ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βοήθημα που κρατάς στα χέρια σου περιέχει:

- **Αναλυτικές λύσεις όλων των ασκήσεων του νέου σχολικού βιβλίου**, με τις απαραίτητες υπενθυμίσεις αλλά και μεθοδολογίες που περιλαμβάνονται στη θεωρία προηγούμενων τάξεων και χρειάζονται εδώ. Αυτό, με σκοπό να μην υπάρχουν κωλύματα και κενά κατά τη διάρκεια της μελέτης σου.
- **Κριτήρια (αυτο)αξιολόγησης** για κάθε ενότητα χωριστά, αλλά και συγκεντρωτικά στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Αυτά έχουν δημιουργηθεί με μοναδικό γνώμονα το τι ακριβώς χρειάζεται να γνωρίζεις τόσο για τις γραπτές εξετάσεις τον Ιούνιο, όσο –και κυρίως– για να αποκτήσεις τα θεμέλια της μαθηματικής γνώσης που θα σου χρειαστούν στο μέλλον.
- **Δείγματα διαγωνισμάτων** αντίστοιχα με αυτά που συνήθως ζητούνται στις γραπτές δοκιμασίες του σχολείου.
- **Περίληψη της θεωρίας** με τονισμό των σημείων που παραδοσιακά δυσκολεύουν.
- **Απαντήσεις και υποδείξεις** των κριτηρίων αξιολόγησης, και τέλος
- **Ευρετήριο όρων** αλλά και χρήσιμες **διευθύνσεις στο διαδίκτυο** με δραστηριότητες και εκπαιδευτικό υλικό που αξιοποιούν τις νέες τεχνολογίες.

Το βοήθημα αυτό έχει σκοπό να σου ανοίξει το δρόμο της γνώσης για τα μαθηματικά και όχι να σε περιορίσει σε έτοιμα πράγματα και στην απλή χρήση τους.

Κατά τη διάρκεια της συγγραφής του δεν υπήρξε ούτε στιγμή η ιδέα να δημιουργηθεί ένα «λυσάρι» με μορφή γρήγορης και μασημένης τροφής. Αντίθετα, χρησιμοποιώντας την πολύχρονη πείρα μας τόσο από τις φροντιστηριακές όσο και από τις σχολικές αίθουσες προσπαθήσαμε να δώσουμε τις λύσεις των ασκήσεων που περιέχονται στο σχολικό βιβλίο με τέτοιον τρόπο, ώστε **να σε προκαλούμε διαρκώς να δοκιμάσεις να λύσεις με τις δικές σου δυνάμεις την επόμενη άσκηση**.

Πιο ειδικά, εσύ που είσαι μαθητής ή μαθήτρια της Α′ τάξης του Γυμνασίου θα δεις ότι έχεις μια νέα ευκαιρία να έρθεις σε επαφή με έννοιες και μεθόδους που ήδη σου είναι γνωστές από το Δημοτικό. Παράλληλα όμως θ’ ανακαλύψεις και καινούρια πράγματα. Πράγματα που θα σε βοηθήσουν να κατανοήσεις σε μεγαλύτερη έκταση και βάθος τον κόσμο που μας περιβάλλει, απ’ την πλευρά που τον μελετά η επιστήμη των μαθηματικών, της Άλγεβρας δηλαδή και της γεωμετρίας.

Χρησιμοποιώντας αυτό το βιβλίο σαν ένα εργαλείο που βοηθάει την προσωπική σου προσπάθεια και εξάσκηση, θα βάλεις τις βάσεις, ώστε και στις επόμενες τάξεις να μπορέσεις να ανταποκριθείς με άνεση στις απαιτήσεις του μαθήματος των μαθηματικών. Γιατί τα μαθηματικά είναι ένας κόσμος που χτίζεται μέσα στο μυαλό του καθενός μας λιθαράκι λιθαράκι: κάθε επόμενη γνώση προϋποθέτει τις προηγούμενες.

Ιούνιος 2007

Οι συγγραφείς

Μιχάλης Τουρλάκης, Ιορδάνης Χριστοδούλου
Καθηγητές Μαθηματικών – 3ου Γυμνασίου
Αγ. Βαρβάρας «*Αντώνης Σαμαράκης*».

Ματθαίος Τσιλπιρίδης
Καθηγητής Μαθηματικών – 2ου Τοσιτσείου –
Αρσακείου Λυκείου Εκάλης.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 13
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ 87

ΜΕΡΟΣ Α′ • ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ

1 ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α.1.1 Φυσικοί αριθμοί – Διάταξη Φυσικών – Στρογγυλοποίηση.......... 89
Α.1.2 Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών. 94
Α.1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών.. 99
Α.1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα 106
Α.1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.. 111
Επαναληπτικές ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.. 117

2 ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Α.2.1 Η έννοια του κλάσματος 121
Α.2.2 Ισοδύναμα κλάσματα 127
Α.2.3 Σύγκριση κλασμάτων.. 133
Α.2.4 Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων 140
Α.2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων.. 149
Α.2.6 Διαίρεση κλασμάτων 154

3 ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α.3.1 Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί – Διάταξη δεκαδικών αριθμών – Στρογγυλοποίηση 163
Α.3.2 Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό.. 169
Α.3.3 Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης.. 176
Α.3.4 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών 178

Α.3.5 Μονάδες μέτρησης 181
Επαναληπτικές ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης........ 190

4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α.4.1 Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις $\alpha + x = \beta$, $x - \alpha = \beta$, $\alpha - x = \beta$, $\alpha x = \beta$, $\alpha : x = \beta$ και $x : \alpha = \beta$ 195
Α.4.2 Επίλυση προβλημάτων 202
Α.4.3 Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων........ 202

5 ΠΟΣΟΣΤΑ

Α.5.1 Ποσοστά 213
Α.5.2 Προβλήματα με ποσοστά 217
Επαναληπτικές ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης........ 226

6 ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ – ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Α.6.1 Παράσταση σημείων στο επίπεδο........ 231
Α.6.2 Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία 234
Α.6.3 Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες ανάλογων ποσών 241
Α.6.4 Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας........ 246
Α.6.5 Προβλήματα αναλογιών........ 251
Α.6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά 257
Επαναληπτικές ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης........ 262

7 ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Α.7.1 Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου 267
Α.7.2 Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών 271
Α.7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών........ 277
Α.7.4 Αφαίρεση ρητών αριθμών 283
Α.7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών........ 291
Α.7.6 Διαίρεση ρητών αριθμών 299
Α.7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών 305

Α.7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό 310
Α.7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο 313
Α.7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών.................... 321
Επαναληπτικές ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης 322

ΜΕΡΟΣ Β′ • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Β.1.1 Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο 329
Β.1.2 Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα 333
Β.1.3 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος 336
Β.1.4 Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων 341
Β.1.5 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας 346
Β.1.6 Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες 349
Β.1.7 Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών 354
Β.1.8 Παραπληρωματικές και συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες 357
Β.1.9 Θέσεις ευθειών στο επίπεδο... 361
Β.1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων........... 364
Β.1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου 368
Β.1.12 Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου – Μέτρηση τόξου...................................... 373
Β.1.13 Θέσεις ευθείας και κύκλου 377
Επαναληπτικές ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης 380

2 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Β.2.1 Συμμετρία ως προς άξονα... 385
Β.2.2 Άξονας συμμετρίας.. 390
Β.2.3 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος 393
Β.2.4 Συμμετρία ως προς σημείο.. 398
Β.2.5 Κέντρο συμμετρίας 401
Β.2.6 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία 403

3 ΤΡΙΓΩΝΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ – ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Β.3.1 Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων 409
Β.3.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου ... 413
Β.3.3 Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπέζιο – Ισοσκελές τραπέζιο 418
Β.3.4 Ιδιότητες παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου – Ρόμβου – Τετραγώνου – Τραπεζίου – Ισοσκελούς τραπεζίου 421
Επαναληπτικές ερωτήσεις αυτοαξιολόγησης.. 426

Α.2.1

Η έννοια του κλάσματος

ΘΕΩΡΙΑ

Χρειάζεται να ξέρεις...

