ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βοήθημα που κρατάς στα χέρια σου περιέχει:

- **Αναλυτικές λύσεις όλων των ασκήσεων του νέου σχολικού βιβλίου**, με τις απαραίτητες υπενθυμίσεις αλλά και μεθοδολογίες που περιλαμβάνονται στη θεωρία προηγούμενων τάξεων και χρειάζονται εδώ. Αυτό, με σκοπό να μην υπάρχουν κωλύματα και κενά κατά τη διάρκεια της μελέτης σου.
- **Κριτήρια (αυτο)αξιολόγησης** για κάθε ενότητα χωριστά, αλλά και συγκεντρωτικά στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Αυτά έχουν δημιουργηθεί με μοναδικό γνώμονα το τι ακριβώς χρειάζεται να γνωρίζεις τόσο για τις γραπτές εξετάσεις τον Ιούνιο όσο και για να αποκτήσεις κυρίως τα θεμέλια της μαθηματικής γνώσης που θα σου χρειαστούν στο μέλλον.
- **Δείγματα διαγωνισμάτων** αντίστοιχα με αυτά που συνήθως ζητούνται στις γραπτές δοκιμασίες του σχολείου.
- **Περίληψη της θεωρίας** με τονισμό των σημείων που παραδοσιακά δυσκολεύουν.
- **Απαντήσεις και υποδείξεις** των κριτηρίων αξιολόγησης, και τέλος
- **Ευρετήριο όρων** αλλά και χρήσιμες **διευθύνσεις στο διαδίκτυο** με δραστηριότητες και εκπαιδευτικό υλικό που αξιοποιούν τις νέες τεχνολογίες.

Το βοήθημα αυτό έχει σκοπό να σου ανοίξει τον δρόμο της γνώσης για τα μαθηματικά και όχι να σε περιορίσει σε έτοιμα πράγματα και στην απλή χρήση τους.

Κατά τη διάρκεια της συγγραφής του δεν υπήρξε ούτε στιγμή η ιδέα να δημιουργηθεί ένα «λυσάρι» με μορφή γρήγορης και μασημένης τροφής. Αντίθετα, χρησιμοποιώντας την πολύχρονη πείρα μας τόσο από τις φροντιστηριακές όσο και από τις σχολικές αίθουσες, προσπαθήσαμε να δώσουμε τις λύσεις των ασκήσεων που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο με τέτοιον τρόπο, ώστε **να σε προκαλούμε διαρκώς να δοκιμάσεις να λύσεις με τις δικές σου δυνάμεις την επόμενη άσκηση**.

Για σένα, που είσαι τώρα μαθητής ή μαθήτρια της Β′ τάξης του Γυμνασίου, το βιβλίο αυτό θα αποτελέσει ένα ισχυρό εργαλείο. Θα σε βοηθήσει στη φετινή σου προσπάθεια, που στόχο θα έχει να επεκτείνεις τις γνώσεις σου στηριζόμενος ή στηριζόμενη σε έννοιες και πράξεις που έμαθες στην προηγούμενη τάξη, αλλά και τοποθετώντας τες μέσα σε καινούρια πλαίσια. Ταυτόχρονα, θα σου δώσει τη δυνατότητα να πατήσεις με στέρεο βήμα στον κάπως πιο εξελιγμένο τρόπο θεμελίωσης ορισμένων από τις γνώσεις σου· γιατί πολλά από αυτά που μέχρι τώρα γνώριζες «πρακτικά», φέτος –ακόμη πιο έντονα απ' ό,τι πέρυσι– θα διαπιστώσεις ότι έχουν και τη λογική, τη θεωρητική τους εξήγηση και απόδειξη, πράγμα που θα πρέπει σιγά σιγά να το εντάξεις στον τρόπο σκέψης σου και στον τρόπο που θα αντιμετωπίζεις τα μαθηματικά προβλήματα.

Ιούνιος 2007

Οι συγγραφείς

Μιχάλης Τουρλάκης, Ιορδάνης Χριστοδούλου
Καθηγητές Μαθηματικών – 3ου Γυμνασίου
Αγ. Βαρβάρας «*Αντώνης Σαμαράκης*».

