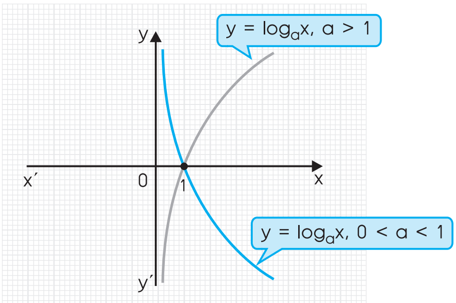
17 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, ορίζεται για κάθε $x > 0$ η συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, η οποία ονομάζεται λογαριθμική συνάρτηση.

Μελέτη της συνάρτησης

1. **Πεδίο ορισμού:** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = (0, +\infty)$.
2. **Συμμετρίες:** Από το πεδίο ορισμού προκύπτει ότι η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
3. **Μονοτονία:**
   - Αν $\alpha > 1$, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
   - Αν $0 < \alpha < 1$, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.
4. **Ακρότατα:** Το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$, άρα δεν έχει ακρότατα.
5. **Γραφική παράσταση:**



Παρατηρήσεις

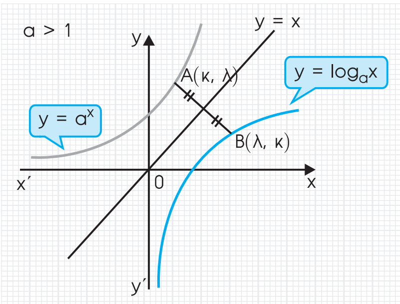
i) Αν $\alpha > 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ως ασύμπτωτη τον ημιάξονα Oy΄, ενώ, αν $0 < \alpha < 1$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ως ασύμπτωτη τον ημιάξονα Oy.

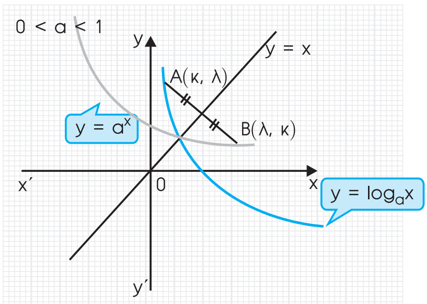
ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο (1, 0).

iii) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\log_{\alpha} x$ και $g(x)=\log_{\frac{1}{\alpha}} x$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x.

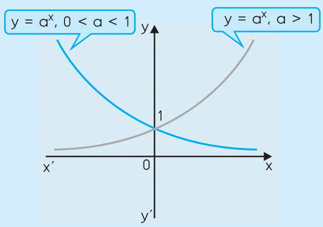
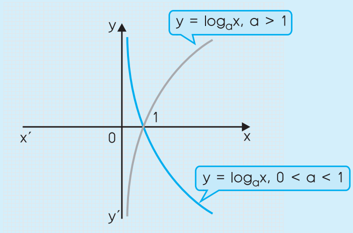
iv) Η λογαριθμική συνάρτηση είναι «1 – 1», δηλαδή ισχύει:
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_{\alpha} x_1 \neq \log_{\alpha} x_2$.

v) Σύμφωνα με τον ορισμό του λογαρίθμου $\log_{\alpha} x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$.
Έτσι, αν $f(x)=\log_{\alpha} x$ και $g(x)=\alpha^x$, ισχύει η ισοδυναμία $y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y)$.
Οι συναρτήσεις f και g λέγονται αντίστροφες.
Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $g(x)=f^{-1}(x)$.
Αν το σημείο Α(κ, λ) ανήκει στη C_f, τότε το σημείο Β(λ, κ) ανήκει στη C_g.
Συνεπώς οι C_f, C_g είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x, δηλαδή τη διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου (σχήμα).
Ειδικότερα το σημείο (1, 0) ανήκει στις γραφικές παραστάσεις όλων των λογαριθμικών συναρτήσεων, ενώ το σημείο (0, 1) ανήκει στις γραφικές παραστάσεις όλων των εκθετικών συναρτήσεων.





Στον πίνακα που ακολουθεί παραθέτουμε τα βασικότερα χαρακτηριστικά της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	Εκθετική	Λογαριθμική
	$f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1$	$f(x) = \log_a x,\ 0 < a \neq 1$
Πεδίο ορισμού	$A = \mathbb{R}$	$A = (0, +\infty)$
Σύνολο τιμών	$f(A) = (0, +\infty)$	$f(A) = \mathbb{R}$
Μονοτονία	• Αν $a > 1$, τότε f $\nearrow$ • Αν $0 < a < 1$, τότε f $\searrow$	• Αν $a > 1$, τότε f $\nearrow$ • Αν $0 < a < 1$, τότε f $\searrow$
Ακρότατα	Δεν έχει	Δεν έχει
Ασύμπτωτες	• Αν $a > 1$, ο ημιάξονας Ox' • Αν $0 < a < 1$, ο ημιάξονας Ox	• Αν $a > 1$, ο ημιάξονας Oy' • Αν $0 < a < 1$, ο ημιάξονας Oy
Γραφική παράσταση		

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. Ασκήσεις στον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης

Πρόκειται για ασκήσεις στις οποίες δίνεται ο τύπος της λογαριθμικής συνάρτησης και ενδεχομένως ζητείται:

α) το πεδίο ορισμού της,

β) η τιμή της συνάρτησης με δεδομένη την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής και αντίστροφα

γ) να αποδειχθεί κάποια ταυτότητα ή κάποια συναρτησιακή σχέση,

δ) η γραφική παράσταση είτε της δοθείσας συνάρτησης είτε κάποιας που προκύπτει από κατακόρυφη ή οριζόντια μετατόπιση της δοθείσας.

Εφαρμογή 1

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογισθούν τα $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

γ) Να βρεθεί το x, ώστε $f(x) = 1$.

δ) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in (-2, 2)$ ισχύει ότι $f(x) + f(-x) = 0$.

Λύση

α) Πρέπει $\frac{2-x}{2+x} > 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A = (-2, 2)$.

β) Αντικαθιστώντας τα -1, 0 και 1 στον τύπο της f, έχουμε:

- $f(-1) = \log\left(\frac{2-(-1)}{2+(-1)}\right) = \log\left(\frac{3}{1}\right) = \log 3$
- $f(0) = \log\left(\frac{2-0}{2+0}\right) = \log 1 = 0$
- $f(1) = \log\left(\frac{2-1}{2+1}\right) = \log\frac{1}{3} = -\log 3$

γ) $\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = 1 \Leftrightarrow \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \log 10 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2+x} = 10 \Leftrightarrow x = -\frac{18}{11}$

δ) Το πεδίο ορισμού A ικανοποιεί τη σχέση $x \in A \Leftrightarrow -x \in A$.
Θέτοντας στη συνάρτηση f όπου x το –x, παίρνουμε:

$$f(-x) = \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -f(x).$$

Επομένως $f(x) + f(-x) = 0$.