- **Κλάσμα** ή **κλασματικός αριθμός** είναι ο αριθμός που έχει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου **μ, ν** φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.

  Το κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$, $\nu \neq 0$ σημαίνει ότι χωρίσαμε ένα μέγεθος σε ν ίσα μέρη και από αυτά πήραμε τα μ ίσα μέρη.
- **Αριθμητής** ονομάζεται ο αριθμός που βρίσκεται πάνω από την κλασματική γραμμή.
- **Παρονομαστής** ονομάζεται ο αριθμός που βρίσκεται κάτω από την κλασματική γραμμή.
- **Όροι του κλάσματος** ονομάζονται ο αριθμητής και ο παρονομαστής.
- Ισχύει $\frac{\mu}{\nu} = \mu : \nu$ όπου μ, ν: φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$, δηλαδή ένα κλάσμα παριστάνει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του.
- Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται σαν κλάσμα με παρονομαστή τη μονάδα, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha = \frac{\alpha}{1}}$.
- Το κλάσμα $\frac{1}{\alpha}$ ονομάζεται **κλασματική μονάδα**.
- Ο παρονομαστής ενός κλάσματος δεν μπορεί να είναι 0, γιατί δεν έχει νόημα να χωρίσουμε ένα μέγεθος σε μηδέν ίσα μέρη. Γι' αυτό, όταν σ' ένα κλάσμα εμφανίζονται γράμματα (μεταβλητές), π.χ. $\frac{\kappa}{\lambda}$, πάντα θα βάζουμε τον παρονομαστή του κλάσματος διάφορο του μηδενός ($\lambda \neq 0$).
- Πολλές φορές δίδεται η αξία ενός μέρους ενός μεγέθους και ζητείται η αξία ολόκληρου του μεγέθους. Τότε χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της

«αναγωγής στη μονάδα». Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε την αξία της κλασματικής μονάδας και μετά την αξία ολόκληρου του μεγέθους.

Π.χ.: Τα $\frac{2}{3}$ των μαθητών του τμήματος είναι 18 μαθητές.

Πόσους μαθητές έχει το τμήμα αυτό;

Λύση: Τα $\frac{2}{3}$ των μαθητών είναι 18 μαθητές.

Το $\frac{1}{3}$ των μαθητών είναι $18 : 2 = 9$ μαθητές.

Τα $\frac{3}{3}$ των μαθητών είναι $3 \cdot 9 = 27$ μαθητές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 **α)** όροι του κλάσματος.

β) (α) α, (β) 1, (γ) 0.

γ) λ ίσα μέρη. ▲

2 Τα κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{18}{20}$ είναι μικρότερα της μονάδας, αφού ο αριθμητής τους είναι μικρότερος από τον παρονομαστή τους, ενώ το κλάσμα $\frac{10}{9}$ είναι μεγαλύτερο της μονάδας, γιατί $10 > 9$. ▲

3 Ένα κλάσμα δηλώνει $\dfrac{\text{«πόσα μέρη πήραμε»}}{\text{«σε πόσα ίσα μέρη χωρίσαμε»}}$ ή $\dfrac{\text{«μέρος»}}{\text{«όλον»}}$.

Άρα οι μαθητές που απουσιάζουν αποτελούν τα $\mathbf{\frac{4}{28}}$ των μαθητών της τάξης. ▲

4 **Ναι**, γιατί: Το $\frac{1}{5}$ του κιλού είναι 14 καρύδια.

Τα $\frac{5}{5}$ του κιλού είναι $5 \cdot 14 = 70$ καρύδια. ▲

5 1ο σχήμα: Το χρωματισμένο μέρος είναι τα δύο από τα τέσσερα ίσα μέρη που το χωρίσαμε, δηλαδή $\frac{2}{4}$. Με όμοιο τρόπο έχουμε για τα άλλα σχήματα:

2ο σχήμα: $\frac{2}{3}$,

3ο σχήμα: $\frac{4}{9}$,

4ο σχήμα: $\frac{6}{8}$,

5ο σχήμα: $\frac{1}{3}$,

6ο σχήμα: $\frac{25}{40}$ ή $\frac{5}{8}$ (αν θεωρήσουμε ότι το σχήμα έχει χωριστεί σε 8 ίσες λωρίδες). ▲

6 Έχουμε:

Τα $\frac{2}{7}$ της τούρτας είναι 4 κομμάτια.

Το $\frac{1}{7}$ της τούρτας είναι $4 : 2 = 2$ κομμάτια.

Τα $\frac{7}{7}$ της τούρτας είναι $7 \cdot 2 =$ **14 κομμάτια**.

> ***Θυμήσου***
> $\frac{2}{7} \rightarrow \frac{1}{7} \rightarrow \frac{7}{7} = 1$
> «Αναγωγή στην κλασματική μονάδα».

▲

7 **α)** $\frac{100}{1.000}$ του κιλού. **γ)** $\frac{500}{1.000}$ του κιλού.

β) $\frac{250}{1.000}$ του κιλού. **δ)** $\frac{600}{1.000}$ του κιλού.

> ***Θυμήσου***
> • 1 κιλό = 1.000 γραμμάρια.
> • Κλάσμα: $\frac{\text{«μέρος»}}{\text{«όλον»}}$.

▲

8 **α)** $\frac{15}{30}$ του μήνα.

β) $\frac{15}{180}$ του εξαμήνου.

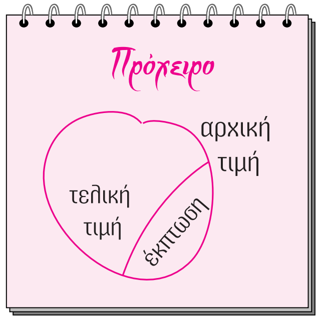
γ) $\frac{15}{365}$ του έτους.

> ***Θυμήσου***
> • Μήνας $\longrightarrow$ 30 ημέρες.
> • Εξάμηνο $\longrightarrow$ $6 \cdot 30 = 180$ ημέρες.
> • Έτος $\longrightarrow$ 365 ημέρες.

▲

9 **1ος τρόπος:**

Για να βρούμε την έκπτωση (τα $\frac{2}{5}$ των 90 €) θα χωρίσουμε το 90 σε 5 ίσα μέρη και θα πάρουμε τα 2 μέρη.
Δηλαδή έχουμε 90 : 5 = 18 και 2 · 18 = **36 €** έκπτωση.
Οπότε για να το αγοράσουμε θα πληρώσουμε:
90 – 36 = **54 €**.



2ος τρόπος:

Τα $\frac{5}{5}$ της αξίας του φορέματος είναι 90 €.

Το $\frac{1}{5}$ της αξίας του φορέματος είναι 90 : 5 = 18 €.

Τα $\frac{2}{5}$ της αξίας του φορέματος είναι 2 · 18 = 36 €.

Άρα η έκπτωση είναι **36 €**, οπότε για να αγοράσουμε το φόρεμα θα πληρώσουμε 90 – 36 = **54 €**. ▲

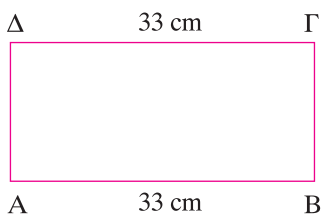
10 Σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε:

Τα $\frac{3}{8}$ των μαθητών είναι 12 μαθητές.

Τα $\frac{1}{8}$ των μαθητών είναι 12 : 3 = 4 μαθητές.

