση

Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f.
Έτσι, για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f, φέρνουμε την προβολή της C_f (δηλαδή κάθε σημείου της C_f) στον άξονα y΄y. Το σύνολο των τεταγμένων των σημείων που προκύπτουν είναι το σύνολο τιμών της f.



Το ζητούμενο σύνολο τιμών είναι το $[-1, 5]$.

Κοινά σημεία γραφικής παράστασης συνάρτησης: i) με τον άξονα y΄y ii) με τον άξονα x΄x

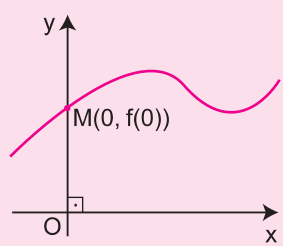
Αν C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A και $M(x, y)$ ένα σημείο του επιπέδου, τότε:

- (Το Μ είναι κοινό σημείο της C και του άξονα y΄y) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in C \\ M \in y'y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(0) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow M(0, f(0))$ (εφόσον $0 \in A$)

Συμπεραίνουμε ότι:



→ Αν $0 \in A$, τότε η C έχει με τον άξονα $y'y$ ένα μόνο κοινό σημείο, το $M(0, f(0))$.

→ Αν $0 \notin A$, τότε η C δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

Έτσι η C έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$ [όπως και με οποιαδήποτε κατακόρυφη (// $y'y$) ευθεία].

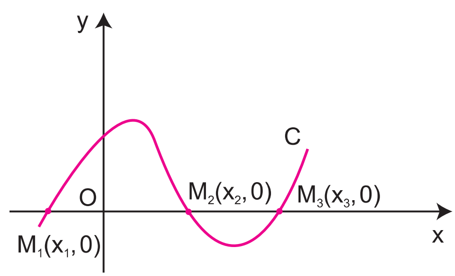
Για να βρούμε το κοινό σημείο της C με τον άξονα $y'y$, βάζουμε στον τύπο της f όπου x το 0 (εφόσον $0 \in A$) και βρίσκουμε το $f(0)$. Το ζητούμενο κοινό σημείο είναι το $M(0, f(0))$.

- (Το M είναι κοινό σημείο της C και του άξονα $x'x$) $\Leftrightarrow \begin{cases} M \in C \\ M \in x'x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M(x, 0) \text{ με } f(x) = 0$$

Έτσι το $M(x, y)$ είναι κοινό σημείο της C και του $x'x$ αν και μόνο αν $y = 0$ και το x είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C με τον άξονα $x'x$, **λύνουμε** πρώτα **την εξίσωση $f(x) = 0$**. Τα ζητούμενα κοινά σημεία είναι τα σημεία της μορφής $M(x, 0)$, όπου x ρίζα της (1) (δεχόμαστε μόνο τιμές του x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f).



$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2$ ή $x = x_3$

10. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -3(x + 1)(x - 2)$:
i) με τον άξονα $y'y$ ii) με τον άξονα $x'x$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Σχόλιο για το i)	**Σχόλιο για το ii)**
Βάζουμε στην εξίσωση $y = f(x)$ όπου x το 0, δηλαδή βρίσκουμε το $f(0)$ (αφού $0 \in A = \mathbb{R}$). [Ο αριθμός που θα βρούμε είναι η τεταγμένη του ζητούμενου σημείου.]	Βάζουμε στην εξίσωση $y = f(x)$ όπου y το 0 και λύνουμε ως προς x. [Οι αριθμοί που θα βρούμε είναι οι τετμημένες των ζητούμενων σημείων.]

i) • Έχουμε:

$f(0) = -3(0+1)(0-2) =$
$= -3 \cdot 1 \cdot (-2) = 6$

• Το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0, 6)$.

ii) • Έχουμε:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1 = 0 \text{ ή } x-2 = 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 2)$

• Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $M_1(-1, 0)$ και $M_2(2, 0)$.

11. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x-2}$ με τους άξονες.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της f. Η f ορίζεται στο x μόνο αν $x - 2 \geq 0$, δηλαδή μόνο αν $x \geq 2$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [2, +\infty)$.

Με τον άξονα x΄x

Βάζουμε στην εξίσωση $y = f(x)$ όπου y το 0 και λύνουμε ως προς x. Έχουμε:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-9)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9 = 0 \text{ ή } \sqrt{x-2} = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 = 9 \text{ ή } x - 2 = 0) \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = 2)$.

Όμως, επειδή το x ανήκει στο πεδίο ορισμού $A = [2, +\infty)$, δεκτές είναι μόνο οι τιμές $x = 2$ και $x = 3$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $K(2, 0)$ και $\Lambda(3, 0)$.

Με τον άξονα y΄y

Επειδή ο αριθμός $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα y΄y.

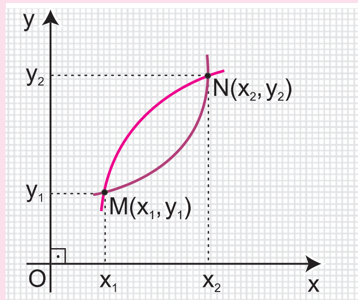
Κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων

Έστω f και g δύο συναρτήσεις, C_f και C_g οι γραφικές τους παραστάσεις αντίστοιχα και έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.
Για ένα σημείο M(x, y) έχουμε:

$$(M \text{ κοινό σημείο των } C_f, C_g) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in C_f \\ M \in C_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ y = f(x) \end{cases}$$

Έτσι, **για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f, C_g**, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους, δηλαδή το σύστημα: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

Στην πράξη συνήθως **λύνουμε πρώτα την εξίσωση f(x) = g(x). Οι λύσεις (ρίζες) αυτής της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των ζητούμενων κοινών σημείων**. Για κάθε λύση x που θα βρούμε, βρίσκουμε την τεταγμένη y του αντίστοιχου σημείου βάζοντας το x στον τύπο της f ή της g (το ίδιο είναι), δηλαδή από τη σχέση y = f(x) (ή y = g(x)).