☞ Λυμένες ασκήσεις: 1, 2, 7α. Ασκήσεις ανάπτυξης: 1, 2, 9, 12, 16, 30, 31, 33, 34.

2. Λογαριθμικές εξισώσεις

Πρόκειται για εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος εμφανίζεται στην παράσταση που λογαριθμίζεται.

- Αρχικά, για να έχει νόημα η εξίσωση, παίρνουμε τους απαραίτητους περιορισμούς απαιτώντας οι παραστάσεις που λογαριθμίζονται να είναι θετικές.
- Στη συνέχεια έχουμε τις εξής επιλογές:
  - → Επιδιώκουμε να καταλήξουμε απευθείας σε ισότητα λογαρίθμων της ίδιας βάσης, οπότε απολογαριθμίζουμε. Βασιζόμαστε δηλαδή στη σχέση: $\log_\alpha x = \log_\alpha y \Leftrightarrow x = y$, με $x,\ y > 0$. Επιλύοντας την τελευταία και λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, προκύπτουν οι λύσεις της αρχικής λογαριθμικής εξίσωσης.

Εφαρμογή 2

Να λυθεί η εξίσωση $\log_3(x+1) = \log_3(2-x)$.

Λύση

Για να έχει νόημα η εξίσωση, πρέπει $\begin{cases} x+1>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$.

Έχουμε διαδοχικά $\log_3(x+1) = \log_3(2-x) \Leftrightarrow x+1 = 2-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, η οποία και είναι δεκτή, αφού $-1 < \frac{1}{2} < 2$.

☞ Λυμένες ασκήσεις: 3, 7β. Ασκήσεις ανάπτυξης: 3, 4, 8, 10, 12, 13, 20, 32.

→ Αντικαθιστώντας τον λογάριθμο που περιέχει τον άγνωστο, καταλήγουμε είτε σε πολυωνυμική εξίσωση είτε σε εξίσωση που ανάγεται σε πολυωνυμική. Από τις λύσεις της τελευταίας, με τη βοήθεια της αντικατάστασης και λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, προκύπτουν οι λύσεις της αρχικής λογαριθμικής εξίσωσης.

Εφαρμογή 3

Να λυθεί η εξίσωση $\log^2 x - \frac{3}{2}\log x^2 + 2 = 0$.

Λύση

Για να έχει νόημα η εξίσωση, πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Έχουμε διαδοχικά $\log^2 x - \frac{3}{2}\log x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \log^2 x - 3\log x + 2 = 0$.

Θέτουμε $\log x = y$, οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = 2$.

Επομένως από την αντικατάσταση $\log x = y$ παίρνουμε:

$\log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$ ή $\log x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

☞ Λυμένες ασκήσεις: 3β. Ασκήσεις ανάπτυξης: 15, 21.

Μια εκθετική εξίσωση που καταλήγει σε ισότητα δυνάμεων με διαφορετική βάση επιλύεται λαμβάνοντας τους λογαρίθμους των δύο μελών της (λογαριθμίζοντας), χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε βάση.

Εφαρμογή 4

Να λυθεί η εξίσωση $2^{1-x} = 3^x$.

Λύση

Έχουμε $2^{1-x} > 0$ και $3^x > 0$, επομένως λογαριθμίζοντας παίρνουμε:

$\ln 2^{1-x} = \ln 3^x \Leftrightarrow (1-x)\ln 2 = x\ln 3 \Leftrightarrow \ln 2 - x\ln 2 = x\ln 3 \Leftrightarrow x(\ln 3 + \ln 2) = \ln 2$

και τελικά $x = \frac{\ln 2}{\ln 6}$.

Παρατήρηση

Η επιλογή της βάσης με την οποία λογαριθμίζουμε μπορεί μεν να είναι στη διακριτική μας ευχέρεια, όμως υπάρχει περίπτωση οι αριθμοί που θα προκύψουν ή κάποια πιθανή υπόδειξη να μας καθοδηγήσει να χρησιμοποιήσουμε συγκεκριμένη βάση λογαρίθμου.

☞ Λυμένες ασκήσεις: 6. Ασκήσεις ανάπτυξης: 10.

3. Λογαριθμικές ανισώσεις

Πρόκειται για ανισώσεις στις οποίες ο άγνωστος εμφανίζεται στην παράσταση που λογαριθμίζεται.

- Αρχικά, για να έχει νόημα η ανίσωση, παίρνουμε τους απαραίτητους περιορισμούς απαιτώντας οι ποσότητες που λογαριθμίζονται να είναι θετικές.
- Στη συνέχεια έχουμε τις εξής επιλογές:

  → Επιδιώκουμε να καταλήξουμε απευθείας σε ανίσωση λογαρίθμων της ίδιας βάσης, οπότε απολογαριθμίζοντας προκύπτει ανίσωση ίδιας φοράς, αν η βάση του λογαρίθμου είναι μεγαλύτερη της μονάδας, αντίθετης φοράς, αν η βάση του λογαρίθμου είναι μικρότερη της μονάδας και θετική.

Βασιζόμαστε δηλαδή στη σχέση $\log_\alpha x < \log_\alpha y \Leftrightarrow \begin{cases} x < y, & \alpha > 1 \\ x > y, & 0 < \alpha < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x,\ y > 0$.

Επιλύοντας την τελευταία και λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, προκύπτουν οι λύσεις της αρχικής λογαριθμικής ανίσωσης.
Ανάλογες σχέσεις προκύπτουν για την ανίσωση $\log_\alpha x > \log_\alpha y$.

Εφαρμογή 5

Να λυθεί η ανίσωση $\log(2x-1) - \log(x+4) \geq 0$.

Λύση

Για να έχει νόημα η ανίσωση, πρέπει $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

Έχουμε διαδοχικά $\log(2x-1) - \log(x+4) \geq 0 \Leftrightarrow \log(2x-1) \geq \log(x+4)$.

Αφού 10 > 1, προκύπτει ανίσωση ίδιας φοράς, επομένως $2x-1 \geq x+4 \Leftrightarrow x \geq 5$, οπότε, λαμβάνοντας υπόψη τον αρχικό περιορισμό, προκύπτει ότι $x \geq 5$.

☞ Λυμένες ασκήσεις: 4α, 4β, 7γ. Ασκήσεις ανάπτυξης: 5, 11, 14, 17.

→ Αντικαθιστώντας τον λογάριθμο που περιέχει τον άγνωστο, καταλήγουμε είτε σε πολυωνυμική ανίσωση είτε σε ανίσωση που ανάγεται σε πολυωνυμική. Από τις λύσεις της τελευταίας, με τη βοήθεια της αντικατάστασης και λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, προκύπτουν οι λύσεις της αρχικής λογαριθμικής ανίσωσης.