Ματθαίος Τσιλπιρίδης
Καθηγητής Μαθηματικών –
2ου Τοσιτσείου Αρσακείου Λυκείου Εκάλης.
(mtsilp@gmail.com)

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

4 ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Β′ ΜΕΡΟΣ

1 ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

3 ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ

Κριτήρια αξιολόγησης

ΜΕΡΟΣ Α′
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Εξισώσεις – Ανισώσεις
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Πραγματικοί αριθμοί
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Συναρτήσεις
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Περιγραφική Στατιστική

ΜΕΡΟΣ Β′
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Τριγωνομετρία – Διανύσματα
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Μέτρηση κύκλου
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών

ΜΕΡΟΣ Α′

Α1 Α.1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α του παρακάτω πίνακα με ένα στοιχείο της στήλης Β.

Α	Β
α. $-3x + 7x - 5x$	i) $9x$
β. $3x - 7x - 5x$	ii) x
γ. $3x - 7x + 5x$	iii) $-9x$
δ. $-3x + 7x + 5x$	iv) $-x$

2. Για κάθε αλγεβρική παράσταση της 1ης στήλης του παρακάτω πίνακα δίνονται τρεις απαντήσεις Α, Β, Γ, από τις οποίες μία μόνο είναι σωστή. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	Α	Β	Γ
α) $4α - α + 7α$	$12α$	$4α$	$10α$
β) $2x + 3x - x$	$6x$	$4x$	$-3x$
γ) $-9ω - 3ω + 2ω$	$14ω$	$10ω$	$-10ω$
δ) $x - x - x$	$-x$	$-2x$	x

3. Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τα παρακάτω:

α) Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2.
β) Την περίμετρο ενός τετραγώνου.
γ) Τον όγκο ενός κύβου.
δ) Την περίμετρο ενός ορθογωνίου με μήκος διπλάσιο από το πλάτος του.

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4x - 2x + 7x - 8x$.
β) $2x + 3y - x - 5y$.
γ) $x + 3y + (2x - 2y)$.
δ) $y - (2x - 5y) - (4x + 2y)$.

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$x - (2y + 3x) - (4x - y)$ αν $x = 1$ και $y = -3$.

Α2 Α.1.2 Εξισώσεις α′ βαθμού (1)

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

		Σ	Λ
α)	Η εξίσωση $-2x = 6$ έχει ρίζα τον αριθμό -3.	☐	☐
β)	Η εξίσωση $0x = 5$ είναι ταυτότητα.	☐	☐
γ)	Η εξίσωση $2x - 2x = 3$ είναι αδύνατη.	☐	☐
δ)	Η εξίσωση $x - x = 0$ είναι ταυτότητα.	☐	☐
ε)	Η ρίζα της εξίσωσης $-x + 3 = 9$ είναι ο αριθμός -6.	☐	☐
στ)	Οι εξισώσεις $x + 2 = 1$ και $4x - 5x = -1$ έχουν για λύση τον ίδιο αριθμό.	☐	☐

2. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι λύση της εξίσωσης:

α) $3x + 5 = 20$ $\qquad x = 5.$

β) $-\frac{1}{3}x = 6$ $\qquad x = 18.$

γ) $6x + 5 = 2x - 19$ $\qquad x = -6.$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x + 2 = 2x - 6.$

β) $3(x + 4) = 14 + 3x.$

γ) $2(x + 1) = 2x + 2.$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x-2}{3} - \frac{3(x-1)}{2} = \frac{x+1}{6}.$

β) $\frac{x+4}{3} - \frac{1}{5}(x-4) = 2 + \frac{3x-1}{5}.$

A3 Α.1.2 Εξισώσεις α′ βαθμού (2)

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

A	B
α) $2x = -4$	i) Αόριστη
β) $-5x = -15$	ii) 1
γ) $x + 2 = x - 1$	iii) Αδύνατη
δ) $\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$	iv) -2
ε) $x + 1 = 1 + x$	v) 3

2. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 4 είναι λύση της εξίσωσης:

$$\frac{3x-14}{12} + \frac{3x-2}{4} = \frac{2x-1}{3}.$$

3. Να βρείτε την τιμή του x, για να είναι Α = Β, όπου:
$A = 2(3x-1) - (2x-1)$ και
$B = 3(3x-5)$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{2x-1}{15} - \dfrac{1}{5} = 2 + \dfrac{x-2}{3}.$

β) $\dfrac{4-5x}{12} - \dfrac{3(x-1)}{2} = 2x - 6.$

A4 Α.1.3 Επίλυση τύπων
Α.1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων (1)