$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2$

$y_1 = f(x_1) = g(x_1)$

$y_2 = f(x_2) = g(x_2)$

12. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2x^2 - x + 4$ και $g(x) = x^2 + 2x + 4$.

Λύση

Λύνουμε την εξίσωση f(x) = g(x). Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής αποτελούν τις τετμημένες των ζητούμενων κοινών σημείων. Έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x^2 - x - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ή $x - 3 = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 0$ ή $x = 3)$.

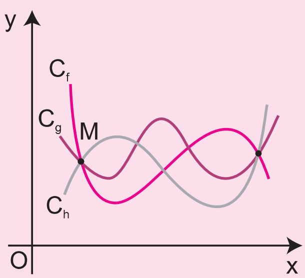
Άρα έχουμε δύο κοινά σημεία:

- Το ένα, έστω Λ, έχει τετμημένη $x = 0$. Για να βρούμε και την τεταγμένη του Λ, βάζουμε την τετμημένη του $x = 0$ στον τύπο της f ή της g (το ίδιο είναι). Προκύπτει $y = f(0) = g(0) = 4$, άρα το Λ έχει συντεταγμένες (0, 4).
- Το άλλο, έστω Ν, έχει τετμημένη $x = 3$. Για να βρούμε και την τεταγμένη του Ν, βάζουμε την τετμημένη του $x = 3$ στον τύπο της f ή της g. Προκύπτει $y = f(3) = g(3) = 19$, άρα το Ν είναι το σημείο Ν(3, 19).

Κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων τριών συναρτήσεων

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g, C_h τριών συναρτήσεων f, g, h αντίστοιχα, πρέπει να λύσουμε

το σύστημα: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$



Για να γίνει αυτό, συνήθως:

- Λύνουμε πρώτα την ευκολότερη από τις εξισώσεις $f(x) = g(x)$, $g(x) = h(x)$, $h(x) = f(x)$, έστω, π.χ., την $g(x) = h(x)$. Βρίσκουμε έτσι τα κοινά σημεία των C_g, C_h.
- Για κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ από αυτά που θα βρούμε, εξετάζουμε αν η C_f διέρχεται από το M (δηλαδή αν $f(x_0) = y_0$). Αν ναι, τότε αυτό είναι κοινό σημείο των C_f, C_g, C_h.

13. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 3x - 2$ και $h(x) = 4x$.

Λύση

Λύνουμε πρώτα την εξίσωση $g(x) = h(x)$ και έχουμε: $g(x) = h(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 4x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$.
Για $x = -1$ έχουμε $g(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4$ $[= h(-1)]$.
Για $x = 2$ έχουμε $g(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 8$ $[= h(2)]$.

Έτσι, οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν κοινά σημεία τα M(–1, –4) και N(2, 8) και μόνο αυτά. Εξετάζουμε τώρα αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται (περνάει) από το M ή το N. Έχουμε:

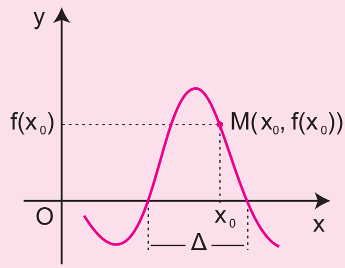
- $f(-1) = (-1)^3 = -1 \neq -4$, άρα η C_f δε διέρχεται από το M.
- $f(2) = 2^3 = 8\ [= g(2) = h(2)]$, άρα η C_f διέρχεται από το N.

Τελικά, οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων f, g, h έχουν μοναδικό κοινό σημείο το N(2, 8).

Σχετική θέση γραφικής παράστασης συνάρτησης και άξονα x΄x

Λέμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x:

- **σ' ένα σημείο x_0 (ή για $x = x_0$)**, όταν το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x, δηλαδή **όταν $f(x_0) > 0$**.
- **σ' ένα σύνολο Δ**, όταν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.



Αντίστοιχα, για τις εκφράσεις «κάτω από τον άξονα x΄x» ($f(x) < 0$), «από τον άξονα x΄x και πάνω» ($f(x) \geq 0$), «από τον άξονα x΄x και κάτω» ($f(x) \leq 0$).

14. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f(x) = -3(x+2)(x-5)$ βρίσκεται:

i) πάνω από τον άξονα x΄x **ii) κάτω από τον άξονα x΄x**

iii) από τον άξονα x΄x και πάνω **iv) από τον άξονα x΄x και κάτω**

Λύση

Οι ρίζες και το πρόσημο της παράστασης $-3(x+2)(x-5)$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-3(x+2)(x-5)$		−	0	+	0	−	

i) $f(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 5$.
Η C βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x στο διάστημα (2, 5).

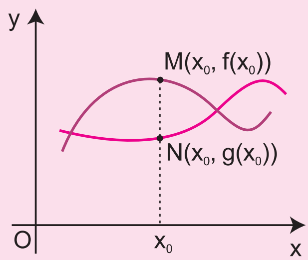
ii) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 5$.
Η C βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(5, +\infty)$.

iii) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5$.
Η C βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και πάνω στο διάστημα $[-2, 5]$.

iv) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 5$.
Η C βρίσκεται από τον άξονα $x'x$ και κάτω στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[5, +\infty)$.

Σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με γραφικές παραστάσεις C_f, C_g αντίστοιχα.



Λέμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g:

- στο σημείο x_0 (ή για $x = x_0$) όταν το σημείο της C_f με τετμημένη x_0 [δηλαδή $M(x_0, f(x_0))$] βρίσκεται πάνω από το σημείο της C_g με τετμημένη x_0 [δηλαδή το $N(x_0, g(x_0))$], δηλαδή όταν $f(x_0) > g(x_0)$.
- στο σύνολο Δ όταν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

Ανάλογα και για τις εκφράσεις: C_f κάτω από την C_g ($f(x) < g(x)$), C_f από την C_g και πάνω ($f(x) \geq g(x)$), C_f από την C_g και κάτω ($f(x) \leq g(x)$).

15. Να βρείτε σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 9 - x^2$.

Λύση

Λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$ και έχουμε:

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 > 9 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 > 9 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 > 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow (x < -2$ ή $x > 2)$.