Εφαρμογή 6

Να λυθεί η ανίσωση $2\ln^2 x - \ln x^2 < 0$.

Λύση

Για να έχει νόημα η ανίσωση, πρέπει $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

Έχουμε διαδοχικά $2\ln^2 x - \ln x^2 < 0 \Leftrightarrow 2\ln^2 x - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x < 0$.

Θέτουμε $\ln x = y$, οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια ανίσωση $y^2 - y < 0$.

Έχουμε $y^2 - y = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = 1$.

Επομένως $y^2 - y < 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1 \Leftrightarrow 0 < \ln x < 1$, άρα έχουμε:

$$\begin{cases} \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1 \\ \text{και} \\ \ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < e$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον αρχικό περιορισμό, προκύπτει ότι $1 < x < e$.

☞ Λυμένες ασκήσεις: 4γ. Ασκήσεις ανάπτυξης: 19, 26, 28.

4. Λογαριθμικά συστήματα

Λύνονται με τεχνικές ανάλογες αυτών που χρησιμοποιούνται σε όλα τα είδη συστημάτων.

Εφαρμογή 7

Να λυθεί το λογαριθμικό σύστημα $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 3\log x - 2\log y = 3 \end{cases}$

Λύση

Για να έχει νόημα το σύστημα, πρέπει $x > 0$ και $y > 0$.
Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων σε κάθε εξίσωση, παίρνουμε:

- $\log x + \log y = 1 \Leftrightarrow \log(x \cdot y) = \log 10$, άρα $x \cdot y = 10$.
- $3\log x - 2\log y = 3 \Leftrightarrow \log x^3 - \log y^2 = 3 \Leftrightarrow \log \dfrac{x^3}{y^2} = \log 1.000$, άρα $\dfrac{x^3}{y^2} = 1.000$.

Επομένως $\begin{cases} x \cdot y = 10 \\ \dfrac{x^3}{y^2} = 1.000 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (x,\ y) = (10,\ 1)$.

Η λύση του είναι δεκτή, εφόσον ικανοποιεί τους αρχικούς περιορισμούς.

☞ Λυμένες ασκήσεις: 5. Ασκήσεις ανάπτυξης: 7, 22, 23.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Να σχεδιαστούν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:**

Α. α) $f(x) = \ln x$ β) $g(x) = \ln x + 1$ γ) $h(x) = \ln(x - 3)$

Β. α) $f(x) = \log x$ β) $g(x) = \log \dfrac{1}{x}$

Λύση

Α. α) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$,
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\mathbb{R}$,
- επειδή $e > 1$, είναι γνησίως αύξουσα,
- διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$,
- έχει ασύμπτωτη ευθεία τον Oy'.

Με τη βοήθεια του πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση.

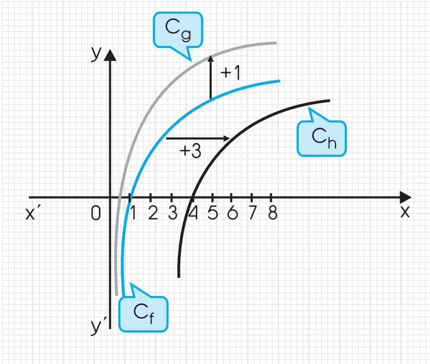
x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2	e^3
$f(x) = \ln x$	-2	-1	0	1	2	3

β) Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x) = f(x) + c$, με $c > 0$, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα πάνω.

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x + 1$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

γ) Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $h(x) = f(x - c)$, με $c > 0$, προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \ln(x - 3)$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.



Β. α) Η συνάρτηση $f(x) = \log x$:

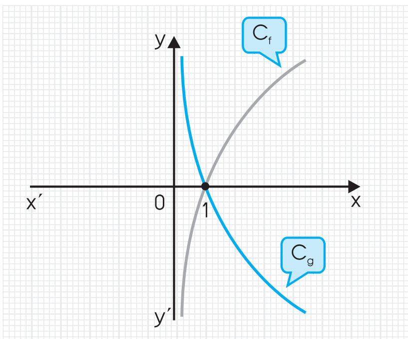
- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$,
- έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$,
- επειδή $10 > 1$, είναι γνησίως αύξουσα,
- διέρχεται από το σημείο $(1, 0)$,
- έχει ασύμπτωτη ευθεία τον $Oy΄$.

Κάνουμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	0,01	0,1	1	10	100
$f(x) = \log x$	–2	–1	0	1	2

β) Επειδή $\log\left(\frac{1}{x}\right) = \log\left(x^{-1}\right) = -\log x$, είναι $g(x) = -f(x)$.

Άρα η C_g είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x΄x$.



2. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\log\dfrac{x-3}{x+3}$.**

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση είναι περιττή.

Λύση

α) Πρέπει $\begin{cases}\dfrac{x-3}{x+3}>0\\ \text{και}\\ x+3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x+3)>0\\ \text{και}\\ x\neq -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-9>0\\ \text{και}\\ x\neq -3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>3 \text{ ή } x<-3\\ \text{και}\\ x\neq -3\end{cases}$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή, αν $x\in A$, θα ισχύει και $-x\in A$.
Θέτοντας στη συνάρτηση f όπου x το –x, παίρνουμε:

$$f(-x)=\log\left(\frac{-x-3}{-x+3}\right)=\log\left[\frac{-(x+3)}{-(x-3)}\right]=$$

$$=\log\left(\frac{x+3}{x-3}\right)=\log\left[\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{-1}\right]=-\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right)=-f(x).$$

Επομένως η συνάρτηση είναι περιττή.

3. **Να λυθούν οι εξισώσεις:**

α) $\log x+\log(x-9)=1$ **β) $\log_2 x-\dfrac{2}{\log_2 x}=1$**

Λύση

α) Για να έχει νόημα η εξίσωση, πρέπει $\begin{cases}x>0\\ x-9>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ x>9\end{cases} \Leftrightarrow x>9.$

- Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των λογαρίθμων έχουμε διαδοχικά:

  $\log x+\log(x-9)=1 \Leftrightarrow \log[x(x-9)]=1 \Leftrightarrow$ $\log_\alpha \theta_1+\log_\alpha \theta_2=\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)$

  $\log[x(x-9)]=\log 10 \Leftrightarrow \log(x^2-9x)=\log 10.$

- Εξισώνοντας τις ποσότητες που λογαριθμίζονται, προκύπτει ισοδύναμα:

  $\log(x^2-9x)=\log 10 \Leftrightarrow x^2-9x=10 \Leftrightarrow$

  $\log_\alpha x=\log_\alpha y \Leftrightarrow x=y$

  $x^2-9x-10=0 \Leftrightarrow (x-10)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \Leftrightarrow x=10$ (δεκτή) ή

  $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (απορρίπτεται).

