Ο γρίφος του μαθηματικού Διόφαντου

Στον τάφο του μαθηματικού Διόφαντου βρέθηκε ένα επίγραμμα, που είναι ένας γρίφος για τη ζωή του. Το παραθέτουμε μεταφρασμένο στη νεοελληνική γλώσσα:*

> «ΑΥΤΟΣ ΕΙΝΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ Ο ΤΑΦΟΣ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ. ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΘΑΥΜΑΣΙΟ ΟΤΙ ΑΥΤΟΣ Ο ΤΑΦΟΣ ΜΑΡΤΥΡΑ ΜΕ ΕΝΑ ΤΕΧΝΑΣΜΑ ΤΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΤΑΞΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΠΑΙΔΙ ΚΑΙ ΜΕ ΤΗΝ ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΑΚΟΜΑ ΕΝΟΣ ΔΩΔΕΚΑΤΟΥ ΤΑ ΜΑΓΟΥΛΑ ΤΟΥ ΓΕΜΙΣΑΝ ΜΕ ΓΕΝΙΑ. ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ ΑΚΟΜΑ, ΑΝΑΨΕ ΤΗ ΓΑΜΗΛΙΑ ΛΑΜΠΑΔΑ ΚΑΙ ΠΕΝΤΕ ΧΡΟΝΙΑ ΜΕΤΑ ΤΟΝ ΓΑΜΟ ΤΟΥ ΑΠΕΚΤΗΣΕ ΕΝΑΝ ΓΙΟ. ΑΛΙΜΟΝΟ, ΠΟΛΥΑΓΑΠΗΜΕΝΟ, ΑΤΥΧΟ ΠΑΙΔΙ, ΠΕΘΑΝΕΣ, ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕΣ ΜΟΝΟ ΤΑ ΜΙΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΧΡΟΝΙΑ ΤΟΥ ΠΑΤΕΡΑ ΣΟΥ. ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΟ ΠΕΝΘΟΣ ΤΟΥ, ΓΙΑ ΑΛΛΑ ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΠΟΥ ΕΖΗΣΕ, Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΣΤΗΝ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ».

Η λύση του γρίφου είναι ότι ο μαθηματικός Διόφαντος έζησε ογδόντα τέσσερα χρόνια. Για δεκατέσσερα χρόνια ήταν παιδί, για επτά χρόνια νέος. Μετά από δώδεκα χρόνια παντρεύτηκε, δηλαδή στα τριάντα τρία του. Τον πέμπτο χρόνο του γάμου του, σε ηλικία τριάντα οκτώ ετών, απέκτησε έναν γιο, ο οποίος έζησε τα μισά χρόνια από τον Διόφαντο, δηλαδή σαράντα δύο χρόνια, και πέθανε όταν ο Διόφαντος ήταν ογδόντα. Μετά από τέσσερα χρόνια πέθανε κι ο ίδιος.

** Ο Διόφαντος ο Αλεξανδρεύς ήταν Έλληνας μαθηματικός του 3ου αιώνα μ.Χ. (περίπου 210 - 290 μ.Χ.)*

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Αρχαίος ελληνικός γρίφος

Αἱ Χάριτες μήλων καλάθους φέρον, ἐν δὲ ἑκάστῃ ἶσον ἔην πλῆθος. Μοῦσαι σφίσιν ἀντεβόλησαν ἐννέα καὶ μήλων σφέας ᾔτεον· αἱ δ᾽ ἄρ᾽ ἔδωκαν ἶσον ἑκάστη πλῆθος, ἔχον δ᾽ ἴσα ἐννέα καὶ τρεῖς. Εἰπὲ πόσον μὲν δῶκαν, ὅπως δ᾽ ἴσα πᾶσα ἔχεσκον.

Οι τρεις Χάριτες κρατούσαν καλάθια με μήλα, κι είχαν η καθεμία τον ίδιο αριθμό μήλων. Οι εννέα Μούσες τις συνάντησαν και ζήτησαν κι αυτές μήλα. Οι Χάριτες έδωσαν στην καθεμία τον ίδιο αριθμό μήλων, ώστε όλες τους, και οι εννέα και οι τρεις, να έχουν τον ίδιο αριθμό. Βρείτε πόσα μήλα είχε η καθεμία.