Έτσι, τα ζητούμενα διαστήματα είναι τα $(-\infty, -2)$ και $(2, +\infty)$.

Σχέση μεταξύ της C_f και της: i) C_{-f} ii) $C_{|f|}$

Έστω f μια συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή x και πεδίο ορισμού A.

- Η C_{-f}, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f(x)$, αποτελείται από τα σημεία της μορφής $N(x, -f(x))$. Όμως τα σημεία της μορφής $N(x, -f(x))$ είναι τα συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ της C_f ως προς τον άξονα x΄x. Έτσι:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f(x)$ είναι η συμμετρική γραμμή της C_f ως προς τον άξονα y΄y.

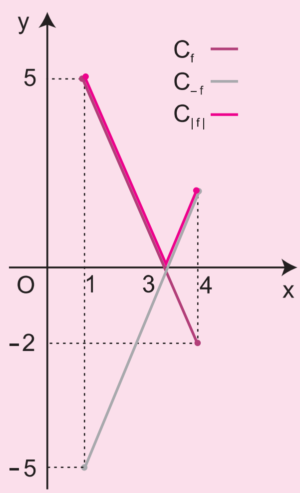
- Ισχύει: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$

  Η $C_{|f|}$, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f(x)|$, αποτελείται από τα σημεία της μορφής:

$$N(x, |f(x)|) \equiv \begin{cases} N(x, f(x)), & \text{αν } f(x) \geq 0 \text{ [δηλαδή αν το } (x, f(x)) \text{ βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω]} \\ N(x, -f(x)), & \text{αν } f(x) < 0 \text{ [δηλαδή αν το } (x, f(x)) \text{ βρίσκεται κάτω από τον x΄x]} \end{cases}$$

Επομένως:

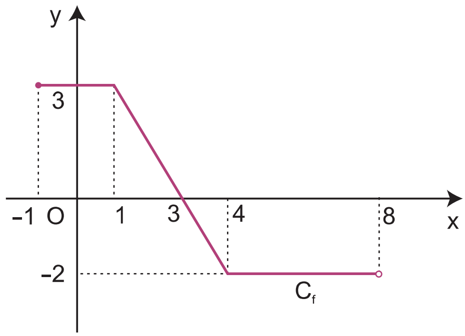
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\lvert f(x)\rvert$ αποτελείται: • από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται από τον άξονα x΄x και πάνω. • από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x των τμημάτων της C_f τα οποία βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.



16. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

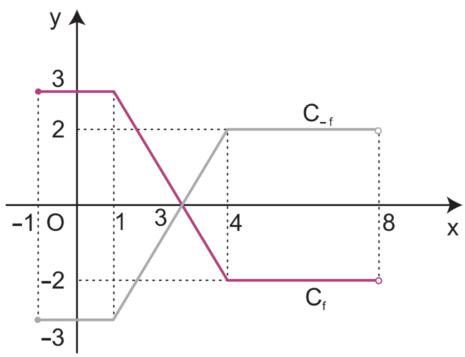
i) $g(x) = -f(x)$

ii) $h(x) = |f(x)|$



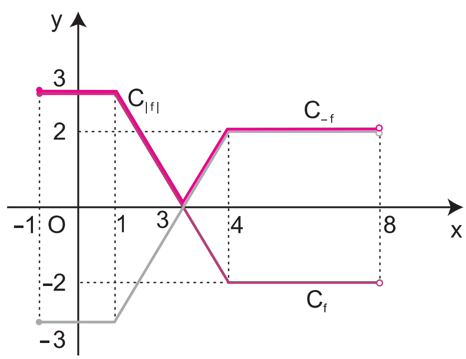
Λύση

i) Η C_g είναι η συμμετρική γραμμή της C_f ως προς τον άξονα x′x.

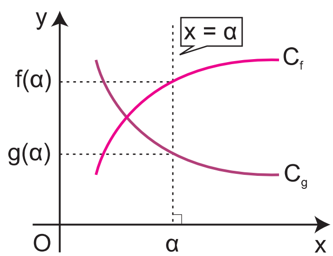


ii) Η C_h αποτελείται:

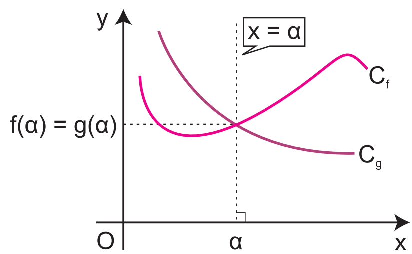
- από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται από τον άξονα x′x και πάνω.
- από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x′x τμήματα των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x′x.



Πότε οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων τέμνονται πάνω στην (κατακόρυφη) ευθεία x = α



- $f(\alpha) \neq g(\alpha)$.
- Οι C_f, C_g δεν τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = \alpha$.



- $f(\alpha) = g(\alpha)$.
- Οι C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = \alpha$.

Οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g τέμνονται πάνω στην (κατακόρυφη) ευθεία $x = \alpha$ αν και μόνο αν $f(\alpha) = g(\alpha)$.

17. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \dfrac{x+\lambda}{x-4}$ και $g(x) = \lambda x^2 + x$ τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$.

Λύση

Έχουμε $f(3) = \dfrac{3+\lambda}{3-4} = \dfrac{3+\lambda}{-1} = -3-\lambda$ και $g(3) = \lambda \cdot 3^2 + 3 = 9\lambda + 3$. Έτσι:

(Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$) $\Leftrightarrow$

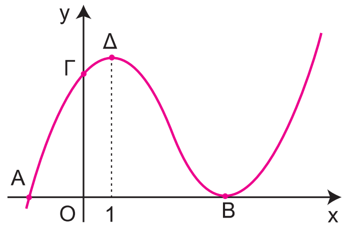
$\Leftrightarrow f(3) = g(3) \Leftrightarrow -3-\lambda = 9\lambda + 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\lambda - 9\lambda = 3 + 3 \Leftrightarrow -10\lambda = 6 \Leftrightarrow$

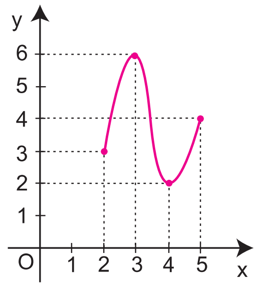
$\Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{6}{10} \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{3}{5}$.