β) Για να έχει νόημα η εξίσωση, πρέπει $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\neq 1.$

Πρόκειται για λογαριθμική εξίσωση στην οποία, αν αντικαταστήσουμε τον λογάριθμο που περιέχει τον άγνωστο, είναι δυνατόν να καταλήξουμε σε πολυωνυμική εξίσωση. Έχουμε διαδοχικά:

- Πολλαπλασιάζοντας τους όρους της εξίσωσης με $\log_2 x \neq 0$, παίρνουμε:

  $$\log_2 x-\frac{2}{\log_2 x}=1 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2-\log_2 x-2=0.$$

- Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\log_2 x=y$, προκύπτει η εξίσωση:

  $y^2-y-2=0 \Leftrightarrow (y-2)(y+1)=0 \Leftrightarrow y=2$ ή $y=-1$.

- Από την αντικατάσταση $\log_2 x=y$ παίρνουμε διαδοχικά:

  $\log_2 x=2 \Leftrightarrow x=4$ (δεκτή) ή $\log_2 x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ (δεκτή).

4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log_7(1-x)<\log_7(x+5)$

β) $\log_{0,8}(x^2-4)\geq \log_{0,8} 21$

γ) $\log^2 x-\log x-6>0$

Λύση

α) Για να έχει νόημα η ανίσωση, πρέπει $\begin{cases} 1-x>0 \\ x+5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow -5<x<1.$

- Απολογαριθμίζοντας, προκύπτει ανίσωση της ίδιας φοράς, οπότε έχουμε:

  $\log_7(1-x)<\log_7(x+5) \Leftrightarrow 1-x<x+5 \Leftrightarrow x>-2.$

  Αν $\alpha>1$, τότε ισχύει: $\log_\alpha x<\log_\alpha y \Leftrightarrow x<y.$

- Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, η αρχική ανίσωση αληθεύει όταν $-2<x<1$.

β) Για να έχει νόημα η ανίσωση, πρέπει $x^2-4>0 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>2$.

- Απολογαριθμίζοντας, προκύπτει ανίσωση αντίθετης φοράς, οπότε έχουμε:
  $\log_{0,8}(x^2-4) \geq \log_{0,8}21 \Leftrightarrow$
  $x^2-4 \leq 21 \Leftrightarrow x^2 \leq 25$,
  επομένως $-5 \leq x \leq 5$.

> Αν $0<\alpha<1$, τότε ισχύει:
> $\log_\alpha x < \log_\alpha y \Leftrightarrow x>y$.

- Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, η αρχική ανίσωση αληθεύει όταν $-5 \leq x < -2$ ή $2 < x \leq 5$.

γ) Για να έχει νόημα η ανίσωση, πρέπει $x>0$.

- Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y=\log x$, προκύπτει η ανίσωση:
  $y^2-y-6>0$. Είναι $y^2-y-6=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y=3$ ή $y=-2$.
  Επομένως έχουμε $y^2-y-6>0 \Leftrightarrow y<-2$ ή $y>3$.
- Από την αντικατάσταση $y=\log x$ παίρνουμε $\log x<-2$ ή $\log x>3$, άρα:
  $\log x<-2 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{100}$ ή $\log x>3 \Leftrightarrow x>1.000$.
- Λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, η αρχική ανίσωση αληθεύει όταν
  $0<x<\dfrac{1}{100}$ ή $x>1.000$.

5. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases}\log x+\log y=2\\ 2\log x-3\log y=-1\end{cases}$ β) $\begin{cases}\ln x+\ln y=1\\ \ln x\cdot\ln y=-2\end{cases}$

Λύση

α) Για να έχει νόημα το σύστημα, πρέπει $x>0$ και $y>0$.

- Εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων στην 1η εξίσωση, παίρνουμε:
  $\log x+\log y=2 \Leftrightarrow \log(x\cdot y)=\log 100$, άρα προκύπτει η εξίσωση $x\cdot y=100$ (1).
- Εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων στη 2η εξίσωση, παίρνουμε:
  $2\log x-3\log y=-1 \Leftrightarrow \log x^2-\log y^3=-1 \Leftrightarrow \log\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)=\log\dfrac{1}{10}$, άρα προκύπτει η εξίσωση $\dfrac{x^2}{y^3}=\dfrac{1}{10}$ (2).

- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} x \cdot y = 100 \\ \dfrac{x^2}{y^3} = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{100}{x} \\ 10x^2 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{100}{x} \\ 10x^2 = \dfrac{10^6}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{100}{x} \\ 10x^5 = 10^6 \end{cases} \Leftrightarrow (x,\ y) = (10,\ 10).$$

- Από τους αρχικούς περιορισμούς παίρνουμε $(x,\ y) = (10,\ 10)$.

β) Για να έχει νόημα το σύστημα, πρέπει $x > 0$ και $y > 0$.

- Θέτουμε $\ln x = \kappa$ και $\ln y = \lambda$, οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \kappa + \lambda = 1 \\ \kappa \cdot \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 - \lambda \\ (1-\lambda) \cdot \lambda = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 - \lambda \\ (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \end{cases}$$

Άρα έχουμε $\lambda = -1$ και $\kappa = 2$ ή $\lambda = 2$ και $\kappa = -1$.

- Από τις αντικαταστάσεις $\ln x = \kappa$ και $\ln y = \lambda$ παίρνουμε διαδοχικά:

Για $\kappa = -1$ και $\lambda = 2$: $\ln x = \kappa \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$ και

$\ln y = \lambda \Leftrightarrow \ln y = 2 \Leftrightarrow y = e^2$.

Για $\kappa = 2$ και $\lambda = -1$: $\ln x = \kappa \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ και

$\ln y = \lambda \Leftrightarrow \ln y = -1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{e}$.

- Λαμβάνοντας υπόψη τους αρχικούς περιορισμούς, οι λύσεις του συστήματος είναι $(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{e},\ e^2\right)$ ή $(x,\ y) = \left(e^2,\ \dfrac{1}{e}\right)$.

6. **Να λυθούν οι εξισώσεις:**

α) $2^x = 5^{1-x}$ **β)** $3^{x-2} - 7^{1-x} = 0$

Λύση

α) Εφόσον $2^x > 0$ και $5^{1-x} > 0$, λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση $\log 2^x = \log 5^{1-x}$. Έχουμε ισοδύναμα:

$x \log 2 = (1-x)\log 5 \Leftrightarrow$

$x \log 2 = \log 5 - x \log 5 \Leftrightarrow$

$x(\log 2 + \log 5) = \log 5 \Leftrightarrow$

$x \cdot \log 10 = \log 5 \Leftrightarrow$

$x = \log 5$.

Παρατήρηση

Εδώ θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε λογάριθμο οποιασδήποτε βάσης, αφού όμως εμφανίζεται ο αριθμός 10, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τον δεκαδικό λογάριθμο.