Λύση: Στην αρχή οι τρεις Χάριτες είχαν από τέσσερα μήλα και στο τέλος όλες από ένα. Τα αρχικά μήλα ήταν δώδεκα (ή οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του δώδεκα).

ἀριθμὸς ἄπειρος πλήθει
Πλάτων, 427-347 π.Χ., φιλόσοφος
μτφρ.: το πλήθος των αριθμών είναι άπειρο.

πάντα κατ᾽ ἀριθμῶν γίγνονται
Πυθαγόρας, περ. 580-490 π.Χ., αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος
μτφρ.: τα πάντα γίνονται σύμφωνα με αριθμούς.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει διακόσιους μαθηματικούς γρίφους ή αριθμητικά παιχνίδια, που σκοπό έχουν να διασκεδάσουν όσους θα ασχοληθούν μαζί τους. Απευθύνεται σε ανθρώπους όλων των ηλικιών, καθώς έγινε προσπάθεια οι απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις να μηδενιστούν ή έστω να ελαχιστοποιηθούν.

Το επίπεδο δυσκολίας είναι αρκετά ευρύ. Έτσι, ακόμα και οι μικροί μαθητές του δημοτικού θα βρουν αρκετά αριθμητικά παιχνίδια για να ασχοληθούν. Για τους μαθητές του γυμνασίου και του λυκείου υπάρχουν πολλοί γρίφοι σχετικά με τα θέματα που διδάσκονται στο σχολείο.

Ο δεύτερος στόχος του βιβλίου είναι παιδαγωγικός και διδακτικός. Οι μαθηματικοί γρίφοι μάς οδηγούν στο να ανακαλύψουμε μεθόδους επίλυσης προβλημάτων και τεχνικές αναζήτησης λύσεων. Γι' αυτό και πολλοί από αυτούς αναπτύσσονται μέσα σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο καθημερινών καταστάσεων. Όντας ενσωματωμένοι σε μικρές, φανταστικές ιστορίες, έχουν σκοπό να εξάψουν το ενδιαφέρον του αναγνώστη, αλλά κυρίως να του δείξουν ότι πολλά προβλήματα της ζωής που σχετίζονται με τους αριθμούς πρέπει αρχικά να μετατρέπονται σε μαθηματικές αναζητήσεις, έπειτα να καταστρώνεται μια τεχνική επίλυσής τους και στο τέλος με τη χρήση απλών αλγεβρικών πράξεων να οδηγούνται στη λύση.

Είναι γνωστό ότι ο κατεξοχήν παιδαγωγικός τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών είναι αυτός που τα συνδέει με καταστάσεις της ζωής, ώστε να γίνονται προσιτά και αγαπητά στους μαθητές. Τα μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται με παιγνιώδη τρόπο, αφού είναι αποδεδειγμένο ότι το παιχνίδι αποτελεί σημαντικό παιδαγωγικό και διδακτικό μέσο. Τα μαθηματικά γίνονται διασκεδαστικά και ψυχαγωγικά όταν αντιμετωπίζονται σαν παιχνίδια της λογικής και της ζωής.

Το βιβλίο απευθύνεται επίσης στους μαθητές που συμμετέχουν στους εγχώριους μαθηματικούς διαγωνισμούς της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, καθώς και στις Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Η θεματολογία των γρίφων θα τους βοηθήσει ώστε να προετοιμαστούν καλύτερα.