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

	Σ	Λ
α) Ο τύπος $F = m \cdot \alpha$, αν λυθεί ως προς α, γίνεται $\alpha = \dfrac{F}{m}$.	☐	☐
β) Ο τύπος $L = 2\pi\rho$ είναι λυμένος ως προς ρ.	☐	☐

B.2.1

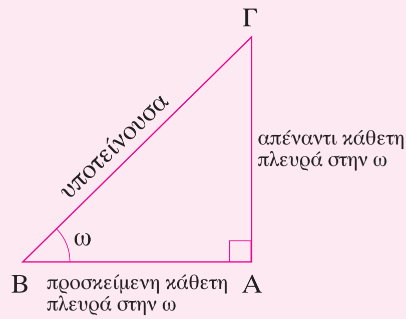
Εφαπτομένη οξείας γωνίας

ΘΕΩΡΙΑ

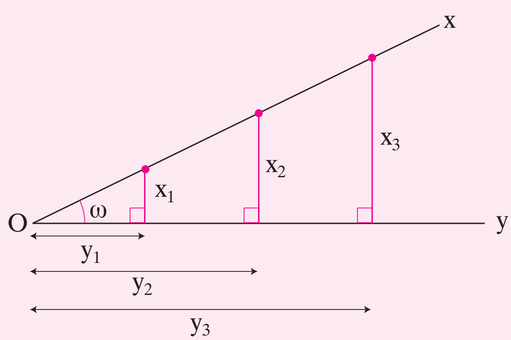
Χρειάζεται να ξέρεις...

- Για κάθε οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της ω τον λόγο της **απέναντι κάθετης** πλευράς προς την **προσκείμενη κάθετη** πλευρά. Δηλαδη:

$$εφω = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$



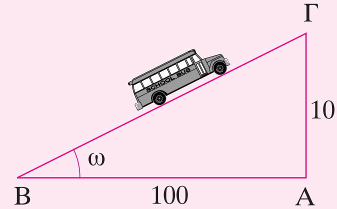
- Για να βρούμε την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας $x\hat{O}y = ω$, παίρνουμε σημεία πάνω στην πλευρά Ox και βρίσκουμε τις αποστάσεις τους x_1, x_2, x_3, ... από την Oy. Για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται, η τιμή του λόγου που ορίζει την εφω είναι σταθερή. Δηλαδή:



$$εφω = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = ...$$

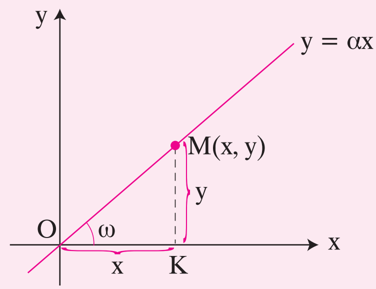
- Η τιμή της εφω χρησιμοποιείται για να περιγράψει την **κλίση** μίας ευθείας.

Παράδειγμα 1ο: Η κλίση του δρόμου ΒΓ είναι 10% $= \frac{10}{100} =$ εφω, δηλαδή για κάθε 100 m οριζόντιας μετατόπισης ΑΒ ανεβαίνουμε σε ύψος ΑΓ, 10 m.



Παράδειγμα 2ο: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΜ είναι:

εφω $= \frac{MK}{OK} = \frac{y}{x} = \alpha$, δηλαδή η εφω εκφράζει την κλίση α της ευθείας με τύπο $y = \alpha x$.

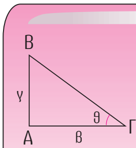


Ερωτησεισ Κατανοησησ

1 Η σωστή απάντηση είναι η **Γ**, γιατί:

$$\text{εφθ} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \frac{75}{100}.$$

Θυμήσου



Ορισμός εφαπτομένης

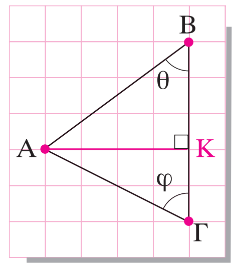
$$\text{εφθ} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}$$

άρα εφθ $= \frac{\gamma}{\beta}$.

2 **α)** Η σωστή απάντηση είναι η **Β**, γιατί από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ παρατηρώ ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΒΚ}} = \frac{4}{3}.$$

β) Η σωστή απάντηση είναι η **Δ**, γιατί από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΓ είναι $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\text{ΑΚ}}{\text{ΚΓ}} = \frac{4}{2} = 2$.