β) Έχουμε $3^{x-2} - 7^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 7^{1-x}$.

Εφόσον $3^{x-2} > 0$ και $7^{1-x} > 0$, λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση $\ln 3^{x-2} = \ln 7^{1-x}$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$(x-2)\ln 3 = (1-x)\ln 7 \Leftrightarrow$$

$$x\ln 3 - 2\ln 3 = \ln 7 - x\ln 7 \Leftrightarrow$$

$$x(\ln 3 + \ln 7) = \ln 7 + \ln 3^2 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 63}{\ln 21} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 3 + \ln 21}{\ln 21} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 21} + 1.$$

7. **Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$.**

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x).
β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$.

(Πανελλαδικές 2002)

Λύση

α) Για να έχει νόημα ο φυσικός λογάριθμος, πρέπει $\frac{e^{2x}-1}{e^x+5} > 0$ και $e^x + 5 \neq 0$.

Όμως $e^x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως αρκεί $e^{2x} - 1 > 0$.

Είναι $e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

> Για κάθε $a > 1$ ισχύει:
> $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$.

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A = (0, +\infty)$.

β) Έχουμε $f(x)=2\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)=\ln 2^2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)=\ln 4$.

Απολογαριθμίζοντας προκύπτει η εξίσωση $\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}=4 \Leftrightarrow e^{2x}-4e^x-21=0$.

- Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $e^x=y$, προκύπτει η εξίσωση:
  $y^2-4y-21=0 \Leftrightarrow (y-7)(y+3)=0$, οπότε παίρνουμε:
  $y-7=0 \Leftrightarrow y=7$ ή $y+3=0 \Leftrightarrow y=-3$.
  Όμως πρέπει $y>0$, οπότε $y=7$.
- Από την αντικατάσταση $e^x=y$, είναι $e^x=7$, οπότε $x=\ln 7$, η οποία είναι δεκτή, αφού $\ln 7>0$.

γ) Έχουμε $f(x)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)>\ln 1$.

Απολογαριθμίζοντας προκύπτει η ανίσωση $\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}>1 \Leftrightarrow e^{2x}-e^x-6>0$.

- Από την αντικατάσταση $e^x=y$ προκύπτει η ανίσωση $y^2-y-6>0$.
  Έχουμε $y^2-y-6=0 \Leftrightarrow (y-3)(y+2)=0$, οπότε παίρνουμε:
  $y-3=0 \Leftrightarrow y=3$ ή $y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$.
  Επομένως έχουμε $y^2-y-6>0 \Leftrightarrow y<-2$ ή $y>3$.
- Από την αντικατάσταση $e^x=y$ είναι $e^x<-2$, το οποίο είναι αδύνατο, ή
  $e^x>3 \Leftrightarrow x>\ln 3$. Επομένως η αρχική ανίσωση αληθεύει όταν $x>\ln 3$.

8. Να βρεθούν οι τιμές του $x\in\mathbb{R}$, αν οι αριθμοί $\log 80$, $\log\sqrt{20(5^{x+1}+3^x)}$ και $x\log 3$ είναι με τη σειρά που δίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση

Οι αριθμοί $\log 80$, $\log\sqrt{20(5^{x+1}+3^x)}$ και $x\log 3$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $2\log\sqrt{20(5^{x+1}+3^x)}=\log 80+x\log 3$.

- Εφαρμόζοντας ιδιότητες λογαρίθμων, παίρνουμε διαδοχικά:
  $2\log\sqrt{20(5^{x+1}+3^x)}=\log 80+\log 3^x \Leftrightarrow \log[20(5^{x+1}+3^x)]=\log(80\cdot 3^x)$ (1).

- Απολογαριθμίζοντας την (1), προκύπτει η εκθετική εξίσωση:

$20(5^{x+1}+3^x)=80\cdot 3^x \Leftrightarrow 20\cdot 5^{x+1}+20\cdot 3^x=80\cdot 3^x \Leftrightarrow 100\cdot 5^x=60\cdot 3^x \quad (2).$

- Εφαρμόζοντας ιδιότητα των αναλογιών, από την εξίσωση (2) παίρνουμε:

$\left(\frac{5}{3}\right)^x=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x=\left(\frac{5}{3}\right)^{-1}$ και τελικά προκύπτει ότι $x=-1$.

9. **Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε χιλιάδες ευρώ), t έτη μετά την κυκλοφορία του στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 3.000 ευρώ, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής τιμής του. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t)=\alpha\cdot t+\beta$, $t\geq 0$, όπου $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, τότε:**

α) να αποδειχθεί ότι $Q(t)=3\cdot 4^{-t}$, $t\geq 0$,

β) να βρεθεί σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής τιμής του,

γ) να βρεθεί ο ελάχιστος χρόνος για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής τιμής του.

(Πανελλαδικές 2001)

Λύση

α) Αφού η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 3.000 ευρώ, έχουμε $Q(0)=3$, οπότε από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε $\ln Q(0)=\alpha\cdot 0+\beta$ και τελικά $\beta=\ln 3 \quad (1)$.

Επίσης, μετά από 6 μήνες η τιμή του προϊόντος είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής τιμής του, επομένως $Q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$, οπότε από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε:

$\ln Q\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha\cdot\frac{1}{2}+\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\beta=\ln\frac{3}{2} \quad (2).$

Λόγω της σχέσης (1), η (2) γίνεται $\frac{\alpha}{2}+\ln 3=\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=(\ln 3-\ln 2)-\ln 3$ και τελικά $\alpha=-2\ln 2 \Leftrightarrow \alpha=-\ln 4 \quad (3)$.

Έχουμε λοιπόν $\ln Q(t)=\alpha\cdot t+\beta \Leftrightarrow e^{\ln Q(t)}=e^{\alpha\cdot t+\beta} \Leftrightarrow Q(t)=(e^{\alpha})^t\cdot e^{\beta} \quad (4)$.

Από τις σχέσεις (1) και (3) η (4) γίνεται $Q(t)=(e^{-\ln 4})^t\cdot e^{\ln 3}=(e^{\ln 4})^{-t}\cdot e^{\ln 3}=3\cdot 4^{-t}$.

β) Αρκεί να επιλύσουμε την εκθετική εξίσωση $Q(t)=\frac{1}{16}Q(0)$. Έχουμε διαδοχικά:

$$Q(t)=\frac{1}{16}Q(0) \Leftrightarrow 3\cdot 4^{-t}=\frac{3}{16} \Leftrightarrow 4^{-t}=\frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^{-t}=4^{-2} \Leftrightarrow t=2.$$

Επομένως η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής μετά από 2 χρόνια.