Το βιβλίο χωρίζεται σε τρία μέρη. Αρχικά δίνονται οι γρίφοι ενοποιημένοι σε διάφορες θεματολογίες. Πολλές φορές πριν αυτούς παρατίθενται μικρά κατατοπιστικά ένθετα που αφορούν τις σημαντικότερες μαθηματικές έννοιες της ενότητας. Στη συνέχεια ακολουθούν οι λύσεις. Στην ενότητα αυτή έχουν ενσωματωθεί και κάποιες βασικές γνώσεις άλγεβρας, οι οποίες διδάσκονται στο σχολείο και πιθανόν θα χρησιμεύσουν στην προσπάθεια εύρεσης λύσης. Είναι όμως πολύ πιθανό ο αναγνώστης να καταφέρει να λύσει τους γρίφους με απλές, λογικές τεχνικές, που ισοδυναμούν με την τυποποιημένη άλγεβρα. Με την ολοκλήρωση της μελέτης του βιβλίου θα έχουν γίνει κτήμα του έννοιες και τεχνικές χωρίς ιδιαίτερο κόπο, μέσω μιας διασκεδαστικής ενασχόλησης.

Οι λύσεις πρέπει αρχικά να χρησιμοποιηθούν ως μια βοήθεια, για να συνεχιστεί η προσπάθεια επίλυσης των γρίφων. Επίσης, δίνουν την ευκαιρία σύγκρισης με τις λύσεις του αναγνώστη. Το κάθε πρόβλημα επιδέχεται πολλές λύσεις. Όσο πιο μαθηματικές, τόσο πιο ακριβείς και πλήρεις είναι, όμως εμείς δε δίνουμε απαραίτητα τέτοιες λύσεις. Δίνουμε αυτές που είναι πιο απλές, πιο προσιτές και δεν απαιτούν μαθηματικές γνώσεις ή τύπους.

Στο τελευταίο μέρος του βιβλίου υπάρχουν μόνο τα αποτελέσματα των γρίφων. Εκεί μπορεί να καταφεύγει ο αναγνώστης για να ελέγχει κάθε φορά αν βρήκε το σωστό αποτέλεσμα. Η ικανοποίηση από την εύρεση της λύσης είναι πάντα τόσο μεγάλη, που καλό είναι να αποφεύγεται μετά από μικρή προσπάθεια η ανάγνωση ολόκληρης της λύσης. Την αληθινή ομορφιά των γρίφων θα την ανακαλύψετε μόνο στην αναζήτηση και όχι στην ανάγνωση της λύσης. Επίσης είναι καλό να λύνονται με όσο το δυνατόν λιγότερη χρήση του υπολογιστή τσέπης και των δοκιμών.

Κάποιοι από τους γρίφους είναι παρόμοιοι με γνωστούς γρίφους της βιβλιογραφίας, αλλά οι περισσότεροι είναι πρωτότυποι, ιδίως αυτοί που περιλαμβάνονται στις μικρές ιστορίες και δεν αναφέρεται ξεκάθαρα η μαθηματική προβληματική.

Στους γρίφους με μέτρια δυσκολία υπάρχει ένα αστεράκι δίπλα στον αριθμό της εκφώνησης, ενώ σε αυτούς που είναι ιδιαίτερα δύσκολοι υπάρχουν δύο αστεράκια.

Θα ήμουν υπόχρεος σε όσους αναγνώστες μού επισημάνουν λάθη ή κάνουν οποιαδήποτε πρόταση στο email: panosmpt@gmail.com.

Θα ήθελα, και από τη θέση αυτή, να ευχαριστήσω τον Δημήτριο Μπετσάκο, καθηγητή του μαθηματικού τμήματος του ΑΠΘ, και τον Κωνσταντίνο Καραγιαννίδη, πτυχιούχο ΤΗΜΜΥ/ΠΣ ΑΠΘ, που διάβασαν μεγάλο μέρος του βιβλίου και πρότειναν λύσεις και μεθόδους. Επίσης τον κύριο Κωνσταντίνο Δόρτσιο, π. σύμβουλο μαθηματικών, ο οποίος στάθηκε η αφορμή για να ξεκινήσω την ενασχόλησή μου με τους μαθηματικούς γρίφους και με τις συζητήσεις μας με βοήθησε να επινοήσω πολλούς από αυτούς.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τις κυρίες Κική Υψηλάντη και Βασιλεία Τσεντικοπούλου που ζωγράφισαν τις εικόνες του βιβλίου.