Τα $\frac{8}{8}$ των μαθητών είναι 4 · 8 = **32 μαθητές**. ▲

11



Θυμήσου

- Οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες.
- Περίμετρος είναι το άθροισμα των μηκών των πλευρών του παραλληλογράμμου.

Αφού ΑΒ = 33 εκατοστά, τότε και ΔΓ = 33 εκατοστά.

Για τη ΒΓ ξέρουμε ότι είναι τα $\frac{3}{11}$ της ΑΒ. Για να τη βρούμε, εργαζόμαστε ως εξής:

Τα $\frac{11}{11}$ της ΑΒ είναι 33 εκατοστά.

Το $\frac{1}{11}$ της ΑΒ είναι $33 : 11 = 3$ εκατοστά.

Τα $\frac{3}{11}$ της ΑΒ είναι $3 \cdot 3 = 9$ εκατοστά.

Δηλαδή ΒΓ = 9 εκατοστά, οπότε και ΑΔ = 9 εκατοστά.

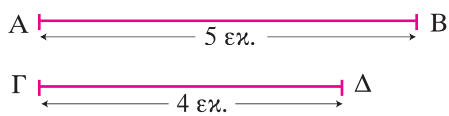
Άρα η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου θα είναι:

Π = ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 33 + 9 + 33 + 9 = **84 εκατοστά**. ▲

12 **α)** Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι 5 εκατοστά.

Το τμήμα ΓΔ που θέλουμε να σχεδιάσουμε έχει το ίδιο μήκος με τα $\frac{8}{10}$ του ΑΒ. Για να το υπολογίσουμε, εργαζόμαστε ως εξής:

Τα $\frac{10}{10}$ του ΑΒ είναι 5 εκ.



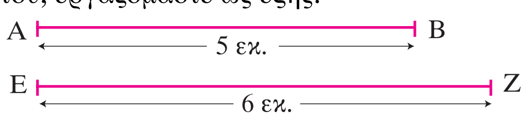
Το $\frac{1}{10}$ του ΑΒ είναι $5 : 10 = 0{,}5$ εκ.

Τα $\frac{8}{10}$ του ΑΒ είναι $8 \cdot 0{,}5 = 4$ εκ.

Δηλαδή ΓΔ = 4 εκ. οπότε και το σχεδιάζουμε.

β) Το τμήμα ΕΖ που θέλουμε να σχεδιάσουμε έχει μήκος τα $\frac{6}{5}$ του ΑΒ. Για να υπολογίσουμε το μήκος του, εργαζόμαστε ως εξής:

Τα $\frac{5}{5}$ του ΑΒ είναι 5 εκ.



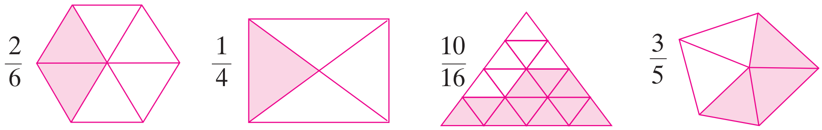
Το $\frac{1}{5}$ του ΑΒ είναι $5 : 5 = 1$ εκ.

Τα $\frac{6}{5}$ του ΑΒ είναι $6 \cdot 1 = 6$ εκ.

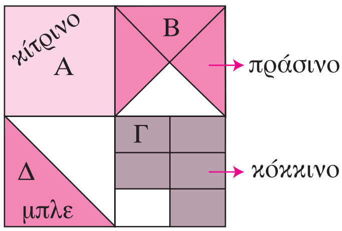
Δηλαδή ΕΖ = 6 εκ. οπότε και το σχεδιάζουμε. ▲

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1



2



Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο χωρίζεται σε 4 σχήματα ίσα με το Α, 16 ίσα με το Β, 24 ίσα με το Γ και 8 ίσα με το Δ.
Οπότε:

πράσινο: $\frac{3}{16}$ του ΑΒΓΔ.

μπλε: $\frac{1}{8}$ του ΑΒΓΔ.

κόκκινο: $\frac{5}{24}$ του ΑΒΓΔ.

κίτρινο: $\frac{1}{4}$ του ΑΒΓΔ.

A.2.2

Ισοδύναμα κλάσματα

Χρειάζεται να ξέρεις...

ΘΕΩΡΙΑ

- Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται **ισοδύναμα ή ίσα** όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

  Συμβολίζουμε: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

  Ιδιότητες ισοδύναμων κλασμάτων.

  ➤ Αν πολλαπλασιάσουμε τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, τότε προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό.

  Την ιδιότητα αυτή χρησιμοποιούμε για να «**παράγουμε**» ισοδύναμα κλάσματα με κάποιο κλάσμα που μας έχει δοθεί.

  Π.χ.: Να βρείτε 3 ισοδύναμα κλάσματα με το $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} \text{ ή } \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9} \text{ ή } \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}.$$

  ➤ Αν διαιρέσουμε τους όρους ενός κλάσματος (αρκεί να διαιρούνται) με τον ίδιο φυσικό αριθμό ($\neq 0$), τότε προκύπτει κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό.

  Την ιδιότητα αυτή χρησιμοποιούμε για να κάνουμε «**απλοποίηση**» στα κλάσματα, δηλαδή για να βρίσκουμε κλάσμα ισοδύναμο με το αρχικό αλλά με μικρότερους όρους.

  Π.χ.: $\frac{25}{15} = \frac{25 : 5}{15 : 5} = \frac{5}{3}$. Το κλάσμα αυτό, επειδή δεν απλοποιείται άλλο, λέγεται **ανάγωγο**. Παρατηρούμε ότι ΜΚΔ(5, 3) = 1.

  ➤ Αν έχουμε δύο ισοδύναμα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και πολλαπλασιάσουμε τους όρους τους «**χιαστί**», τότε έχουμε την ισότητα $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Την ιδιότητα αυτή χρησιμοποιούμε για να ελέγξουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα.

Π.χ.: $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}$. Έχουμε: $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 24$, άρα τα κλάσματα είναι ισοδύναμα.

$\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$. Έχουμε $3 \cdot 7 = 21$ και $4 \cdot 5 = 20$. Αφού $21 \neq 20$, τα κλάσματα δεν είναι ισοδύναμα.

- **Ομώνυμα** λέγονται δύο ή περισσότερα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

  Π.χ.: $\frac{3}{11}, \frac{7}{11}, \frac{2}{11}$.

- **Ετερώνυμα** λέγονται τα κλάσματα που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

  Π.χ.: $\frac{3}{5}, \frac{4}{8}$.

- **Μετατροπή ετερωνύμων κλασμάτων σε ομώνυμα:**

1. Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών τους.
2. Διαιρούμε το ΕΚΠ με κάθε παρονομαστή και αυτό που βρίσκουμε το βάζουμε στο «καπελάκι» του αντίστοιχου κλάσματος.
3. Πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς στο «καπελάκι» με τους όρους των κλασμάτων.
4. Τα κλάσματα που προκύπτουν είναι ομώνυμα.

Παράδειγμα: $\frac{2}{5}, \frac{6}{9}$

ΕΚΠ(5, 9) = 45

$45 : 5 = 9, \quad 45 : 9 = 5$

$\overset{9}{\frac{2}{5}}, \quad \overset{5}{\frac{6}{9}}$

$\frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 5}, \quad \frac{5 \cdot 6}{5 \cdot 9}$

$\frac{18}{45}, \quad \frac{30}{45}$

Παρατήρηση: Πριν τη διαδικασία μετατροπής ετερωνύμων κλασμάτων σε ομώνυμα απλοποιούμε όσα κλάσματα απλοποιούνται.

Ασκησεισ και Προβληματα

1 **α)** όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών.

β) $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$.

γ) δεν μπορεί να απλοποιηθεί άλλο.

δ) τον ίδιο παρονομαστή.

ε) διαφορετικούς παρονομαστές.