γ) Αρκεί να επιλύσουμε την εκθετική ανίσωση $Q(t)\leq\frac{1}{9}Q(0)$. Έχουμε διαδοχικά:

$Q(t)\leq\frac{1}{9}Q(0) \Leftrightarrow 3\cdot 4^{-t}\leq\frac{1}{3} \Leftrightarrow 4^{-t}\leq\frac{1}{9} \Leftrightarrow 4^{t}\geq 3^{2}$. Λογαριθμίζοντας, παίρνουμε:

$$\ln 4^{t}\geq \ln 3^{2} \Leftrightarrow t\ln 4\geq 2\ln 3 \Leftrightarrow t\geq\frac{2\ln 3}{2\ln 2} \Leftrightarrow t\geq\frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Επομένως ο ελάχιστος χρόνος για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής τιμής του είναι τα $t=\frac{\ln 3}{\ln 2}$ χρόνια.

10. **α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{x}$, $x>1$ είναι γνησίως αύξουσα.**

β) Να λυθεί για $x>1$ η εξίσωση $x^{x}=27$.

Λύση

$e^{\ln x}=x$

α) Ισχύει ότι $x^{x}=e^{x\ln x}$, διότι $e^{x\ln x}=(e^{\ln x})^{x}=x^{x}$.

- Η συνάρτηση $y=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x_1, x_2>1$, με $x_1<x_2$, θα ισχύει η συνεπαγωγή $x_1<x_2 \Rightarrow \ln x_1<\ln x_2$.
- Επιπλέον, για κάθε $x>1$ έχουμε $\ln x>\ln 1=0$, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε $\begin{cases} x_1<x_2 \\ \ln x_1<\ln x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1\ln x_1<x_2\ln x_2$.
- Η συνάρτηση $y=e^{x}$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $x_1\ln x_1<x_2\ln x_2$ θα ισχύει η συνεπαγωγή $x_1\ln x_1<x_2\ln x_2 \Rightarrow e^{x_1\ln x_1}<e^{x_2\ln x_2}$.

Επομένως για κάθε $x_1, x_2 > 1$, με $x_1 < x_2$, έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση $x^x = 27$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) - 27 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 27$.

- Με δοκιμές βρίσκουμε ότι $g(3) = 0$, άρα το 3 είναι ρίζα της εξίσωσης.
- Από το προηγούμενο ερώτημα παίρνουμε ότι:

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - 27 < f(x_2) - 27 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.
Επομένως το 3 είναι μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ερωτήσεις σωστού – λάθους

Να χαρακτηρισθούν οι προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, με $\alpha > 0$.

   α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. ❑ Σ ❑ Λ

   β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $(0, +\infty)$. ❑ Σ ❑ Λ

   γ) Αν $\alpha = 1$, η f είναι σταθερή. ❑ Σ ❑ Λ

   δ) Αν $\alpha > 1$, η f είναι γνησίως αύξουσα. ❑ Σ ❑ Λ

   ε) Η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, 1)$. ❑ Σ ❑ Λ

2. Αν $\alpha > 1$ και $x, y > 0$, ισχύει ότι $\log_\alpha x < \log_\alpha y \Leftrightarrow x < y$. ❑ Σ ❑ Λ

3. Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \ln x$ είναι το σύνολο τιμών της $g(x) = e^x$. ❑ Σ ❑ Λ

4. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log x^2$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}$. ❑ Σ ❑ Λ

5. Η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα. ❑ Σ ❑ Λ

6. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \log_4 x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$. ❑ Σ ❑ Λ

7. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log|x|$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y. ❑ Σ ❑ Λ

8. Η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα. ❑ Σ ❑ Λ

9. Η συνάρτηση $f(x) = |\log x|$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$. ❑ Σ ❑ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α΄ Ομάδα

1. Να σχεδιαστούν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

β) $f(x) = \log x$, $g(x) = \log x - 2$

γ) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x-1)$

2. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x) = \log(2x-4)$ β) $g(x) = \log(x^2 - x - 6)$

γ) $h(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ δ) $t(x) = \frac{1}{\ln(x-3)}$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log(x+2) + \log(x-2) = \log 5$ β) $\log_2(x+1) + \log_2 x = \log_2 12$

γ) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2) - \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 3$ δ) $\log(x^3 + x) - \log(x^2+1) = 0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2\ln x = \ln(7x-10)$ β) $\ln x^2 = 1$

γ) $\ln x^2 = \ln^2 x$ δ) $\ln(x^2+1) - \ln x = \ln 2$

5. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log x^2 < \log 1$ β) $\log_{\frac{3}{5}} 2x \geq \log_{\frac{3}{5}} 12$

γ) $\ln(x^2 + 4) > \ln 4x$ δ) $\ln(x^2 + 6) \leq \ln 5x$

6. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

α) $\log 7$ και $\log 8$ β) $\ln\frac{1}{3}$ και $\ln\frac{1}{2}$ γ) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ και $\log_{\frac{1}{2}} \pi$

7. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 3\log y = -4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ \dfrac{x}{y} = e \end{cases}$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\log(2x^3 - x) - \log 2 = \log\left(\frac{5}{2}x^2 - 3\right)$ β) $\ln(x^3 + 2x^2) = \ln(13x - 10)$

9. Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις με τύπους:

α) $f(x) = \log|x|$ β) $g(x) = |\log x|$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $3^x = 5^{1-x}$ β) $7^{x-2} - 2^x = 0$

11. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\log|2x - 1| \geq \log 7$ β) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{x^2 - 8} \geq 0$

12. α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με $f(x) = \ln(\ln x)$.

β) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x΄x.

13. Να εξετασθεί αν τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
$f(x) = 2\ln(\sqrt{2}x)$ και $g(x) = \ln(1 - x)$.

14. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = 3\log x^2$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = 2\log 8$.

15. α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $2^{\log x} = x^{\log 2}$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $4^{\log x} - 6 \cdot x^{\log 2} + 8 = 0$.

16. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων με τύπους:

α) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ β) $g(x) = \dfrac{\log(x^2 - 1)}{x^2 - 4}$ γ) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$

17. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{\ln x - 2}{\ln x - 1} \geq 0$ β) $\dfrac{\log(x - 1)}{\ln x + 2} < 0$ γ) $\dfrac{1 + \log x}{3 + \log x} \geq 1$

18. Να γίνει πίνακας προσήμων σε κάθε περίπτωση:

α) $A = (2 - x)\ln(x - 1)$ β) $B = (x^3 - x)\log(1 - x)$

γ) $\Gamma = (x^2 - x)(2 - \ln x)$

19. Να λυθεί η ανίσωση $3^{\ln x^3 + 1} - 2 \cdot 3^{\ln x} - 1 < 0$.