Αριθμοί

- Οι φυσικοί αριθμοί είναι οι: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,... Είναι άπειροι, δηλαδή δεν τελειώνουν ποτέ. Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε άρτιους και περιττούς.
- Οι περιττοί αριθμοί (μονοί) είναι οι: 1, 3, 5, 7, 9, 11,... Έχουν γενική μορφή 2ν + 1, όπου ν ένας φυσικός αριθμός.
- Οι άρτιοι αριθμοί (ζυγοί) είναι οι: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12,... Έχουν γενική μορφή 2ν, όπου ν ένας φυσικός αριθμός.
- Ακέραιοι ονομάζονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίθετούς τους, και το 0, δηλαδή οι: 0, ±1, ±2, ±3, ±4,...
- Πρώτοι ονομάζονται οι αριθμοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, δηλαδή οι: 2, 5, 7, 11,...

Το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής λέει ότι κάθε θετικός ακέραιος αριθμός γράφεται ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με μοναδικό τρόπο.

Παράδειγμα: $96 = 2^5 \cdot 3$. Οι αριθμοί 2^5, 3, όπως και οι 2^4, 2^3, 2^2, 2, αλλά και τα συνδυαστικά γινόμενά τους $3 \cdot 2^4$, $3 \cdot 2^3$, $3 \cdot 2^2$, $3 \cdot 2$, ονομάζονται παράγοντες του αρχικού αριθμού.

Όταν ένας αριθμός ψ δε διαιρείται ακριβώς με έναν αριθμό α, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αρχικού αριθμού με τον αριθμό α είναι πάντα μεγαλύτερο του 0 και μικρότερο του α. Αν είναι x το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της διαίρεσης, τότε θα ισχύει $ψ = α \cdot x + υ$, με το $υ < α$.

Κάθε ψηφίο, ανάλογα με τη θέση του, έχει και διαφορετική αξία. Η δεκαδική τάξη ενός ψηφίου μπορεί να είναι μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες κτλ. Έτσι, για κάθε αριθμό μπορούμε να βρούμε το ανάπτυγμά του.

Παράδειγμα: Το ανάπτυγμα του αριθμού 3.456 είναι το:
$3.456 = 3 \cdot 1.000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$.

Παιχνίδια με πράξεις

1. Χρησιμοποιώντας μόνο μία φορά τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 ή κάποιους από αυτούς και τις τέσσερις στοιχειώδεις πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση), μπορείτε να βρείτε ως αποτέλεσμα τους αριθμούς 32, 69, 87, 95 και 99;

Παράδειγμα: Εμείς ας φτιάξουμε τον αριθμό 56: $(3 \cdot 5 – 1) \cdot 4 = 56$.

2. Οι μόνοι αριθμοί μέχρι το 100 που δεν είναι δυνατόν να βρούμε ως αποτέλεσμα με το προηγούμενο παιχνίδι είναι οι: 76, 79, 86, 92, 94, 97 και 98. Αυτούς τους αριθμούς προσπαθήστε να τους φτιάξετε χρησιμοποιώντας και την ύψωση σε δύναμη. Έναν μόνο δε θα καταφέρετε να βρείτε.

Παράδειγμα: Εμείς ας βρούμε ως αποτέλεσμα τον αριθμό 92: $3^4 + 2 \cdot 5 + 1 = 92$.
(Ο συμβολισμός 3^4 σημαίνει $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.)

3. Έχετε τα εννιά ψηφία 1, 2, 3... 9 στη συγκεκριμένη σειρά. Αν παρεμβάλετε μεταξύ τους το σύμβολο + (την πράξη της πρόσθεσης), ποιος είναι ο μεγαλύτερος διψήφιος αριθμός που μπορείτε να βρείτε;
Μπορείτε να φτιάχνετε και διψήφιους αριθμούς.

Παράδειγμα: $12 + 3 + 45 + 6 + 7 + 8 + 9 = 90$.
Τον αριθμό 100 δε θα καταφέρετε να τον υπολογίσετε με τα εννιά ψηφία. Προσπαθήστε να τον υπολογίσετε χρησιμοποιώντας λιγότερα ψηφία.