3 Εργαζόμαστε στα τρίγωνα ΑΚΔ, ΔΚΓ, ΓΛΒ και ΑΛΒ. Τότε:

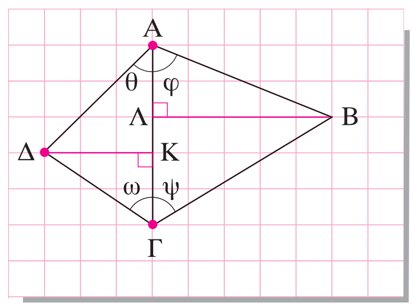
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\text{ΔΚ}}{\text{ΑΚ}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Δούλεψε ανάλογα και θα βρεις:

$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{5}{2}$, $\varepsilon\varphi\psi = \frac{5}{3}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{2}$,

οπότε θα έχουμε την αντιστοιχία:

$\boldsymbol{\theta \to 1}$, $\boldsymbol{\varphi \to \frac{5}{2}}$, $\boldsymbol{\omega \to \frac{3}{2}}$ και $\boldsymbol{\psi \to \frac{5}{3}}$.

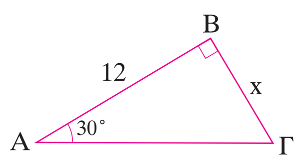


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **α)** Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της εφαπτομένης, οπότε θα έχουμε:

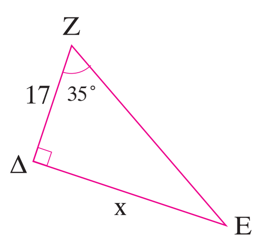
$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{x}{12} \text{ ή (χιαστί)}$$

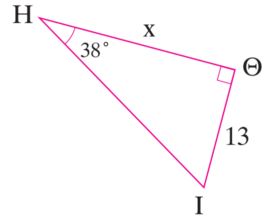
$x = 12 \cdot \varepsilon\varphi 30^\circ = 12 \cdot 0{,}577 =$ **6,92**.



β) $\varepsilon\varphi 35^\circ = \frac{x}{17}$ ή

$x = 17 \cdot \varepsilon\varphi 35^\circ = 17 \cdot 0{,}7 =$ **11,9**.

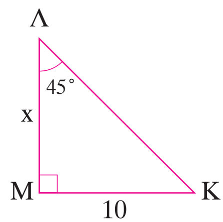




γ) $εφ38° = \dfrac{13}{x}$ ή

$x \cdot εφ38° = 13$ ή

$x = \dfrac{13}{εφ38°} = \dfrac{13}{0{,}781} =$ **16,64**.



δ) $εφ45° = \dfrac{10}{x}$ ή

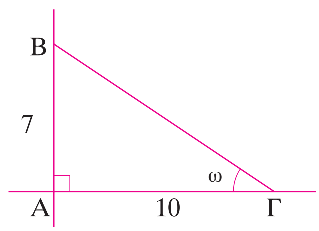
$x \cdot εφ45° = 10$ ή

$x = \dfrac{10}{εφ45°} = \dfrac{10}{1} =$ **10**.

▲

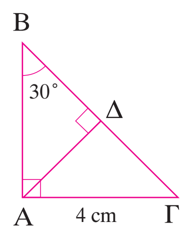
2 Ακολουθούμε τα βήματα της εφαρμογής 2 του σχολικού βιβλίου (σελ. 138). Κατασκευάζουμε μια ορθή γωνία $\hat{A}$ και στις πλευρές της παίρνουμε τα τμήματα $AB = 7$ και $AΓ = 10$. Τότε:

$εφω = \dfrac{AB}{AΓ} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$, άρα η γωνία ω είναι η ζητούμενη γωνία.



▲

3 Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30°$ και $AΓ = 4$ cm.



Μήκος ΑΒ: $εφ30° = \dfrac{AΓ}{AB}$ ή $0{,}577 = \dfrac{4}{AB}$ ή

$0{,}577 \cdot AB = 4$ ή $AB = \dfrac{4}{0{,}577} =$ **6,93 cm**.

Μήκος ΒΓ: Από Πυθαγόρειο θεώρημα θα έχουμε:
$BΓ^2 = AB^2 + AΓ^2$, απ' όπου βρίσκουμε **ΒΓ ≃ 8 cm**.
Τέλος, επειδή $\hat{B} = 30°$, προφανώς θα είναι $\mathbf{\hat{Γ} = 60°}$.