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^{\ln x} = e$ β) $x^{\log x} = 10.000$

γ) $\ln(\ln(\ln x)) = 0$ δ) $x^x = 1$

Β΄ Ομάδα

21. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $x^{\ln x - 4} = x \cdot e^{-6}$ β) $(x + 1)^{\ln(x+1)} = e^2(x + 1)$

γ) $e \cdot x^{\ln x} = x^2 \cdot \sqrt{x}$ δ) $x^{\ln x^2} = e \cdot x, \ \ x > 0$

22. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \log_x y = \dfrac{2}{3} \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_2 32 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln x \cdot \ln y = \ln \dfrac{1}{e} \end{cases}$

23. α) Να αποδειχθεί ότι $x^{\ln y} = y^{\ln x}$, με $x, y > 0$.

β) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x^{\ln y} + y^{\ln x} = 2e \\ \ln\sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$

24. Να βρεθούν τα x, y > 0, ώστε να ισχύει η σχέση $\log\sqrt{x \cdot y} = \log x - \log y = 2$.

25. Δίνεται η εξίσωση $(2x+1)\left(\log(2e) - \log e\right) = \log\left[2(5 \cdot 2^{x-1} - 1)\right]$.

α) Να βρεθεί για ποια x έχει νόημα.

β) Να λυθεί η εξίσωση.

26. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $2 \cdot 2^{\ln x^2} - 2^{\ln x} < 1$ **β)** $3^{\ln x^2 + 1} - 4 \cdot 3^{\ln x} + 1 \geq 0$

27. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x > 2$ **β)** $3^{x+1} \leq 5^{2x}$

28. Να λυθεί η ανίσωση $3^{2\ln x} - 3^{\ln x + 1} + e^{2\ln\sqrt{2}} \leq x^{\ln 3} - 1$.

29. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $ημe^x = 0$ **β)** $συνe^x = 1$

30. Να βρεθούν οι τιμές του $α \in \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \log_{\frac{α-2}{1-2α}} x$ να είναι:

α) λογαριθμική, **β)** γνησίως αύξουσα, **γ)** γνησίως φθίνουσα.

31. Έστω η λογαριθμική συνάρτηση f με $f(x) = \log(αx^2 + 1)$, με $α \geq 0$.

Α. α) Να εξηγηθεί γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να εξετασθεί αν είναι άρτια ή περιττή.

Β. Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης να διέρχεται από το σημείο $M(5, \log 51)$. Για $α = 2$ να λυθεί:

α) η εξίσωση $f(x) = 1$,

β) η ανίσωση $f(x) \leq \log(\log 1.000)$.

32. Να λυθεί η εξίσωση $9^{\frac{x+1}{2}} + 7 \cdot 3^x = 35 \cdot 5^{x-1}$.

33. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι περιττή.

γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(0)$ και $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(x+1)=0$.

(Πανελλαδικές 2001)

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha(\log x)^4+8(\log x)^2\cdot\log(100x)$, $x>0$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Α. Αν $f(10)=25$, να αποδειχθεί ότι $\alpha=1$.

Β. Για την τιμή $\alpha=1$:

α) να αποδειχθεί ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x)=(\log^2 x+4\log x)^2$,

β) να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

(Πανελλαδικές 2001)

35. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο:
$f(x)=\sqrt{\ln^3 x-7\ln^2 x+16\ln x-12}$.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\ln(e^{2x}-2e^x+3)$ και $g(x)=\ln 3+\ln(e^x-1)$.

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)>2g(x)$.

(Πανελλαδικές 2003)

37. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+\ln(1-e^{-x})$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\ln(e^x-1)$.

γ) Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα x΄x.

δ) Να βρεθεί για ποια x η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

38. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(11x^2-10x+21)-\ln x^2-\ln e^{\ln 10}$.

Α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Β. Αν $x>0$, να βρεθούν:

α) τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x,

β) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥΣ

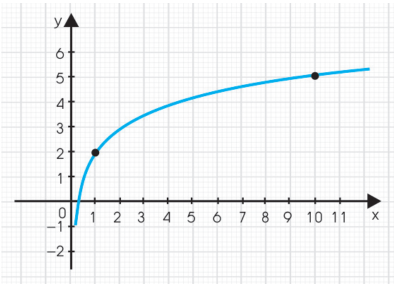
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \alpha \cdot \log x + \beta$. Να βρεθούν:

α) τα α και β,

β) το σημείο τομής με την ευθεία $y = 4$,

γ) μια συνάρτηση $g(x)$ τέτοια ώστε $f(x) = \log[g(x)]$.



Λύση

α) Η γραφική παράσταση διέρχεται από τα $(1, 2)$ και $(10, 5)$.

Επομένως $\alpha\log 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 2$ και $\alpha\log 10 + \beta = 5 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$.

Άρα $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.

β) $3\log x + 2 = 4 \Leftrightarrow 3\log x = 2 \Leftrightarrow \log x = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{100}.$

Το ζητούμενο σημείο είναι το $A\left(\sqrt[3]{100},\ 4\right)$.

γ) $3\log x + 2 = \log[g(x)] \Leftrightarrow \log x^3 + \log 100 = \log[g(x)] \Leftrightarrow$

$\log\left(100x^3\right) = \log[g(x)] \Leftrightarrow g(x) = 100x^3.$

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(\dfrac{\ln\alpha-2}{\ln\alpha+1}\right)^x$, $\alpha>0$.

Α. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες ορίζεται στο $\mathbb{R}$ η f.

Β. Να βρεθούν οι τιμές του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ. Αν $\alpha=e^3$, να λυθεί η εξίσωση $2^2f(2x+1)+2^6f(x+3)=8\left[f(x)+1\right]$.

Λύση

Α. Για να ορίζεται η συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, πρέπει:

$$\frac{\ln\alpha-2}{\ln\alpha+1}>0\Leftrightarrow \ln\alpha>2 \text{ ή } \ln\alpha<-1\Leftrightarrow \alpha>e^2 \text{ ή } \alpha<e^{-1}.$$

Όμως $\alpha>0$, άρα $\alpha\in(0,\ e^{-1})\cup(e^2,\ +\infty)$.

Β. Για να είναι η συνάρτηση γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, πρέπει $0<\dfrac{\ln\alpha-2}{\ln\alpha+1}<1$.

- $\dfrac{\ln\alpha-2}{\ln\alpha+1}>0\Leftrightarrow \alpha\in(0,\ e^{-1})\cup(e^2,\ +\infty)$ (1)
- $\dfrac{\ln\alpha-2}{\ln\alpha+1}<1\Leftrightarrow \dfrac{\ln\alpha-2}{\ln\alpha+1}-1<0\Leftrightarrow \dfrac{\ln\alpha-2-\ln\alpha-1}{\ln\alpha+1}<0\Leftrightarrow \dfrac{-3}{\ln\alpha+1}<0\Leftrightarrow$
  $\ln\alpha+1>0\Leftrightarrow\ln\alpha>-1\Leftrightarrow \alpha>e^{-1}$ (2)

Συναληθεύοντας τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε $\alpha\in\left(e^2,\ +\infty\right)$.