γ Ερωτήσεις κατανόησης

18. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x + 1)(x - 5)^2$. Να συμπληρωθούν οι συντεταγμένες που λείπουν:
Α(..., ...), Β(..., ...), Γ(..., ...), Δ(..., ...).



19. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού Α. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).
i) $3 \in A$ **ii)** $6 \in A$ **iii)** $1 \in f(A)$
iv) $A = (2, 5)$ **v)** $f(A) = [3, 6]$
vi) $f(A) = [2, 6]$ **vii)** $4 = f(2)$ **viii)** $f(4) = 2$



20. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).

	Σ	Λ
i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x(x+2)}{x}$ διέρχεται από το σημείο (0, 2).	❑	❑
ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$ είναι ο άξονας $y'y$.	❑	❑
iii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει κάθε ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ σ' ένα το πολύ σημείο.	❑	❑
iv) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει κάθε ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ σ' ένα το πολύ σημείο.	❑	❑
v) Αν λ είναι η τεταγμένη και μ η τετμημένη ενός σημείου της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, τότε ισχύει $f(\lambda) = \mu$.	❑	❑

21. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει σ' ένα το πολύ σημείο:
Α. τον άξονα $x'x$ **Β.** τον άξονα $y'y$ **Γ.** κάθε ευθεία

22. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν είναι δυνατό να περιλαμβάνει δύο σημεία με:

Α. άνισες τετμημένες και ίσες τεταγμένες

Β. ίσες τετμημένες και άνισες τεταγμένες

Γ. άνισες τετμημένες και άνισες τεταγμένες

23. Δύο διαφορετικά σημεία δεν μπορεί να ανήκουν ταυτόχρονα στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, όταν αυτά είναι συμμετρικά ως προς:

Α. τον άξονα $y'y$ **Β.** τον άξονα $x'x$ **Γ.** το σημείο $O(0, 0)$

24. Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να είναι:

Α. ένα σημείο **Β.** μία ευθεία **Γ.** ένας κύκλος **Δ.** ένα ημικύκλιο

25. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α τέμνει τον άξονα $y'y$:

Α. πάντα **Β.** μόνο αν $0 \in A$ **Γ.** μόνο αν $f(0) = 0$

26. Αν η εξίσωση $f(x-3) = x + 4$ έχει ως λύση την $x = 5$, τότε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο:

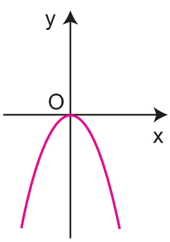
Α. (5, 9) **Β.** (9, 2) **Γ.** (2, 9) **Δ.** (3, 7)

27. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για τη συνάρτηση f ισχύει $f(8-x) = x^2 + 1$, τότε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο:

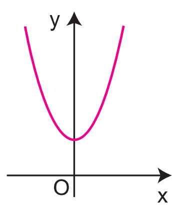
Α. (8, 1) **Β.** (5, 1) **Γ.** (10, 6) **Δ.** (2, 5)

28. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4$ είναι η:

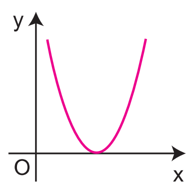
Α.



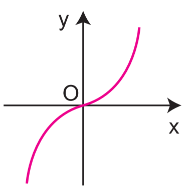
Β.



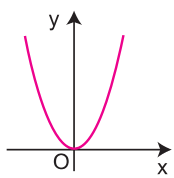
Γ.



Δ.

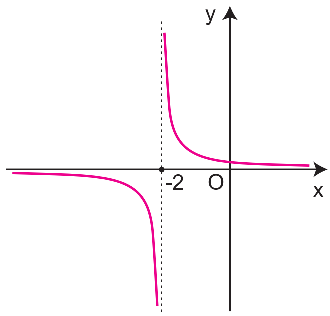


Ε.

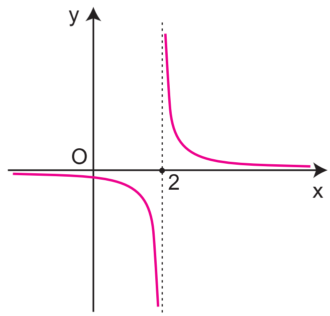


29. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{|x+2|}$ είναι η:

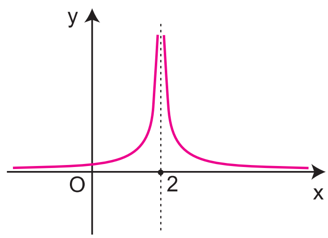
Α.



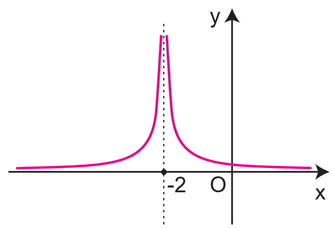
Β.



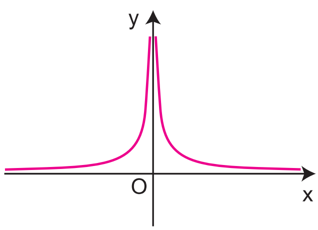
Γ.



Δ.

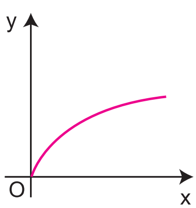


Ε.

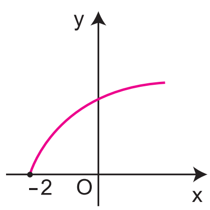


30. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-2}$ είναι η:

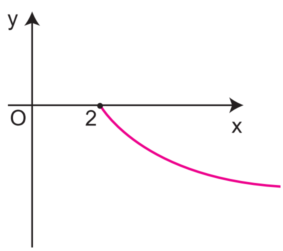
Α.



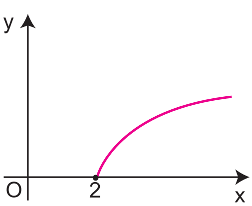
Β.