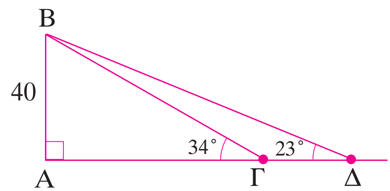
Εμβαδόν ΑΒΓ: Είναι $E = \dfrac{1}{2} \cdot AΓ \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6{,}93 =$ **13,86 cm²**.

΄Υψος ΑΔ: Είναι $E = \dfrac{1}{2} \cdot BΓ \cdot AΔ$, οπότε:

$13{,}86 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot ΑΔ$ ή $4 \cdot ΑΔ = 13{,}86$ ή $ΑΔ = \frac{13{,}86}{4}$ ή **ΑΔ = 3,46 cm**.

(ε... αρκετά δεν είναι;)

4 Παρατηρώ αρχικά ότι ΓΔ = ΑΔ – ΑΓ (η ζητούμενη απόσταση). Είναι όμως:



- Από $\overset{\triangle}{ΒΑΓ}$: $εφ34° = \frac{40}{ΑΓ}$ ή

  $ΑΓ = \frac{40}{εφ34°} = \frac{40}{0{,}675} =$

  59,26 m.

- Από $\overset{\triangle}{ΒΑΔ}$: $εφ23° = \frac{40}{ΑΔ}$ ή

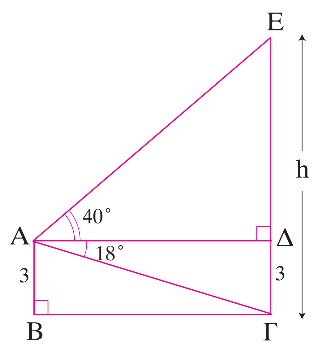
  $ΑΔ = \frac{40}{εφ23°} = \frac{40}{0{,}424} = 94{,}34$ m.

  Οπότε: $ΓΔ = 94{,}34 - 59{,}26 \simeq$ **35 m**.

Θυμήσου

Στις αναλογίες μπορώ να αλλάζω τη θέση των άκρων ή των μέσων όρων.

5 Από το τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:



$εφ18° = \frac{ΓΔ}{ΑΔ} = \frac{3}{ΑΔ}$. (1)

Από το τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε:

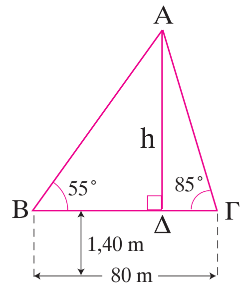
$εφ40° = \frac{ΔΕ}{ΑΔ} = \frac{h-3}{ΑΔ}$. (2)

Διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) (για ν' απλοποιηθεί το ΑΔ), οπότε:

$\frac{εφ18°}{εφ40°} = \frac{\frac{3}{ΑΔ}}{\frac{h-3}{ΑΔ}}$ ή $0{,}4 = \frac{3}{h-3}$ ή $0{,}4\,h - 1{,}2 = 3$ ή $0{,}4\,h = 4{,}2$ ή

h ≃ 10,5 m.

6 Από το τρίγωνο ΑΔΒ παίρνουμε:



$$\varepsilon\varphi 55^\circ = \frac{h}{\text{ΒΔ}} \ \text{ή}$$

$$1{,}428 = \frac{h}{\text{ΒΔ}} \ \text{ή} \ \text{ΒΔ} = \frac{h}{1{,}428}. \quad (1)$$

Όμοια, από το τρίγωνο ΑΔΓ παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi 85^\circ = \frac{h}{\text{ΔΓ}} \ \text{ή} \ 11{,}430 = \frac{h}{\text{ΔΓ}} \ \text{ή} \ \text{ΔΓ} = \frac{h}{11{,}430}. \quad (2)$$

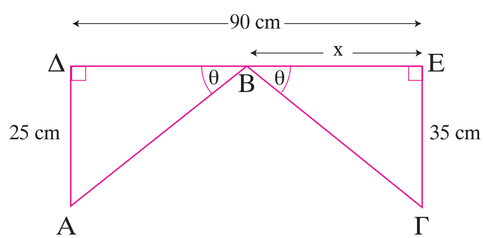
Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις (1), (2) (γιατί γνωρίζουμε ότι ΒΔ + ΔΓ = 80), οπότε:

$$\underbrace{\text{ΒΔ} + \text{ΔΓ}}_{80} = \frac{h}{1{,}428} + \frac{h}{11{,}430} = \frac{11{,}43 \cdot h + 1{,}428 \cdot h}{1{,}428 \cdot 11{,}430} = \frac{12{,}858\ h}{16{,}32} = 0{,}788\ h$$

ή $h = 80 : 0{,}788$ ή $h \simeq 101{,}5$ m.