Γ. Αν $\alpha=e^3$, είναι $f(x)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$. Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$4\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1}+64\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}=8\left(\frac{1}{4}\right)^x+8\Leftrightarrow$$

$$4\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}\cdot\frac{1}{4}+64\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=8\left(\frac{1}{4}\right)^x+8\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}+\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-8\left(\frac{1}{4}\right)^x-8=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}-7\left(\frac{1}{4}\right)^x-8=0.$$

Θέτουμε $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\omega>0$.

Είναι $\omega^2-7\omega-8=0\Leftrightarrow\omega=\dfrac{7\pm9}{2}=8$ ή -1 (απορρίπτεται).

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x=8\Leftrightarrow 2^{-2x}=2^3\Leftrightarrow -2x=3\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\ln\left(\sqrt[5]{x^3}\right)+\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{2}{5}\ln x+3\ln\left(\sqrt[10]{x^2}\right)^3$

β) $\log\sqrt{3}+2\log 5-0,5\log 12+1$

γ) $\dfrac{1}{3}\log 8-\dfrac{1}{2}\log 27+3\log 5+\dfrac{1}{2}\log 48-\dfrac{3}{2}\log 625+\log\left(\dfrac{3}{64}\right)$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5^{x+1}=2^{x-1}$

β) $\log(x-2)+\log(x-3)=\log 2$

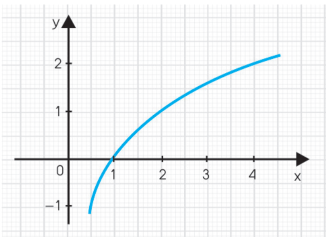
γ) $\log(1+x)=\log(1-x)$

δ) $\log(1+x)=1+\log(1-x)$

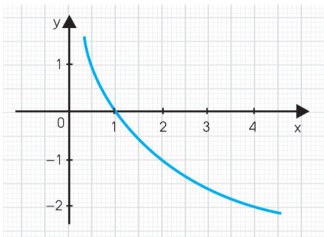
ε) $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$

στ) $\ln\dfrac{x}{2}=\dfrac{\ln x}{2}$

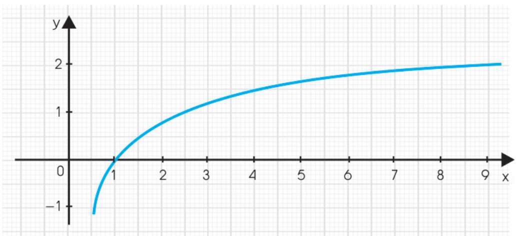
3. Να προσδιοριστεί η τιμή του α στις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων της μορφής $\log_\alpha x$.



(α)



(β)



(γ)

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(e^{3x}-2e^{2x}-3e^{x}+6)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=\ln 2$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)\geq \ln 6$.

5. α) Να λυθεί η εξίσωση $6^{\ln^2 x}-6^{1-\ln^2 x}=5$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $6^{\ln^2 x}-6^{1-\ln^2 x}\leq 5$.

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=\ln\sqrt{2^x-7}$ και $g(x)=\sqrt{\ln(2^x-7)}$.

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$.

γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(7)$ και $g(7)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=2$.

8. Να λυθεί η ανίσωση $x(\log 5-1)<\log(1+2^x)-\log 6$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+\ln\dfrac{e^x-3}{e^x+5}$. Να βρεθούν:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f,

β) οι τιμές του $\theta\in(-\pi,\pi)$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $B\left(\ln 4,\ \ln\left(\dfrac{8}{9}\sigma\upsilon\nu\theta\right)\right)$,

γ) οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον άξονα x΄x.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-2}{e^x-1}\right)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=-\ln 2$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x)\leq 0$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{2x+1}\right)+\ln e^2$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση είναι πάνω από την ευθεία $y=2$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=-1$.

12. **α)** Να βρεθεί η τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-\alpha x^2+\alpha x-1$ να έχει ως παράγοντα το $2x-1$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(\sigma\upsilon\nu\vartheta)+\ln(2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+3)=\ln(3\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+1)$, $\vartheta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

13. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες έχει μοναδική λύση το σύστημα

$$\begin{cases}\lambda e^x+e^y=\lambda\\ 3e^x+(\lambda+2)e^y=-1\end{cases}$$

14. **α)** Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases}\lambda(\lambda\cdot 3^x+6^y)=1\\ \lambda(3^x-6^y)=1\end{cases}$$ έχει μοναδική λύση.

β) Να βρεθεί η λύση για $\lambda=-2$.

5ο ΦΥΛΛΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε αριθμούς $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδειχθεί ότι ισχύει $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$.

10 Μονάδες

Β. Να χαρακτηρισθούν οι προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log(x-3)$ είναι το $[3, +\infty)$. ❑ Σ ❑ Λ

β) Για κάθε $x,\ y > 0$ ισχύει ότι $\log x \cdot \log y = \log(x+y)$. ❑ Σ ❑ Λ

γ) Η λύση της εξίσωσης $\log x = -1$ είναι το $x = -10$. ❑ Σ ❑ Λ

δ) Η συνάρτηση $f(x) = -\ln x$ είναι γνησίως φθίνουσα. ❑ Σ ❑ Λ

ε) Για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $e^{\ln x} = x$. ❑ Σ ❑ Λ

5 Μονάδες

Γ. Να αντιστοιχισθεί κάθε εκθετική εξίσωση της στήλης Α στις λύσεις της της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $4^{2x} \cdot 8^{x} = 128$	α. $x = -4$
2. $5^{3x+1} : 25^{x} = \frac{1}{25}$	β. $x = 0$
3. $9^{-x+\frac{1}{2}} \cdot 27^{x} = 3$	γ. $x = -3$
4. $49^{3x+2} : \left(\frac{1}{7}\right)^{-5x} = 1$	δ. $x = 1$
	ε. $x = -1$

10 Μονάδες

ΘΕΜΑ 2

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $2^{3x} + 2^{2x+1} - 13 \cdot 2^{x} + 10 = 0$

12,5 Μονάδες

β) $6 \cdot \sqrt{2}^{\,2x+2} + 10 \cdot 5^{x+1} = 4^{\frac{x}{2}+1} + 7 \cdot 125^{\frac{x+2}{3}}$

12,5 Μονάδες

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f. **5 Μονάδες**

β) Να αποδεχθεί ότι η f είναι περιττή. **6 Μονάδες**

γ) Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(0)$ και $f\left(\frac{3}{4}\right)$. **6 Μονάδες**

δ) Να βρεθεί το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.

8 Μονάδες

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln\frac{12-16x}{x-7}}$ και $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\ln x}$.

Να βρεθεί το σύνολο στο οποίο:

α) ορίζονται συγχρόνως και οι δύο συναρτήσεις,

8 Μονάδες

β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

17 Μονάδες