στ) ανάγωγο. ▲

2 **α)** $\frac{2}{3}, \frac{18}{27}$. Έχουμε $\left[\begin{array}{l} 2 \cdot 27 = 54 \\ 3 \cdot 18 = 54 \end{array}\right.$, άρα: $\frac{2}{3} = \frac{18}{27}$.

β) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$. Έχουμε: $\left[\begin{array}{l} 3 \cdot 2 = 6 \\ 4 \cdot 1 = 4 \end{array}\right.$, άρα: $\frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$.

γ) $\frac{7}{8}, \frac{30}{40}$. Έχουμε: $\left[\begin{array}{l} 7 \cdot 40 = 280 \\ 8 \cdot 30 = 240 \end{array}\right.$, άρα $\frac{7}{8} \neq \frac{30}{40}$.

Θυμήσου

Για να ελέγξουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα, υπολογίζουμε τα «χιαστί» γινόμενα. Αν είναι ίσα, τα κλάσματα είναι ισοδύναμα, αν είναι άνισα, δεν είναι ισοδύναμα.

δ) $\frac{13}{14}, \frac{26}{28}$. Έχουμε: $\left[\begin{array}{l} 13 \cdot 28 = 364 \\ 14 \cdot 26 = 364 \end{array}\right.$, άρα: $\frac{13}{14} = \frac{26}{28}$. ▲

3 **α)** $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \mathbf{\frac{75}{100}}$.

β) $\frac{8}{5} = \frac{8 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \mathbf{\frac{160}{100}}$.

γ) $\frac{4}{20} = \frac{4 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \mathbf{\frac{20}{100}}$.

δ) $\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 50}{2 \cdot 50} = \mathbf{\frac{250}{100}}$.

Πρόχειρο

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα των ισοδύναμων κλασμάτων, πολλαπλασιάζοντας τους όρους με κατάλληλο φυσικό αριθμό, ώστε στον παρονομαστή να έχουμε 100. Για να βρούμε τον αριθμό με τον οποίο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε, διαιρούμε το 100 με τον αντίστοιχο παρονομαστή.
Έχουμε: 100 : 4 = 25,
100 : 5 = 20, 100 : 20 = 5 και 100 : 2 = 50.

ε) $\frac{60}{75} = \frac{60 : 15}{75 : 15} = \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \mathbf{\frac{80}{100}}$ (απλοποιήσαμε το αρχικό κλάσμα). ▲

4 Διαιρούμε τους όρους των κλασμάτων με κατάλληλο αριθμό, ώστε να έχουμε ισοδύναμα κλάσματα με παρονομαστή το 3.

α) $\frac{10}{6} = \frac{10:2}{6:2} = \mathbf{\frac{5}{3}}$.

β) $\frac{50}{30} = \frac{50:10}{30:10} = \mathbf{\frac{5}{3}}$.

γ) $\frac{18}{27} = \frac{18:9}{27:9} = \mathbf{\frac{2}{3}}$.

5 **α)** Επειδή 6 : 3 = 2 έχουμε:

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \mathbf{\frac{4}{6}}$.

β) Επειδή 15 : 3 = 5 έχουμε:

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \mathbf{\frac{10}{15}}$.

6 **α)** $\frac{2}{3} \overset{\cdot 11}{=} \frac{22}{\mathbf{33}}$ γιατί $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 11} = \frac{22}{33}$.

β) $\frac{\mathbf{3}}{5} \underset{:3}{=} \frac{9}{15}$ γιατί $\frac{9}{15} = \frac{9:3}{15:3} = \frac{3}{5}$.

γ) $\frac{14}{4} \underset{\cdot 5}{=} \frac{\mathbf{70}}{20}$ γιατί $\frac{14}{4} = \frac{14 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{70}{20}$.

δ) Είναι $\frac{48}{36} = \frac{48:12}{36:12} = \frac{4}{3}$.

Άρα $\frac{48}{36} = \frac{4}{3} \underset{\cdot 8}{=} \frac{32}{24}$.

Άρα $\frac{48}{36} = \frac{\mathbf{32}}{24}$.

Πρόχειρο

Επειδή δε βρίσκουμε φυσικό αριθμό για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε απ′ ευθείας, απλοποιούμε το πρώτο κλάσμα.

7 α) $\frac{25}{30} = \frac{25:5}{30:5} = \mathbf{\frac{5}{6}}$.

β) $\frac{12}{9} = \frac{12:3}{9:3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$.

γ) $\frac{32}{56} = \frac{32:8}{56:8} = \mathbf{\frac{4}{7}}$.

Θυμήσου

Όταν απλοποιούμε ένα κλάσμα, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον ΜΚΔ τους για να βρούμε κατευθείαν το ανάγωγο κλάσμα.
ΜΚΔ(25, 30) = 5.
ΜΚΔ(12, 9) = 3.
ΜΚΔ(32, 56) = 8.

▲

8 α) $\frac{32}{30}$ δεν είναι ανάγωγο, γιατί
ΜΚΔ(32, 30) = 2.

β) $\frac{15}{14}$ είναι ανάγωγο, γιατί
ΜΚΔ(15, 14) = 1.

Θυμήσου

Ανάγωγο είναι ένα κλάσμα που οι όροι του έχουν ΜΚΔ τη μονάδα. (οι αριθμοί λέγονται και πρώτοι μεταξύ τους).

γ) $\frac{51}{16}$ είναι ανάγωγο, γιατί ΜΚΔ(51, 16) = 1.

δ) $\frac{26}{50}$ δεν είναι ανάγωγο, γιατί ΜΚΔ(26, 50) = 2.

▲

9 α) $\frac{3}{5}$ και $\frac{7}{9}$. Βρίσκουμε το ΕΚΠ(5, 9) = 45 .
Έχουμε: 45 : 5 = 9 και 45 : 9 = 5.

$\overset{9}{\frac{3}{5}}$ και $\overset{5}{\frac{7}{9}}$, οπότε προκύπτουν τα ομώνυμα κλάσματα: $\mathbf{\frac{27}{45}}$ και $\mathbf{\frac{35}{45}}$.

β) $\frac{7}{8}$ και $\frac{3}{10}$. Βρίσκουμε το ΕΚΠ(8, 10) = 40 .
Έχουμε 40 : 8 = 5 και 40 : 10 = 4.

$\overset{5}{\frac{7}{8}}$ και $\overset{4}{\frac{3}{10}}$, οπότε προκύπτουν τα ομώνυμα κλάσματα: $\mathbf{\frac{35}{40}}$ και $\mathbf{\frac{12}{40}}$.

γ) $\frac{11}{3}$ και $\frac{7}{12}$. Βρίσκουμε το ΕΚΠ(3, 12) = 12 .
Έχουμε: 12 : 3 = 4 και 12 : 12 = 1.

$\frac{\overset{4}{\frown}11}{3}$ και $\frac{\overset{1}{\frown}7}{12}$, οπότε προκύπτουν τα ομώνυμα κλάσματα: $\mathbf{\frac{44}{12}}$ και $\mathbf{\frac{7}{12}}$. ▲

10 **α)** $\boxed{\Sigma}$, γιατί το 5 διαιρεί τους όρους του κλάσματος 10 και 25.

Πράγματι: $\frac{10}{25} = \frac{10:5}{25:5} = \frac{2}{5}$.

β) $\boxed{\Sigma}$, γιατί ΜΚΔ(3, 5) = 1.

γ) Λ, γιατί $\frac{x}{8} = \frac{\bigcirc}{24}$, $8 \xrightarrow{\cdot 3} 24$, άρα: $\frac{x}{8} = \frac{3x}{24}$, ο αριθμητής είναι τριπλάσιος του x.

δ) Λ, γιατί π.χ. για τα κλάσματα $\frac{3}{5}$ και $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$ ισχύει ότι $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, δηλαδή, αν πολλαπλασιάσουμε του όρους ενός κλάσματος με το 4, προκύπτει ισοδύναμο κλάσμα με το αρχικό.