Αν προσθέσουμε στο h και το ύψος 1,40 m (των ματιών), ο χαρταετός θα βρίσκεται σε ύψος **103 m** περίπου.

7 **α)** Εύκολα βλέπουμε ότι:
ΒΔ = ΔΕ – ΒΕ ή
ΒΔ = 90 – x.



β) Από το τρίγωνο ΑΔΒ παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}} \ \text{ή}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta = \frac{25}{90 - x}}. \quad (1)$$

γ) Όμοια, από το τρίγωνο ΒΕΓ παίρνουμε:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΒΕ}} \ \text{ή} \ \boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta = \frac{35}{x}}. \quad (2)$$

δ) Αφού τα πρώτα μέλη των σχέσεων (1), (2) είναι ίσα, θα είναι και τα δεύτερα, οπότε:

$$\frac{25}{90-x} = \frac{35}{x} \text{ ή (χιαστί) } 35 \cdot (90-x) = 25x.$$

Λύνουμε τώρα την τελευταία εξίσωση και έχουμε:

$$35 \cdot 90 - 35x = 25x \text{ ή } 60x = 3.150 \text{ ή } x = \frac{3.150}{60} = \mathbf{52{,}5\ cm}.$$

▲

B.2.2

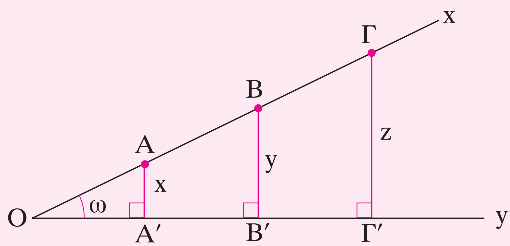
Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Χρειάζεται να ξέρεις...

ΘΕΩΡΙΑ

- Πάνω στην πλευρά Οx μιας οξείας γωνίας $x\hat{O}y = ω$ παίρνουμε σημεία Α, Β, Γ, ... και βρίσκουμε τις αντίστοιχες αποστάσεις ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ... από την πλευρά Οy.

  Ισχύει ότι: $\dfrac{AA'}{OA} = \dfrac{BB'}{OB} = \dfrac{ΓΓ'}{OΓ} = \ldots$, δηλαδή σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται ο λόγος

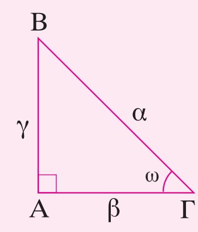
  $$\frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

  είναι σταθερός και καλείται **ημίτονο** της γωνίας ω και συμβολίζεται με **ημω**.

- Στο προηγούμενο σχήμα ισχύει επίσης:

  $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{OΓ'}{OΓ} = \ldots$, δηλαδή σε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται ο λόγος $\dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$ είναι σταθερός και καλείται **συνημίτονο** της γωνίας ω και συμβολίζεται με **συνω**.

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, για την οξεία γωνία ω ισχύει:

  $$ημω = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{γ}{α}.$$

  $$συνω = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{β}{α}.$$

Παρατήρηση: ημΒ = συνΓ.
ημΓ = συνΒ.

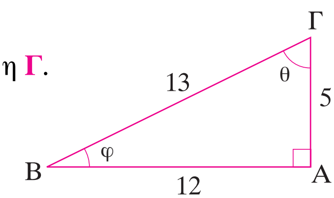
- Για κάθε οξεία γωνία ω ισχύει:

$$0 < \text{ημ}\omega < 1 \text{ και } 0 < \text{συν}\omega < 1$$

δηλαδή οι τιμές ημω, συνω είναι ανάμεσα στο 0 και στο 1 (ενώ η τιμή της εφω μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός).