Παράδειγμα: Με τα ψηφία από το 1 έως το 7: $1 + 23 + 4 + 56 + 7 = 91$.

4. Στο προηγούμενο παιχνίδι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και την αφαίρεση. Ξαναπροσπαθήστε να βρείτε ως αποτέλεσμα το 100 χρησιμοποιώντας και τα εννιά ψηφία, αλλά και τον ίδιο αριθμό των συμβόλων συν (+) και πλην (–). Μπορείτε να φτιάχνετε και διψήφιους ή τριψήφιους αριθμούς.

5. ★ Έχετε στη διάθεσή σας οκτώ διαφορετικούς αριθμούς. Τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και τα διαφορετικά από αυτούς τετράγωνά τους (9, 16, 25). Με αυτούς τους αριθμούς και τις τέσσερις στοιχειώδεις πράξεις να βρείτε τον αριθμό 12.345, χρησιμοποιώντας μία φορά κάθε αριθμό.

6. Έχετε τους δέκα αριθμούς 1, 2, 3 ... 10. Ξεκινάτε από έναν από αυτούς, όποιον θέλετε, και με όποια σειρά θέλετε είτε πολλαπλασιάζετε με τους άρτιους είτε αφαιρείτε τους περιττούς. Χρησιμοποιώντας όλους τους αριθμούς μία φορά, πώς θα βρείτε τελικό αποτέλεσμα το 0;

Παράδειγμα: $\mathbf{6 - 3} = 3$, $3 \cdot \mathbf{4} = 12$, $12 - \mathbf{9} = 3$, $3 \cdot \mathbf{8} = 24$,
$24 - \mathbf{5} - \mathbf{7} = 12$, $12 \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{10} = 240$, $240 - \mathbf{1} = 239 \neq 0$.

7. Αν προσθέσετε τους αριθμούς 1 έως 4, βρίσκετε αποτέλεσμα 10. Βρείτε και άλλους τρόπους να υπολογίσετε το 10, χρησιμοποιώντας και τους τέσσερις αριθμούς, οποιεσδήποτε από τις τέσσερις πράξεις και την ύψωση σε δύναμη.

8. Βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από εννιάρια ή από οκτάρια ή από επτάρια κτλ. με τα οποία μπορείτε να υπολογίσετε τον αριθμό 1.000. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις τέσσερις στοιχειώδεις πράξεις και την ύψωση σε δύναμη. Επίσης μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα ψηφία έτσι ώστε να σχηματίσετε πολυψήφιους αριθμούς.

Παράδειγμα: Με οκτώ εννιάρια μπορούμε με τον παρακάτω τρόπο να βρούμε

το 1.000: $\frac{9.999 - 999}{9} = \frac{9.000}{9} = 1.000.$

9. ★ Ξεκινάτε από έναν οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό. Αν είναι ζυγός, διαιρείτε διά 2, αν είναι περιττός, πολλαπλασιάζετε επί 3 και αφαιρείτε 1. Με τα αποτελέσματα κάνετε συνεχώς αυτή τη διαδικασία μέχρι να βρείτε τον αριθμό με τον οποίο ξεκινήσατε. Ποιοι είναι οι αριθμοί από τους οποίους αν ξεκινήσετε καταλήγετε στους ίδιους;

Παράδειγμα: $5 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5$.

Μαγικά τετράγωνα 3x3

10. Συμπληρώστε τα μαγικά τετράγωνα έτσι ώστε το άθροισμα, οριζοντίως, καθέτως και διαγωνίως να είναι το ίδιο. Στο πρώτο και στο δεύτερο μαγικό τετράγωνο συμπληρώστε τους αριθμούς που λείπουν από το 1 έως το 9, στο τρίτο τους αριθμούς που λείπουν από το 5 έως το 13, ενώ στο τέταρτο όποιους χρειάζεται.

Α.

		4
7		
	1	

Β.

		2
	1	

Γ.

8		
	11	

Δ.