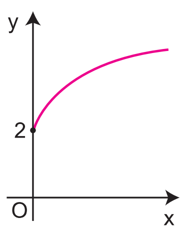
Γ.



Δ.

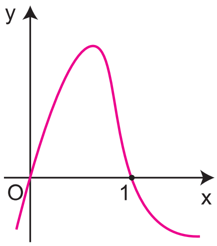


Ε.

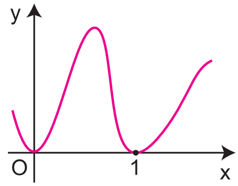


31. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x(x-1)^2$ είναι η:

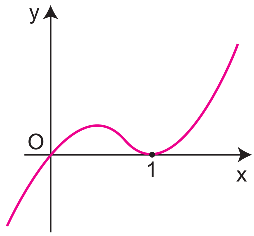
Α.



Β.

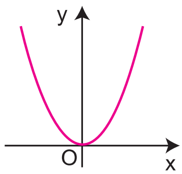


Γ.

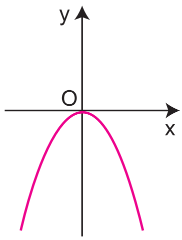


32. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 + x^2$ είναι η:

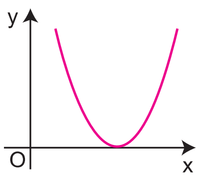
Α.



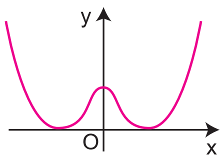
Β.



Γ.

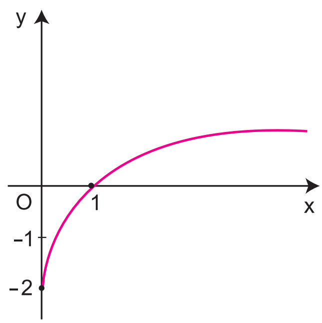


Δ.



33. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha + \beta\sqrt{x}$. Οι τιμές των α και β είναι αντίστοιχα:

Α. -2 και 1 **Β.** 1 και -2 **Γ.** -2 και 2
Δ. 2 και -2 **Ε.** 0 και 1



34. Για κάθε συνάρτηση της στήλης Α, να βρείτε τη γραφική της παράσταση από τη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α

i) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ •

ii) $g(x) = \sqrt{-x}$ •

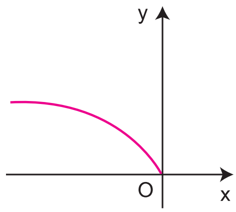
iii) $h(x) = x - x^3$ •

iv) $t(x) = x^4 - 1$ •

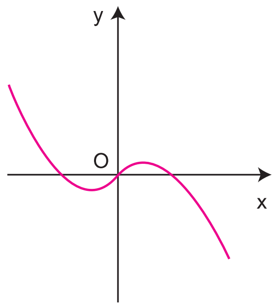
v) $\delta(x) = x$ •

ΣΤΗΛΗ Β

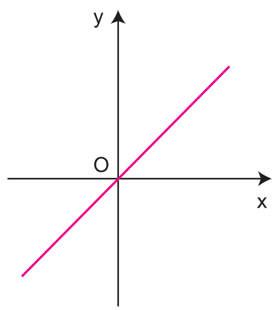
• **α)**



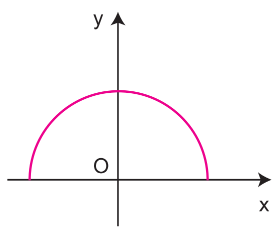
• **β)**



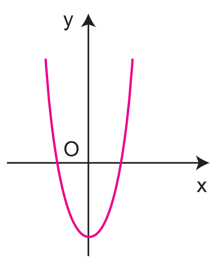
• **γ)**



• **δ)**



• **ε)**



Ασκήσεις για λύση

$N(x_0, y_0) \in C_f$

35. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2x$ διέρχεται από το σημείο:
i) $N(-1, 1)$ **ii)** $M(-2, 5)$ **iii)** $O(0, 0)$ **iv)** $K(\sqrt{2}, 0)$ **v)** $\Lambda(\sqrt{5}, \sqrt{45})$

36. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$:
$\Gamma(-1, 2)$, $\Delta(-1, 4)$, $E(3, 0)$, $K(0, 3)$, $\Lambda(0, 0)$, $M(\alpha, \alpha^2 - 3\alpha)$,
$N(-2\alpha, 6\alpha + 4\alpha^2)$, $P(-\alpha, 3\alpha - 4)$

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \sqrt{5 - x}$ και έστω C η γραφική της παράσταση.
i) Να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το σημείο της C το οποίο έχει τετμημένη ίση με:
α) 1 **β)** 5 **γ)** – 4 **δ)** 0 **ε)** 6
ii) Να εξετάσετε αν ανήκει στην C το σημείο:
α) $P(4, 18)$ **β)** $\Sigma(-11, 125)$ **γ)** $O(0, 0)$
iii) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της C με αρνητική τεταγμένη.

38. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x^4 - 1)^6 + 5\sqrt{x - 2}$ διέρχεται από το σημείο:
i) $M(1, \alpha)$ **ii)** $N(\beta, -2)$ **iii)** $K(\gamma, 0)$

39. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x + 15$ που έχει:
i) τετμημένη ίση με -3 **ii)** τεταγμένη ίση 3
iii) αντίθετες συντεταγμένες **iv)** ίσες συντεταγμένες

40. Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων M και N της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 + 6$ που έχουν τεταγμένη ίση με 54.

41. Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων M και N της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 2$ που έχουν τετμημένες -1 και 0 αντίστοιχα.

42. Τα σημεία M και N ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 + 5$. Το M έχει τετμημένη -1 και το N τεταγμένη 5. Να βρείτε την απόσταση (MN).

43. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σημείο $N(-\alpha, 3\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x - x^2$.

44. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x$ διέρχεται από τα σημεία $\Lambda(2, 6)$ και $N(-1, 3)$.

45. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν:

i) $f(x) = \frac{\kappa}{x}$ και $A(-1, 2)$ **ii)** $f(x) = 2x^2 - 1$ και $A(7, \kappa)$ **iii)** $f(x) = 2x^2 - 1$ και $A(\kappa, 7)$

iv) $f(x) = \kappa|x - 1| - 2\left|x - \frac{1}{x}\right|$ και $A(-1, -2)$ **v)** $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{\kappa}$ και $A(0, 2)$

vi) $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{\kappa - 2}$ και $A(0, 0)$

46. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σημείο $A(-2, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \begin{cases} 2x - \lambda, & \text{αν } |x| < 1 \\ x + 3\lambda, & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$

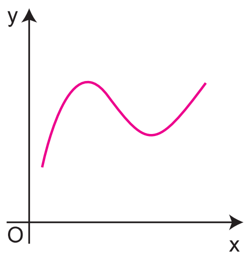
47. Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + 2$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, 3)$, τότε διέρχεται και από το σημείο $N(2, -6)$.

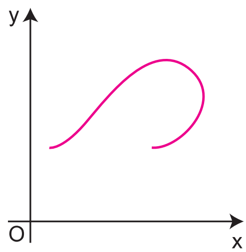
48. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης

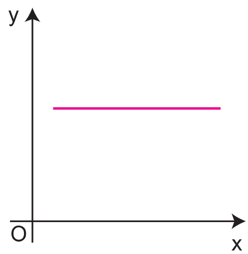
$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 1 \\ 0{,}5 \cdot x, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ διέρχεται από το σημείο $N(\alpha, 3)$.

Εξαγωγή συμπερασμάτων από γραφική παράσταση – Γραφική επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων

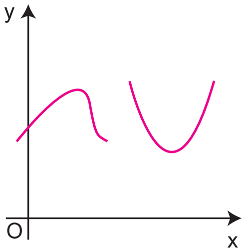
49. Ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y);

i)


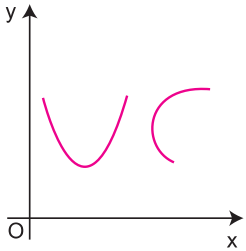
ii)


iii)


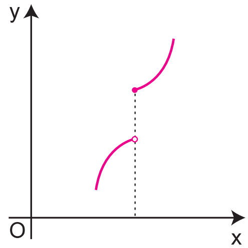
iv)



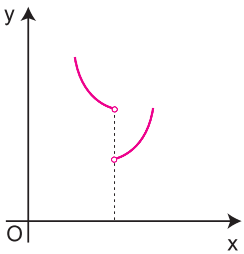
v)



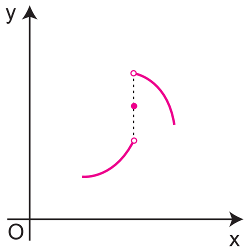
vi)



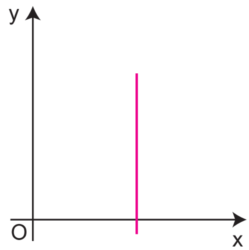
vii)



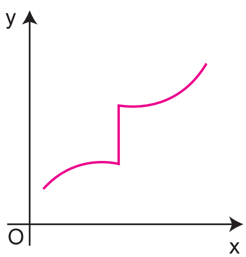
viii)



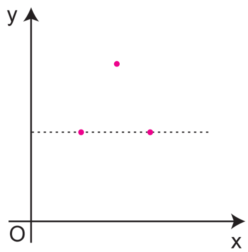
ix)



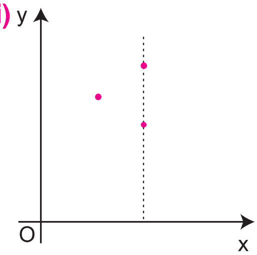
x)



xi)

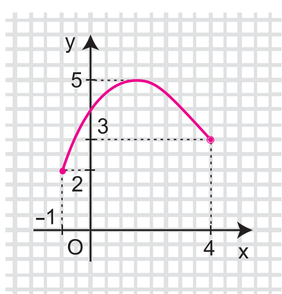


xii)

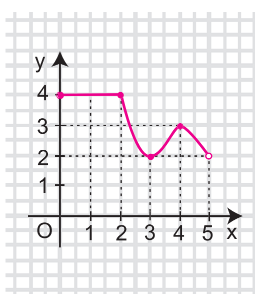


50. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f με γραφική παράσταση:

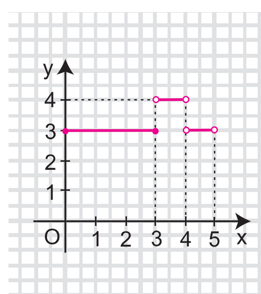
i)



ii)

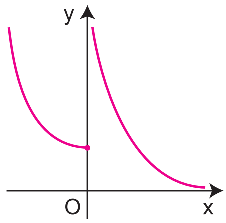


iii)

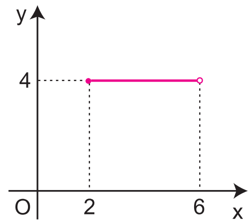


51. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών της συνάρτησης (με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y) που φαίνεται στο σχήμα:

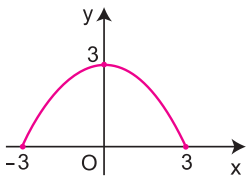
i)



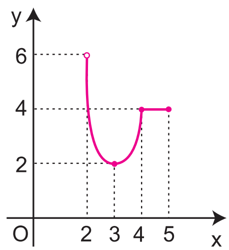
ii)



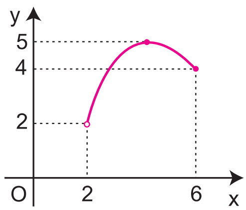
iii)



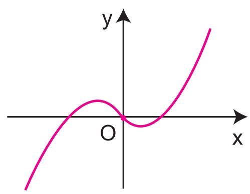
iv)



v)



vi)



52. Στο σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f. Να βρείτε:

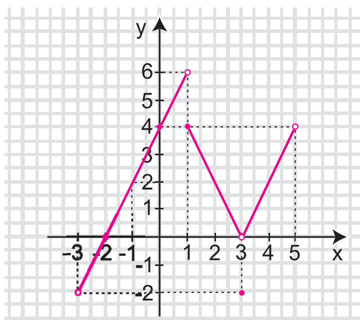
i) τις τιμές f(–2), f(–1), f(0), f(1), f(3)

ii) τις τιμές του x για τις οποίες f(x) = 4

iii) το πεδίο ορισμού της f

iv) τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x

v) το σύνολο τιμών της f



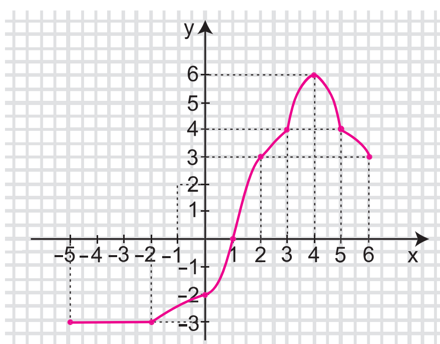
53. Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα.

i) Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

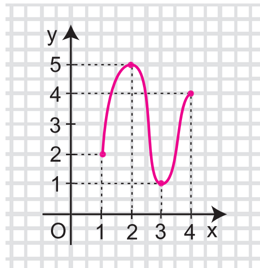
β) το σύνολο τιμών της f

γ) τους αριθμούς f(0), f(3) και f(8) (αν υπάρχουν)



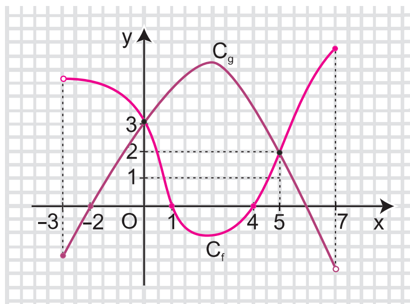
ii) Να λύσετε:
α) τις εξισώσεις $f(x) = 0$, $f(x) = -3$ και $f(x) = -5$
β) τις ανισώσεις $f(x) < f(5)$, $f(x) \geq 6$ και $3 \leq f(x) \leq 4$
γ) την εξίσωση $f(x) \cdot (f(x) - 1) = 12$
δ) την ανίσωση $f^2(x) < 4f(x)$

54. Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε:



i) το σύνολο τιμών της f
ii) τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = \lambda$:
α) έχει μία τουλάχιστον ρίζα
β) έχει μία ακριβώς ρίζα
γ) είναι αδύνατη
iii) τον μικρότερο θετικό ακέραιο λ για τον οποίο η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη

55. Στο σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα.



α) Να βρείτε:
i) τα πεδία ορισμού των f και g
ii) τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες
iii) τα κοινά σημεία της C_g με τους άξονες
iv) τα κοινά σημεία των C_f, C_g

β) Να βρείτε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει:
i) $f(x) \cdot g(x) = 0$ **ii)** $f(x) \geq g(x)$ **iii)** $0 < f(x) \leq g(x)$ **iv)** $f(x) \cdot g(x) \geq 0$
v) $f(x) \cdot g(x) < 0$

Εύρεση κοινών σημείων – σχετικής θέσης γραφικών παραστάσεων

56. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες όταν:

i) $f(x) = \dfrac{2x + 6}{5}$ **ii)** $f(x) = 3x^2 + 5$ **iii)** $f(x) = |x - 1| - |x + 2|$
iv) $f(x) = 20 - 4x^2$ **v)** $f(x) = 3(x + 1)(x - 4)(x - 5)$ **vi)** $f(x) = 3 - |x - 3|$
vii) $f(x) = x^3 - x$ **viii)** $f(x) = x$ **ix)** $f(x) = -2$

57. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες:

i) $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ **ii)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x}$

iii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{|x + 1| - 2}$ **iv)** $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

v) $f(x) = x^2 - 7|x| + 12$ **vi)** $f(x) = x^6 + 8x^3$

58. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες:

i) $f(x) = (x^2 - 2x - 8)\sqrt{3 - x}$ **ii)** $f(x) = \big(|x - 2| - |2x - 6|\big)(4x^2 - 1)$

iii) $f(x) = \big(|5 - 3x| - 8\big)\big(x^2 - |x|\big)$ **iv)** $f(x) = \big(|x - 3| - 4\big)\big(\sqrt{x - 2} - 3\big)$

59. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες αν:

i) $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{-x - 1}$ **ii)** $f(x) = 5|x + 1| + 2|x - 3| + 4$ **iii)** $f(x) = x + |x|$

60. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 9$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα:
i) $y'y$ **ii)** $x'x$

61. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες όταν:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{αν } x < 0 \\ 4x - 8, & \text{αν } 0 \le x < 2 \end{cases}$ **ii)** $f(x) = \begin{cases} 2x - 10, & \text{αν } x > 3 \\ 3x + 6, & \text{αν } |x| = 2 \\ x^2 - 9, & \text{αν } x < -2 \end{cases}$

62. Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(3, 0)$ και μόνο. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = (3x - 6)\big(2f^3(x) + 5f(x)\big)$.

63. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ και $\Gamma(0, 4)$ και μόνο. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x)} \cdot \dfrac{4f^2(x) + 3}{2x - 6}$.

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + 3x - 5$. Να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της f.

ii) τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

65. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2|x^2-9| + \sqrt{|x^2+3x|}$ με τους άξονες.

66. Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + (x+\alpha)^2$ τέμνει τον άξονα $x'x$, τότε τον τέμνει στο σημείο $O(0, 0)$.

67. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \left(\sqrt{x} + \alpha\right)^2 + \left(\sqrt{x} - \beta\right)^2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 0$. Αν επιπλέον το Μ έχει τετμημένη 0, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 0$.

68. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αν:

i) $f(x) = 2x + 6$ **ii)** $f(x) = 2{,}45$ **iii)** $f(x) = |x-1| - 1$

69. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 4x$ βρίσκεται:

i) πάνω από τον άξονα $x'x$ **ii)** από τον άξονα $x'x$ και πάνω

iii) κάτω από τον άξονα $x'x$ **iv)** από τον άξονα $x'x$ και κάτω

70. Αν $f(x) = (x + 2 - x^2)\sqrt{|x-1| - 2}$, να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της f.

ii) τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα: **α)** $x'x$ **β)** $y'y$

iii) τα διαστήματα του x στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

71. Αν $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{\sqrt{4 - |x|}}$, να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της f.

ii) τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα: **α)** $x'x$ **β)** $y'y$

iii) τα διαστήματα του x στα οποία η C_f βρίσκεται:

α) πάνω από τον άξονα $x'x$ **β)** από τον άξονα $x'x$ και πάνω

γ) κάτω από τον άξονα $x'x$ **δ)** από τον άξονα $x'x$ και κάτω

72. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g όταν:

i) $f(x) = x^3 + 1$ και $g(x) = x(x+1)$ **ii)** $f(x) = 8x^2 - 2x$ και $g(x) = 3$

iii) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 4}{x + 2}$ και $g(x) = 2x + 1$ **iv)** $f(x) = |x - 2| + x$ και $g(x) = x + 5$

v) $f(x) = x^2 + 6x$ και $g(x) = -x^2$ **vi)** $f(x) = |x|$ και $g(x) = x$

73. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2$.

74. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g όταν:

i) $f(x) = x^2 - 3$ και $g(x) = -x^2 + x$ **ii)** $f(x) = \dfrac{2}{x}$ και $g(x) = \dfrac{x}{8}$

75. Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = |x|$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται:

i) πάνω από την C_g **ii)** από την C_g και πάνω

iii) κάτω από την C_g **iv)** από την C_g και κάτω

76. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2|x| + x^3$ και $g(x) = x^3 + 8$.

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η C_g βρίσκεται:

α) πάνω από την C_f **β)** κάτω από τον άξονα x΄x

77. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = |x| + x$ και $g(x) = x + 3$.

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η C_f βρίσκεται:

α) πάνω από την C_g **β)** πάνω από τον άξονα x΄x

Οι C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = x_0$

78. Να βρείτε για ποιες τιμές του $α \in \mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = αx^3$ και $g(x) = \dfrac{6}{x} + 2α$ τέμνονται πάνω:

i) στην ευθεία $x = 2$ **ii)** στην ευθεία $x = -1$

79. Να βρείτε για ποιες τιμές του $λ \in \mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3α - \sqrt{x + 4}$ και $g(x) = -αx^5 + 10$ τέμνονται πάνω στον άξονα y΄y.

80. Να βρείτε για ποιες τιμές του $α, β \in \mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \dfrac{α}{x - 2} + β - 1$ και $g(x) = β\sqrt{x} - α$ τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 4$ και πάνω στον άξονα x΄x.

81. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x - \kappa + 1$ τέμνει:

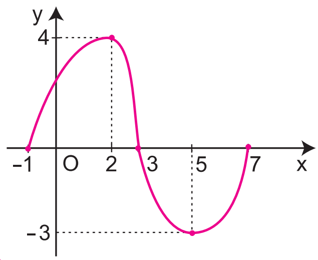
i) τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη -3.

ii) τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 4.

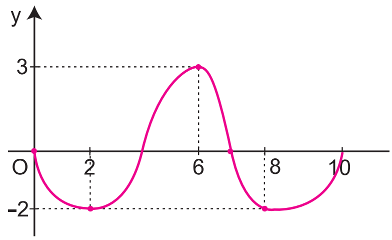
Σχεδίαση της C_{-f} και της $C_{|f|}$, δεδομένης της C_f

82. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Στο ίδιο σχήμα να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ και της συνάρτησης $|f|$.

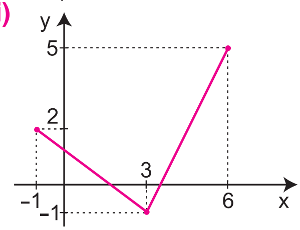
i)



ii)



iii)



Διάφορες επιπλέον ασκήσεις

83. Αν το σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{5 - 3x}{3}$, να αποδείξετε ότι και το σημείο Ν(β, α) ανήκει στην C.

84. Αν το σημείο Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$, να αποδείξετε ότι και το σημείο Ν(β, α) ανήκει στην C.

85. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - (\lambda + 1)x + 2$ και $g(x) = \mu x^2 - 7x + 8$.
Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο (1, 0) και η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο (2, −10), να βρείτε:

i) τις τιμές των λ και μ.

ii) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g.

iii) για ποιες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2(\alpha^2 + \beta^2)x^2 - 4(3\alpha - \beta)x + 15$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1, –5). Να βρείτε:

i) τις τιμές των α και β.

ii) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

iii) τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(x - 3) \cdot f(x) \leq 0$.

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 3\alpha} - \dfrac{4}{x - \alpha}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Ν(0, 1). Να βρείτε:

i) την τιμή του α.

ii) το πεδίο ορισμού της f.

iii) τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

iv) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq 0$.

88. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} |3x - 2| + \alpha, & \text{αν } x < 2 \\ x^2 + \beta x - 3, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$

της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από τα σημεία (–1, 4) και (4, 5). Να βρείτε:

i) τις τιμές των α και β και το πεδίο ορισμού της f.

ii) τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

iii) τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $f(x) \geq 0$.

89. Έστω Α και Β τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x + 2|^3$ και Ο η αρχή των αξόνων. Να υπολογίσετε:

i) το μήκος (ΑΒ) **ii)** το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ

90. Έστω Μ και Ν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x + 1)^2$ τέμνει τους άξονες. Να υπολογίσετε:

i) το μήκος (ΜΝ).

ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ (όπου Ο η αρχή των αξόνων).

iii) το μήκος του ύψους ΟΚ του τριγώνου ΟΜΝ.

91. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ένα ημικύκλιο C κέντρου Ο(0, 0) και ακτίνας ρ = 3.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Κ, Λ και Τ.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση της οποίας γραφική παράσταση είναι το ημικύκλιο C.

iii) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Μ και Ν του C ισχύει (ΜΝ) ≤ 6.