- Τέλος ισχύει: $\text{εφ}\omega = \dfrac{\text{ημ}\omega}{\text{συν}\omega}$

Ερωτησεις Κατανοησης



1 **α)** $\text{ημ}\theta = \dfrac{12}{13}$, άρα η σωστή απάντηση είναι η **Γ**.

β) $\text{ημ}\varphi = \dfrac{5}{13}$, άρα η σωστή απάντηση είναι η **Β**.

γ) $\text{συν}\theta = \dfrac{5}{13}$, άρα η σωστή απάντηση είναι η **Δ**.

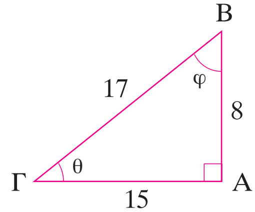
δ) $\text{συν}\varphi = \dfrac{12}{13}$, άρα η σωστή απάντηση είναι η **Γ**.

Θυμήσου

Τους ορισμούς που έχουμε δώσει για το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο:

$\text{ημ}\varphi = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$,

$\text{συν}\varphi = \dfrac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$.



2 Η σωστή απάντηση είναι η **Β**, γιατί παρατηρώ ότι:

$\text{συν}\varphi = \dfrac{8}{17}$.

3 Στο **Β** τρίγωνο.

4 Η σωστή απάντηση είναι η **Α**, γιατί

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

Θυμήσου

$\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$.

5 Οι τιμές $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ και **1,45** δεν μπορεί να εκφράζουν συνημίτονο οξείας γωνίας.

Θυμήσου

Οι τιμές και του ημιτόνου και του συνημιτόνου οξείας γωνίας είναι θετικοί αριθμοί μικρότεροι της μονάδας.

6 **α)** Σ, γιατί από $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$.

β) Σ, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ.

γ) Λ, γιατί οι ΓΒ, ΓΕ δεν είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

δ) Λ, λόγω του (α).

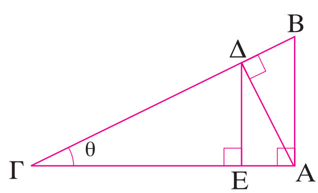
ε) Σ, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ.

στ) Σ, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

ζ) Σ, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΔ.

η) Λ, λόγω του (ζ).

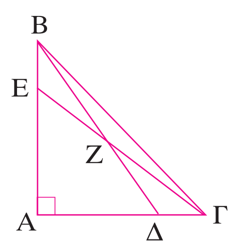
θ) Σ, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ.



7 **α)** $\overset{\triangle}{\text{ΒΑΔ}}$: $\sigma\upsilon\nu\text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Β} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΔ}}$.

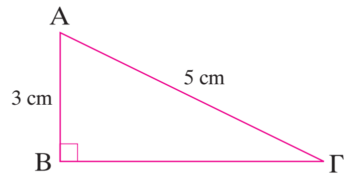
β) $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$: $\eta\mu\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Γ} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$.

γ) $\overset{\triangle}{\text{ΕΑΓ}}$: $\sigma\upsilon\nu\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Γ} = \dfrac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$.



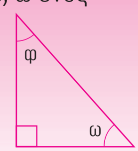
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **α)** Θα υπολογίσουμε αρχικά την 3η πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου με το Πυθαγόρειο θεώρημα. Είναι:
$ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $25 = 9 + ΒΓ^2$ ή
$ΒΓ^2 = 16$ ή $ΒΓ = 4$ (cm).
Οπότε με τους γνωστούς ορισμούς του ημιτόνου και του συνημιτόνου παίρνουμε:



Θυμήσου

Για τις οξείες γωνίες φ, ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισχύουν:
ημφ = συνω
συνφ = ημω.



- $ημΑ = \dfrac{ΒΓ}{ΑΓ} = \dfrac{4}{5}$ οπότε

  $\mathbf{ημΑ = συνΓ = \dfrac{4}{5}}$.

- $συνΑ = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ} = \dfrac{3}{5}$ οπότε

  $\mathbf{συνΑ = ημΓ = \dfrac{3}{5}}$.

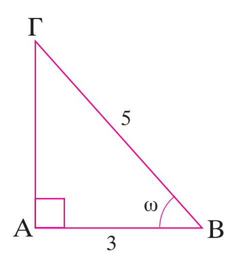
β) Δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο και θα είναι:

$ΑΓ \simeq 4{,}27$, $\mathbf{ημΑ = συνΓ = 0{,}94}$, $\mathbf{συνΑ = ημΓ = 0{,}35}$.