		66
		16
		83

Δύο κρυπτάριθμοι πρόσθεσης

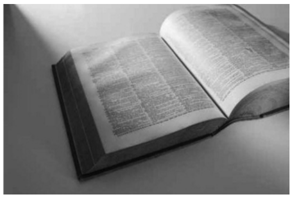
11. ★ Βρείτε με ποια νούμερα μπορείτε να αντικαταστήσετε τα παρακάτω γράμματα ώστε να ισχύουν οι πράξεις. Οι λύσεις είναι πολλές. Βρείτε εκείνες με το μεγαλύτερο και το μικρότερο αποτέλεσμα. Κάθε διαφορετικό γράμμα αντιστοιχεί και σε διαφορετικό μονοψήφιο αριθμό.

Α.
$$\begin{array}{r} \mathrm{E\,\Pi\,T\,A} \\ +\ \mathrm{T\,P\,I\,A} \\ \hline \mathrm{\Delta\,E\,K\,A} \end{array}$$

Β.
$$\begin{array}{r} \mathrm{\Delta\,I\,A} \\ +\ \mathrm{E\,\Pi\,I} \\ \hline \mathrm{\Pi\,\Lambda\,H\,N} \end{array}$$

Αρίθμηση σελίδων

12. Για την αρίθμηση των σελίδων ενός λεξικού χρησιμοποιήθηκαν συνολικά 3.333 ψηφία (π.χ., για την αρίθμηση της σελίδας 31 απαιτούνται δύο ψηφία).
Πόσες σελίδες είχε το βιβλίο; Ποιο είναι το χιλιοστό ψηφίο της αρίθμησης του βιβλίου;

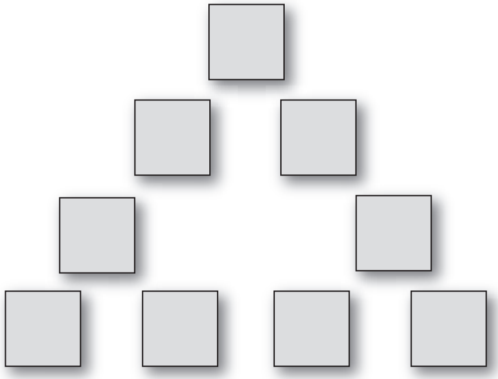


Απορία

13. ★ Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος;
Το 1 ή το 0,999… με άπειρα εννιάρια;

Συμπληρώστε τα τετράγωνα της πυραμίδας

14. Συμπληρώστε το παρακάτω τρίγωνο με τους αριθμούς από το 1 έως το 9, ώστε το άθροισμα σε καθεμία από τις τρεις πλευρές του τριγώνου να είναι ίσο με 21 (τέσσερις λύσεις). Όλες οι λύσεις συνολικά είναι δεκαέξι, για πέντε διαφορετικά αθροίσματα ανά πλευρά.



Τυπογραφείο

15. Ένα τυπογραφείο έχει εννιά τυπογραφικές μηχανές, άλλες παλιές και άλλες πιο καινούριες. Η πιο γρήγορη μηχανή μπορεί να τυπώνει σε δύο ώρες εκατό εφημερίδες. Άλλη μηχανή μπορεί να τυπώνει εκατό εφημερίδες σε τρεις ώρες, άλλη σε τέσσερις κτλ., μέχρι την ένατη μηχανή, που μπορεί να τις τυπώνει σε δέκα ώρες. Ο τυπογράφος θέλει να τυπώσει εκατό εφημερίδες σε μία ώρα. Τι μπορεί να κάνει;

Δύο κρυπτάριθμοι

16. ★ Βρείτε με ποια διαφορετικά νούμερα μπορείτε να αντικαταστήσετε τα παρακάτω γράμματα ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες πράξεις. Οι λύσεις είναι πολλές. Βρείτε εκείνες με το μεγαλύτερο και το μικρότερο αποτέλεσμα.

Α.