ε) $\boxed{\Sigma}$, γιατί το 6 διαιρεί τους όρους του, 18 : 6 = 3 και 522 : 6 = 87.

στ) Λ, γιατί π.χ. $\frac{17}{11} > 1$, αφού 17 > 11, ενώ είναι ανάγωγο.

ζ) $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\frac{0}{4} = 0$ και $\frac{0}{10} = 0$ άρα $\frac{0}{4} = \frac{0}{10}$.

η) Λ, γιατί $\frac{23}{30} \neq \frac{3}{10}$, αφού $23 \cdot 10 = 230$ και $30 \cdot 3 = 90$.

θ) $\boxed{\Sigma}$, γιατί $60 \cdot 11 = 660$ και $3 \cdot 220 = 660$.

ι) $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\frac{5}{5} = 1$ και $\frac{41}{41} = 1$, άρα $\frac{5}{5} = \frac{41}{41}$.

ια) $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\frac{\alpha + \beta}{1} = \alpha + \beta$, αφού τον παρονομαστή 1 μπορούμε να μην τον γράφουμε. ▲

A.3.5

Μονάδες μέτρησης

ΘΕΩΡΙΑ

Χρειάζεται να ξέρεις...

- **Γενικά περί μέτρησης**:

  Μέγεθος είναι καθετί που μπορούμε να μετρήσουμε, π.χ., απόσταση, επιφάνεια, χωρητικότητα, βάρος, χρόνος, θερμοκρασία.

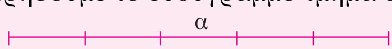
  Μέτρηση είναι η σύγκριση ενός μεγέθους με ένα άλλο μέγεθος ομοειδές.

  Μονάδα μέτρησης είναι το ομοειδές μέγεθος που χρησιμοποιούμε για τη μέτρηση.

  Από τη μέτρηση προκύπτει ένας αριθμός που μας λέει πόσες φορές χωράει η μονάδα μέτρησης στο μέγεθος που μετράμε. Αυτός ο αριθμός λέγεται **μέτρο του μεγέθους**.

  Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε να μετρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα α (μέγεθος) χρησιμοποιώντας το ευθύγραμμο τμήμα 

(μονάδα μέτρησης). Συγκρίνουμε το β με το α (μέτρηση) και παρατηρούμε ότι το β χωράει στο α 5 φορές (μέτρο).

  Γράφουμε: $\alpha = 5 \cdot \beta$.

- **Μονάδες μέτρησης μήκους:** Βασική μονάδα το **μέτρο** (1**m**).

  1 km = 1.000 m

  $\boxed{1\text{m}}$ = 10 dm

  1 dm = 10 cm

  1 cm = 10 mm

Χιλιόμετρο (km)	Πολλαπλάσιο
Παλάμη ή δεκατόμετρο (dm)	Υποδιαιρέσεις
Εκατοστό ή εκατοστόμετρο (cm)	Υποδιαιρέσεις
Χιλιοστό ή χιλιοστόμετρο (mm)	Υποδιαιρέσεις

- **Μονάδες μέτρησης εμβαδού:** Βασική μονάδα το **τετραγωνικό μέτρο** (**1m²**).

  $1km^2 = 1.000.000\ m^2$

$$\boxed{1m^2} = 100\ dm^2$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$

Τετραγωνικό χιλιόμετρο (km^2)	Πολλαπλάσιο
Τετραγωνική παλάμη ή τετρ. δεκατόμετρο (dm^2) Τετραγωνικό εκατοστό ή τετρ. εκατοστόμετρο (cm^2) Τετραγωνικό χιλιοστό ή τετρ. χιλιοστόμετρο (mm^2)	Υποδιαιρέσεις

Για τη μέτρηση των αγρών χρησιμοποιούμε το Στρέμμα = $1.000\ m^2$.

- **Μονάδες μέτρησης όγκου**: Βασική μονάδα το **κυβικό μέτρο** (**1m³**).

$$\boxed{1m^3} = 1.000\ dm^3$$
$$1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$$
$$1\ cm^3 = 1.000\ mm^3$$

Κυβική παλάμη ή κυβικό δεκατόμετρο (dm^3) Κυβικό εκατοστό ή κυβικό εκατοστόμετρο (cm^3) Κυβικό χιλιοστό ή κυβικό χιλιοστόμετρο (mm^3)	Υποδιαιρέσεις

Για τη μέτρηση των υγρών χρησιμοποιούμε το **λίτρο** (**lt**):

1 λίτρο (lt) = $1\ dm^3$.

Για μικρές ποσότητες υγρών χρησιμοποιούμε το **χιλιοστόλιτρο** (**ml**):

1 χιλιοστόλιτρο (ml) = $1\ cm^3$.

- **Μονάδες μέτρησης χρόνου:** Βασική μονάδα το **δευτερόλεπτο** (**s**).

1 ημέρα = 24 h

1 h = 60 min

$1\ min = 60\ \boxed{s}$

Λεπτά (min) Ώρες (h) Ημέρα	Πολλαπλάσια

- **Μονάδες μέτρησης μάζας:** Βασική μονάδα **1 χιλιόγραμμο ή κιλό (kg)**.

1t = 1.000 kg.

$\boxed{1\ \text{kg}}$ = 1.000 g

1 g = 1.000 mg

Τόνος (t)	]	Πολλαπλάσιο
Γραμμάριο (g)	]	Υποδιαιρέσεις
Χιλιοστόγραμμο (mg)		

- **Μετατροπές:** Όταν κάνουμε μετατροπή από μεγάλη μονάδα σε μικρότερη κάνουμε πολλαπλασιασμό, ενώ όταν κάνουμε μετατροπή από μικρότερη μονάδα σε μεγαλύτερη κάνουμε διαίρεση.

Π.χ.: **i)** Να τραπούν 22,5 m σε cm.

Γνωρίζουμε ότι 1 m = 100 cm, άρα:

22,5 m = 22,5 · 100 cm = 2.250 cm.

ii) Να βρεις πόσες ώρες είναι 25.200 s.

Γνωρίζουμε ότι 1 h = 3.600 s, άρα:

25.200 s = 25.200 : 3.600 h = 7 h.

iii) Να τραπούν 4,2 m^3 σε cm^3.

Γνωρίζουμε ότι: 1 m^3 = 1.000.000 cm^3, άρα:

4,2 m^3 = 4,2 · 1.000.000 cm^3 = 4.200.000 cm^3.

iv) Πόσα κιλά είναι 15.400 g;

Γνωρίζουμε ότι 1 kg = 1.000 g, άρα:

15.400 g = 15.400 : 1.000 kg = 15,4 kg.

v) Να τραπούν 7.800 cm^2 σε dm^2.

Γνωρίζουμε ότι: 1 dm^2 = 100 cm^2, άρα:

7.800 cm^2 = 7.800 : 100 dm^2 = 78 dm^2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1

α) 23 dm = **230** cm.

β) 3,1 m = **0,0031** km.

γ) 45,83 cm = **0,4583** m.

δ) 67,2 km = **67.200.000** mm.

ε) 95,5 mm = **9,55** cm.

Πρόχειρο

Μετατροπές

α) 23 dm = 23 · 10 cm = 230 cm.
β) 3,1 m = 3,1 : 1.000 km = 0,0031 km.
γ) 45,83 cm = 45,83 : 100 m = 0,4583 m.
δ) 67,2 km = 67,2 · 1.000.000 mm = 67.200.000 mm.
ε) 95,5 mm = 95,5 : 10 cm = 9,55 cm.

▲

2

Έχουμε:

α = 3,1 m = 3,1 · 1.000 mm = **3.100 mm** = **$3{,}1 \cdot 10^3$ mm**.