γ) Όμοια και πάλι με τα (α), (β) θα έχουμε:

$ΒΓ = 11{,}4$, οπότε $\mathbf{ημΒ = συνΓ = 0{,}79}$ και $\mathbf{συνΒ = ημΓ = 0{,}61}$. ▲

2 Αφού $συνω = \dfrac{3}{5}$, η γωνία ω μπορεί να είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα ίση με 5 και την προσκείμενη κάθετη πλευρά στην ω ίση με 3. Άρα κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 3 και υποτείνουσα ΒΓ = 5. Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι:
$5^2 = 3^2 + ΑΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = 16$ ή $ΑΓ = 4$,
οπότε:



$ημω = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ άρα $\mathbf{ημω = \frac{4}{5}}$.

Θυμήσου

$συνω = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}}$.

3 **α)** Γνωρίζουμε ότι:
$0 < ημω < 1.$ (1)
Θα «χτίσουμε» βήμα βήμα την παράσταση $2 + 5ημω$.
Πολλαπλασιάζουμε με 5, οπότε:
$(1) \Rightarrow 0 < 5ημω < 5.$
Προσθέτουμε το 2, οπότε:
$2 < \mathbf{2 + 5ημω < 7}$ και... αποδείχτηκε.

Θυμήσου

Οι τιμές των ημω, συνω για οξεία γωνία ω είναι μεταξύ 0 και 1.

β) Δουλεύουμε όμοια στη γνωστή σχέση:
$0 < συνω < 1.$
Πολλαπλασιάζουμε με –2, οπότε:
$0 \cdot (-2) > (-2) \cdot συνω > (-2) \cdot 1$ ή
$0 > -2συνω > -2.$
Προσθέτουμε το 4, οπότε:
$4 > \mathbf{4 - 2συνω > 2}$ και... αποδείχτηκε.

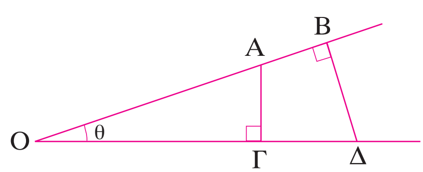
Θυμήσου

Όταν πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό τους όρους μιας ανισότητας, αλλάζει η φορά της.

γ) Γνωρίζουμε ότι: $0 < ημω < 1.$
Πολλαπλασιάζουμε με 5, οπότε $0 < 5ημω < 5.$ (1)
Επίσης: $0 < συνω < 1.$ Πολλαπλασιάζουμε με 3, οπότε $0 < 3συνω < 3.$ (2)
Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) θα είναι:
$0 < \mathbf{5ημω + 3συνω < 8}$ (αποδείχτηκε!)

4 Ας γράψουμε έναν πίνακα με τα δεδομένα και τα ζητούμενα:

Δεδομένα	ΟΑ = 10, ΟΒ = 12 ΟΓ = 8
Ζητούμενα	ΟΔ, ΑΓ, ΒΔ



- **Υπολογισμός ΟΔ:**
  Παρατηρούμε ότι:
  - Από $\overset{\triangle}{\text{ΟΓΑ}}$: $\text{συν}\theta = \dfrac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$. (1)
  - Από $\overset{\triangle}{\text{ΟΒΔ}}$: $\text{συν}\theta = \dfrac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΔ}} = \dfrac{12}{\text{ΟΔ}}$. (2)

  Οπότε από (1), (2) θα πρέπει: $0{,}8 = \dfrac{12}{\text{ΟΔ}}$ ή

  $0{,}8 \cdot \text{ΟΔ} = 12$ ή $\text{ΟΔ} = \dfrac{12}{0{,}8}$ ή **ΟΔ = 15 (m)**.

- **Υπολογισμός ΑΓ:** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\triangle}{\text{ΟΓΑ}}$, θα είναι:

  $\text{ΟΑ}^2 = \text{ΟΓ}^2 + \text{ΑΓ}^2$ ή $10^2 = 8^2 + \text{ΑΓ}^2$ ή $\text{ΑΓ}^2 = 36$ ή **ΑΓ = 6 (m)**.

- **Υπολογισμός ΒΔ:** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\triangle}{\text{ΟΒΔ}}$. Δοκίμασέ το μόνος σου και θα βρεις **ΒΔ = 9 (m)**. ▲