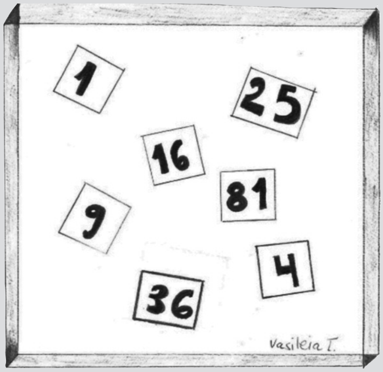
$$\begin{array}{r} \text{ΚΑΙ} \\ +\ \text{ΕΠΙ} \\ \hline \text{ΔΙΑ} \end{array}$$

Β.

$$\begin{array}{r} \text{ΚΑΙ} \\ -\ \text{ΕΠΙ} \\ \hline \text{ΔΙΑ} \end{array}$$

Τετράγωνα

Τετράγωνο ενός αριθμού είναι το γινόμενο του αριθμού με τον εαυτό του.
Παράδειγμα: Το τετράγωνο του 6 είναι: $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$.



17. Βρείτε έναν διψήφιο αριθμό, δύο τριψήφιους αριθμούς και έναν τετραψήφιο αριθμό που να είναι τετράγωνα και να αποτελούνται από ψηφία που να είναι επίσης τετράγωνα. (Όποτε λέμε τετράγωνα, θα εννοούμε διάφορα του μηδενός.)

18. Δείτε τον αριθμό 149. Στα ψηφία του μπορείτε να εντοπίσετε τα εξής τέσσερα τετράγωνα: 1, 4, 9, 49. Βρείτε άλλους πέντε τέτοιους τριψήφιους αριθμούς.

19. Προσέξτε το τετράγωνο του 12: $12^2 = 144$. Αν αντιστρέψετε τα ψηφία του 12, αντιστρέφονται και τα ψηφία του τετραγώνου του: $21^2 = 441$. Υπάρχει άλλος ένας διψήφιος αριθμός με αυτή την ιδιότητα. Βρείτε τον, καθώς και τους τριψήφιους και τετραψήφιους με την ίδια ιδιότητα.

20. ★ Βρείτε αριθμούς που να είναι τετράγωνα, καθώς και το άθροισμα και το γινόμενο των ψηφίων τους.

21. Ίσως γνωρίζετε ότι κάθε αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν άθροισμα τεσσάρων το πολύ τετραγώνων. Βρείτε ποιοι αριθμοί μέχρι το 30 γράφονται αποκλειστικά σαν άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων.

Παράδειγμα: Το 12 δε γράφεται αποκλειστικά ως άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων: $12 = 9 + 1 + 1 + 1$, αλλά και $12 = 4 + 4 + 4$.

22. Βρείτε ποιοι αριθμοί μέχρι το 100 μπορούν να γραφτούν σαν άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων διαδοχικών αριθμών. Γενικότερα γίνεται οι αριθμοί που είναι άθροισμα τεσσάρων τετραγώνων διαδοχικών αριθμών να είναι τετράγωνα;

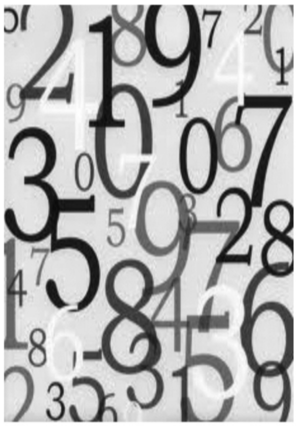
23. ★ Βρείτε τον μικρότερο και τον μεγαλύτερο διψήφιο, τριψήφιο κτλ. μέχρι δεκαψήφιο αριθμό που το άθροισμα και το γινόμενο των ψηφίων τους να είναι τετράγωνα.
Εμείς θα σας δώσουμε τους επταψήφιους. Ο μικρότερος επταψήφιος αριθμός είναι ο 1.111.122, με άθροισμα ψηφίων $9 = 3^2$ και γινόμενο $4 = 2^2$. Ο μεγαλύτερος επταψήφιος αριθμός είναι ο 9.999.922, με άθροισμα ψηφίων $49 = 7^2$ και γινόμενο $236.196 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 = 486^2$.

24. ★ Βρείτε τον μικρότερο (τουλάχιστον διψήφιο) και τον μεγαλύτερο αριθμό με διαφορετικά ψηφία, που το άθροισμα και το γινόμενο των ψηφίων τους να είναι τετράγωνα.