β = 4,2 m = 4,2 · 1.000 mm = **4.200 mm** = **$4{,}2 \cdot 10^3$ mm**.

γ = 2,3 m = 2,3 · 1.000 mm = **2.300 mm** = **$2{,}3 \cdot 10^3$ mm**. ▲

3

Μετατρέπουμε τα μήκη που μας έχουν δοθεί στην ίδια μονάδα, π.χ. m, για να είναι ευκολότερο να τα γράψουμε σε αύξουσα σειρά.

986 m = 986 m.
0,023 km = 0,023 · 1.000 m = 23 m.
456 cm = 456 : 100 m = 4,56 m.
678 dm = 678 : 10 m = 67,8 m.

Οπότε: 4,56 m < 23 m < 67,8 m < 986 m.
Τελικά: **456 cm < 0,023 km < 678 dm < 986 m**. ▲

Θυμήσου

Με αύξουσα σειρά σημαίνει να γράψουμε τα μήκη από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

4 Για να βρούμε το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$E = \alpha \cdot \beta$

$E = 23\ cm \cdot 45\ cm$

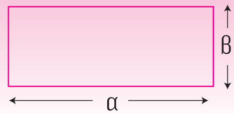
$\mathbf{E = 1.035\ cm^2}$

Το εμβαδόν που βρήκαμε το μετατρέπουμε σε mm^2.

$E = 1.035\ cm^2 = 1.035 \cdot 100\ mm^2 =$ $\mathbf{103.500\ mm^2}$.

Θυμήσου

Εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου



$E = \alpha \cdot \beta$

▲

5 α) $56\ km^2 =$ **56.000.000** m^2.

β) 0,987 στρέμματα = **987** m^2.

γ) 350 στρέμματα = **350.000** m^2.

Πρόχειρο

α) $56\ km^2 = 56 \cdot 1.000.000\ m^2 = 56.000.000\ m^2$.

β) 1 στρέμμα = $1.000\ m^2$, άρα: 0,987 στρ. = $0{,}987 \cdot 1.000\ m^2 = 987\ m^2$.

γ) 350 στρ. = $350 \cdot 1000\ m^2 = 350.000\ m^2$.

▲

6 Έχουμε:

$E = \alpha^2$

$E = 210^2\ m^2$

$E = 210 \cdot 210\ m^2$

$\mathbf{E = 44.100\ m^2}$.

Θυμήσου

$E_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2$
όπου α = πλευρά του τετραγώνου.

Το εμβαδόν που βρήκαμε το μετατρέπουμε σε στρέμματα:

$E = 44.100\ m^2 = 44.100 : 1.000$ στρέμματα = **44,1 στρέμματα**. ▲

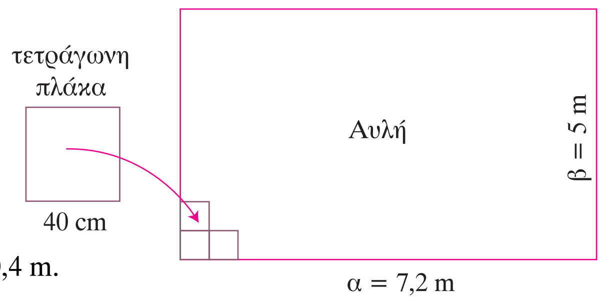
7 Θα υπολογίσουμε πρώτα το εμβαδόν της αυλής. Έχουμε:

$E = \alpha \cdot \beta$

$E = 7{,}2 \cdot 5\ m^2$

$E = 36\ m^2$.

Θα υπολογίσουμε εν συνεχεία το εμβαδόν της τετράγωνης πλάκας (σε m^2), αφού πρώτα μετατρέψουμε το μήκος της πλευράς της σε m, δηλαδή:



40 cm = 40 : 100 m = 0,4 m.

Οπότε:

$E = 0{,}4^2\ m^2$
$E = 0{,}4 \cdot 0{,}4\ m^2$
$E = 0{,}16\ m^2$.

Τέλος θα υπολογίσουμε πόσες πλάκες θα χρειαστούμε βρίσκοντας πόσες φορές «χωράει» το εμβαδόν της τετράγωνης πλάκας στο εμβαδόν της αυλής, δηλαδή: 36 : 0,16 = **225 πλάκες**. ▲

8 Ο όγκος σε cm^3 είναι: Γνωρίζουμε ότι $15\ dm^3 = 15 \cdot 1.000\ cm^3 = 15.000\ cm^3$.
Οπότε $15\ dm^3\ 29\ cm^3 = 15.000\ cm^3 + 29\ cm^3 =$ **$15.029\ cm^3$**.

Ο όγκος σε m^3 είναι: $15\ dm^3\ 29\ cm^3 = 15.029\ cm^3 = 15.029 : 1.000.000\ m^3 =$ **$0{,}015029\ m^3$**.

Ο όγκος σε mm^3 είναι: $15\ dm^3\ 29\ cm^3 = 15.029\ cm^3 = 15.029 \cdot 1.000\ mm^3 =$ **$15.029.000\ mm^3$**. ▲

9 Πρέπει να υπολογίσουμε τον όγκο (χωρητικότητα) των 3 δεξαμενών σε lt (λίτρα).

$V_{δεξαμενής} = α \cdot β \cdot γ$
$V_{δεξαμενής} = 3 \cdot 2 \cdot 5\ m^3$
$V_{δεξαμενής} = 30\ m^3$

Δηλαδή ο όγκος τριών δεξαμενών είναι:
$3 \cdot 30\ m^3 = 90\ m^3$.

Θυμήσου
- $1\ dm^3 = 1$ λίτρο (lt).
- Όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $V = α \cdot β \cdot γ$ όπου α, β, γ οι διαστάσεις του.

Μετατρέπουμε τον όγκο των τριών δεξαμενών σε λίτρα (lt).
Έχουμε: $90\ m^3 = 90 \cdot 1.000\ dm^3 = 90.000\ dm^3 = 90.000$ lt.
Γνωρίζουμε ότι το 1 lt (λίτρο) κρασί πωλείται 4 €, άρα από τα 90.000 lt κρασί θα εισπράξει: 90.000 · 4 = **360.000 €**.

10 Αφού την ώρα 5 h 20 min (μ.μ.) τη γράψουμε 17 h 20 min, αφαιρούμε και έχουμε:

(17h 20 min) – (8h 10 min) = **9h 10 min**.

Πρόχειρο

	17 h 20 min
−	8 h 10 min
	9 h 10 min

11 **α)** 4h 52 min =
292 min = **17.520** s.

β) 3h 12 min =
192 min = **11.520** s.

γ) 5h 20 min 30 s =
320,5 min =
19.230 s.

δ) 56 min 45 s =
56,75 min = **3.405** s.

Πρόχειρο

α)
- 4 h = 4 · 60 min = 240 min, άρα:
- 4 h 52 min = 240 min + 52 min = 292 min.
- 4 h 52 min = 292 min = 292 · 60 s = 17.520 s.

β)
- 3 h = 3 · 60 min = 180 min, άρα:
- 3 h 12 min = 180 min + 12 min = 192 min.
- 3 h 12 min = 192 min = 192 · 60 s = 11.520 s.

γ)
- 5 h = 5 · 60 min = 300 min.
- 30 s = 30 : 60 min = 0,5 min, άρα:
- 5 h 20 min 30 s = 300 min + 20 min + 0,5 min = 320,5 min.
- 5 h 20 min 30 s = 320,5 min = 320,5 · 60 s = 19.230 s.

δ)
- 45 s = 45 : 60 min = 0,75 min, άρα:
- 56 min 45 s = 56 min + 0,75 min = 56,75 min.
- 56 min 45 s = 56,75 min = 56,75 · 60 s = 3.405 s.

12 **α)** Το $\frac{1}{10}$ της ώρας $= \frac{1}{10} \cdot 60$ min $= \frac{60}{10}$ min $=$ **6 min**.

β) Το $\frac{1}{5}$ της ώρας $= \frac{1}{5} \cdot 60$ min $= \frac{60}{5}$ min $=$ **12 min**.

γ) Το $\frac{1}{6}$ της ώρας $= \frac{1}{6} \cdot 60$ min $= \frac{60}{6}$ min $=$ **10 min**.

Θυμήσου
1 ώρα (h) =
60 λεπτά (min).

13 **α)** 3 kg και 600 g = 3,600 kg.
Στη μία πλευρά της ζυγαριάς: 3,6 kg.
Στην άλλη πλευρά της ζυγαριάς:
2 του 1 kg + 3 των 500 g + 2 των 50 g.

β) 2 kg και 450 g = 2,450 kg.
Στη μία πλευρά της ζυγαριάς: 2,450 kg.
Στην άλλη πλευρά της ζυγαριάς: 2 του 1 kg + 9 των 50 g.

14 **α)** Στη μία πλευρά της ζυγαριάς:
Σώμα μάζας 5 kg + 1 των 3 kg + 1 του 1 kg.
Στην άλλη πλευρά της ζυγαριάς:
1 των 9 kg.

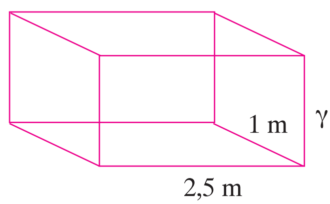
β) Στη μία πλευρά της ζυγαριάς:
Σώμα μάζας 3kg + 1 των 5 kg + 2 του 1 kg.
Στην άλλη πλευρά της ζυγαριάς:
1 των 10 kg.

15 **α)** 5 lt = 2 των 2lt + 2 των 0,5 lt.

β) 2,8 lt = 1 των 2 lt + 1 των 0,5 lt + 3 των 0,1 lt.

γ) 2,4 lt = 1 των 2 lt + 4 των 0,1 lt.

16 Κατ' αρχάς η δεξαμενή θέλουμε να χωράει 3 t πετρελαίου. Δηλαδή ο όγκος της είναι $3 \cdot 1.200$ lt = 3.600 lt και σε κυβικά μέτρα (m^3) ο όγκος της θα είναι:
3.600 lt = 3.600 : 1.000 m^3 = 3,6 m^3.



Το ύψος που πρέπει να έχει η δεξαμενή ας το ονομάσουμε γ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για τον όγκο της δεξαμενής έχουμε:

$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

$3{,}6 = 2{,}5 \cdot 1 \cdot \gamma$

$3{,}6 = 2{,}5\ \gamma$

$\gamma = 3{,}6 : 2{,}5$

$\gamma = 1{,}44$ m ή **γ = 144 cm**.

Θυμήσου

- Χωρητικότητα σημαίνει όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ όπου α, β, γ οι διαστάσεις του.

Σε ύψος δεξαμενής 144 cm αντιστοιχούν 3.600 lt.

Σε ύψος δεξαμενής 1 cm αντιστοιχούν 3.600 : 144 = 25 lt.

Οπότε σε κάθε cm ύψους αντιστοιχούν **25 lt** (λίτρα) πετρελαίου. ▲

17 Κατ' αρχάς μετατρέπουμε την πλευρά της βάσης σε m. Έχουμε:

80 cm = 80 : 100 m = 0,8 m.

Ο όγκος της δεξαμενής είναι:

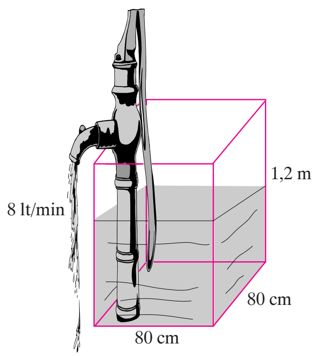
$V = 1{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8\ m^3$

$V = 0{,}768\ m^3$ ή

$V = 768$ lt.

Πρόχειρο

$0{,}768\ m^3 =$
$0{,}768 \cdot 1.000$ lt $=$
768 lt.



α) Το ύψος της δεξαμενής 120 cm αντιστοιχεί σε 768 lt.
Το 1 cm ύψους δεξαμενής αντιστοιχεί σε 768 : 120 = 6,4 lt.
Σε 10 cm ύψος δεξαμενής αντιστοιχούν $10 \cdot 6{,}4 = 64$ lt.
Αφού κάθε λεπτό αντλούμε 8 lt, για να κατέβει η στάθμη 10 cm (δηλαδή για να αντληθούν 64 lt), θα απαιτηθεί χρόνος 64 : 8 = **8 min**.

β) Η δεξαμενή χωράει 768 lt και αφού σε κάθε λεπτό αντλούμε 8 lt, για να αδειάσει, θα απαιτηθεί χρόνος 768 : 8 = **96 min**.

γ) Σε μισή ώρα (1/2 h), δηλαδή 30 min, θα αντληθούν $30 \cdot 8 = 240$ lt.
Γνωρίζουμε ότι:
Τα 6,4 lt αντιστοιχούν σε ύψος 1 cm.
Τα 240 lt αντιστοιχούν σε ύψος 240 : 6,4 = 37,5 cm.
Άρα η στάθμη του νερού θα κατέβει κατά **37,5 cm**. ▲

18 Οι χρόνοι για τους ποδηλάτες είναι:
Α′ ποδηλάτης: 1 h 15 min ή 75 min.
Β′ ποδηλάτης: 1 h 45 min ή 105 min.

Πρόχειρο
- 1 h 15 min = 60 min + 15 min = 75 min
- 1 h 45 min = 60 min + 45 min = 105 min

α) $\dfrac{\text{Χρόνος Α′ ποδηλάτη}}{\text{Χρόνος Β′ ποδηλάτη}} = \dfrac{75}{105} = \dfrac{75:15}{105:15} = \dfrac{5}{7}$.

β) $\dfrac{\text{Χρόνος Β′ ποδηλάτη}}{\text{Χρόνος Α′ ποδηλάτη}} = \dfrac{105}{75} = \dfrac{105:15}{75:15} = \dfrac{7}{5}$.

Παρατηρούμε ότι είναι αντίστροφοι αριθμοί. ▲

Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

1. Λ, γιατί $\dfrac{12}{16} = \dfrac{12:4}{16:4} = \dfrac{3}{4}$ που είναι ισοδύναμο με το $\dfrac{12}{16}$.

2. $\boxed{\Sigma}$, γιατί, αφού $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\beta}$ και οι παρονομαστές είναι ίσοι, πρέπει και οι αριθμητές να είναι ίσοι, άρα $\alpha = \gamma$.

3. Λ, γιατί $1 : \dfrac{\alpha}{\beta} = 1 \cdot \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha} \neq \dfrac{\alpha}{\beta}$.

4. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\text{Ε} = \left(2\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{6}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{6:2}{8:2} = \dfrac{3}{4}$.

5. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\dfrac{5}{8:2} = \dfrac{5}{4}$ και το $\dfrac{5}{4}$ φανερώνει διπλάσια ποσότητα από το $\dfrac{5}{8}$.

6. Λ, γιατί $\dfrac{7}{9} \cdot 3 = \dfrac{21}{9}$ και $\dfrac{21}{9} > \dfrac{7}{9}$.

7. Λ, γιατί $\dfrac{1\frac{5}{8}}{3} = \dfrac{\frac{13}{8}}{3} = \dfrac{13}{24} \neq \dfrac{5}{40}$ (αφού $13 \cdot 40 \neq 5 \cdot 24$).

8. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{6:6}{12:6} = \frac{1}{2}$.

9. Λ, γιατί αφού α < β, τότε α < β + 1, οπότε το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta + 1} < 1$, αφού ο αριθμητής του είναι μικρότερος από τον παρονομαστή του.

10. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0{,}625$ και $\frac{625}{1.000} = 0{,}625$ και

$\frac{35}{56} = 35 : 56 = 0{,}625$. Επίσης $\frac{1.250}{2.000} = 1.250 : 2.000 = 0{,}625$.

11. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $2 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{45}{1.000} = 2 + 0{,}1 + 0{,}03 + 0{,}045 = 2{,}175$.

12. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $7{,}2 \cdot \frac{5}{36} = \frac{7{,}2 \cdot 5}{36} = \frac{36}{36} = 1$.

13. Λ, γιατί το $\frac{5{,}2}{7}$ δεν έχει παρονομαστή τα 10, 100, ...

14. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\frac{149}{231} = 0{,}6450216$ και $\frac{220}{452} = 0{,}4867256$, οπότε $\frac{149}{231} > \frac{220}{452}$.

15. Λ, γιατί $\frac{1.050}{3.100} = 0{,}3387096$ και $\frac{2.593}{4.650} = 0{,}5576344$, οπότε $\frac{1050}{3100} < \frac{2593}{4650}$.

16. Λ, γιατί $\frac{3{,}4}{7{,}3} = 3{,}4 : 7{,}3 = 0{,}4657534 \neq 0{,}4659$.

17. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\frac{1{,}028}{1{,}2} = 1{,}028 : 1{,}2 = 0{,}856666...$

18. Λ, γιατί $\frac{34{,}5}{5{,}7} = 34{,}5 : 5{,}7 = 6{,}0526315 \neq 5{,}7$.

19. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\dfrac{1,25}{1,85} = 1,25 : 1,85 = 0,675\,675\,675...$

20. $\boxed{\Sigma}$, γιατί $\dfrac{0,69}{4,6} = 0,69 : 4,6 = 0,15$.

21. Λ, γιατί, αφού $\dfrac{x}{3} = 7$, έχουμε $x = 21 \neq 23$. ▲

B.3.2

Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

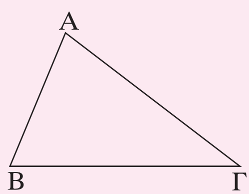
ΘΕΩΡΙΑ

Χρειάζεται να ξέρεις...

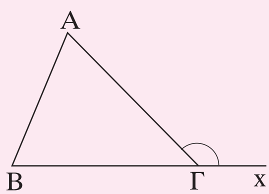
- Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών είναι 180°.
  Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική της τρίτης γωνίας.
  Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές.

Θυμήσου

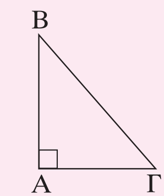
α) **Συμπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90°.
β) Για να βρούμε την **εξωτερική** μιας γωνίας τριγώνου, προεκτείνουμε τη μία πλευρά της.



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$



$A\hat{\Gamma}x = \hat{A} + \hat{B}$



$\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$

- Οι ιδιότητες που έχει ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι:
  α) Η ευθεία της διαμέσου που βρίσκεται μεταξύ των ίσων πλευρών του είναι άξονας συμμετρίας του.
  β) Η διάμεσος που βρίσκεται μεταξύ των ίσων πλευρών του είναι ύψος και διχοτόμος.
  γ) Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του είναι ίσες.
- Οι ιδιότητες που έχει ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι:
  α) Οι ευθείες των τριών διαμέσων του είναι άξονες συμμετρίας του.
  β) Κάθε διάμεσός του είναι ύψος και διχοτόμος.
  γ) Όλες οι γωνίες του είναι ίσες (η καθεμία είναι 60°).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 **α)** Σ

β) Λ, γιατί σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.

γ) Λ, γιατί κάθε ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες ίσες με 60°.

δ) Λ, γιατί η πρόταση αυτή ισχύει μόνο για τη διάμεσο που περιέχεται στις ίσες πλευρές.

ε) Σ

στ) Λ, λόγω του (ζ).

ζ) Σ

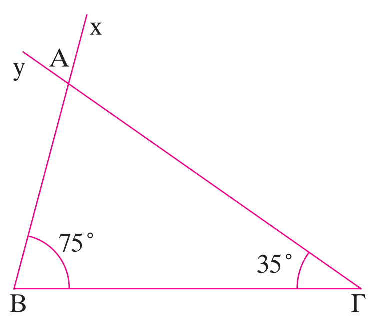
η) Σ

θ) Λ, γιατί σε κάθε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι 45°.

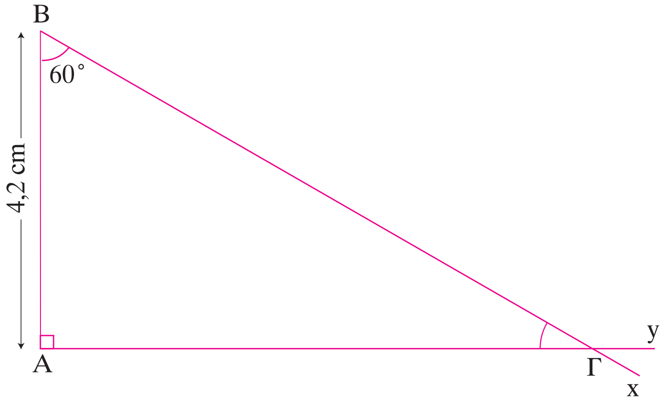
2 Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και με κορυφές τα άκρα του σχεδιάζουμε (με το μοιρογνωμόνιο) τις γωνίες: $\Gamma\hat{B}x = 75^\circ$ και $B\hat{\Gamma}y = 35^\circ$. Οι ημιευθείες Βx και Γy τέμνονται στο σημείο Α. Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ή

$$\hat{A} + 75^\circ + 35^\circ = 180^\circ \text{ ή}$$
$$\hat{A} + 110^\circ = 180^\circ \text{ ή}$$
$$\hat{A} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$$

Άρα $\mathbf{\hat{A} = 70^\circ}$.



3 Παίρνουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 4,2 cm και με κορυφές τα άκρα του σχεδιάζουμε (με το μοιρογνωμόνιο) τις γωνίες $A\hat{B}x = 60^\circ$ και $B\hat{A}y = 90^\circ$. Οι ημιευθείες Βx και Αy τέμνονται στο σημείο Γ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι συμπληρωματικές, άρα

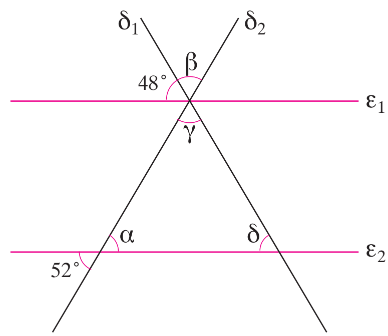


$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ ή $60^\circ + \hat{\Gamma} = 90^\circ$ ή $\hat{\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Επομένως $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Τέλος, μετράμε (με το υποδεκάμετρο) την πλευρά ΒΓ και βρίσκουμε ότι **ΒΓ = 8,4 cm**. Άρα έχουμε **ΒΓ = 2 · ΑΒ**. ▲

4 Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και 52° είναι κατακορυφήν, άρα $\hat{\alpha} = 52^\circ$.



Οι γωνίες $\hat{\delta}$ και 48° είναι εντός – εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ε_1 και ε_2 που τέμνονται από τη δ_1, άρα $\hat{\delta} = 48^\circ$.

Στο τρίγωνο του σχήματος έχουμε:

$\hat{\gamma} + \hat{\alpha} + \hat{\delta} = 180^\circ$ ή

$\hat{\gamma} + 52^\circ + 48^\circ = 180^\circ$ ή

$\hat{\gamma} + 100^\circ = 180^\circ$ ή

$\hat{\gamma} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$,

άρα $\hat{\gamma} = 80^\circ$.

Οι γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ είναι κατακορυφήν, άρα $\hat{\beta} = 80^\circ$. ▲