25. ★★ Βρείτε τρία τετράγωνα που το ένα να είναι μέσος όρος των άλλων δύο.

26. ★ Βρείτε το εκατοστό τετράγωνο που τελειώνει σε 89.

27. ★ Ξεκινώντας από τον αριθμό 2 και κινούμενοι με βήμα τεσσάρων μονάδων παίρνετε τους αριθμούς 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30... Παρατηρείτε ότι κανένας από αυτούς τους άρτιους αριθμούς δεν είναι τετράγωνο. Οι προηγούμενοι αριθμοί, αλλά και γενικότερα όσοι είναι της μορφής $4λ + 2$, δεν μπορεί να είναι τετράγωνα. Πώς εξηγείται αυτό;
Αλλά ούτε οι αριθμοί 3, 8, 13, 18... $5λ + 3$ είναι τετράγωνα. Εξηγήστε το και βρείτε και άλλες παρόμοιες μορφές αριθμών που δεν είναι τετράγωνα.



Τι μορφή έχουν τα τετράγωνα των περιττών αριθμών;
Βρείτε μια σχέση σαν αυτές που είδαμε προηγουμένως.

28. ★ Βρείτε τρεις αριθμούς (όχι υποχρεωτικά διαφορετικούς) που το άθροισμα και το γινόμενό τους να είναι τετράγωνα. Γίνεται αυτοί οι αριθμοί να μην είναι όλοι τετράγωνα;

29. ★ **α.** Αν έχετε τέσσερις αριθμούς που επαληθεύουν τη σχέση:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2,$$

μπορούν να είναι ανά δύο συνεχόμενοι αριθμοί;
Βρείτε τέτοιες τετράδες.

β. Γίνεται κάποιο τετράγωνο να είναι άθροισμα τριών διαδοχικών τετραγώνων;

30. Να βρείτε όλες τις τριάδες διαφορετικών ακέραιων αριθμών, από το 1 έως το 100, που να είναι τετράγωνα και ο λόγος των δύο αριθμών να ισούται με τον τρίτο.

31. ★ Έχετε τον αριθμό 25.411.681. Είναι το τετράγωνο του 5.041. Αν τον «κόψετε» στη μέση, ο δεύτερος αριθμός που προκύπτει είναι ο 1.681, τετράγωνο του 41. Αν «κόψετε» και το 1.681 «στη μέση», παίρνετε το 81, τετράγωνο του 9 και ομοίως μετά παίρνετε το 1. Πήρατε διαδοχικά τέσσερα τετράγωνα. Με τα τετράγωνα 49 και 1.681 ισχύει ότι και τα πρώτα τους «μισά» είναι τετράγωνα.
Βρείτε εξαψήφιους αριθμούς που να είναι τετράγωνα και τα δύο «μισά» τους να είναι επίσης τετράγωνα.

Οικογενειακές ηλικίες

32. ★ Ένα ζευγάρι συζητούσε για τις ηλικίες τους και για τις ηλικίες των παιδιών τους, που ήταν όλες διαφορετικές. Έκαναν τις εξής παρατηρήσεις: Το γινόμενο των ηλικιών των δύο μικρότερων παιδιών ισούται με την ηλικία της μητέρας, το γινόμενο των ηλικιών δύο παιδιών ισούται με την ηλικία του πατέρα, και το γινόμενο των ηλικιών των δύο μεγαλύτερων παιδιών ισούται με την ηλικία της γιαγιάς, που ήταν ακόμα μια νεότατη κυρία. Επίσης παρατήρησαν ότι από τις έξι ηλικίες οι τρεις είναι τετράγωνα.

Ύστερα ένας παρατήρησε ότι το τετράγωνο της ηλικίας ενός παιδιού δίνει την ηλικία ενός γονιού. Ποια ήταν η ηλικία των έξι μελών της οικογένειας;

Συμπλήρωση κενών σε μια ακολουθία αριθμών – Μοτίβα

Συμπληρώστε τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν ακολουθίες αριθμών που να ακολουθούνται από μια μαθηματική λογική.

33. 4 9 _ 49 121 169

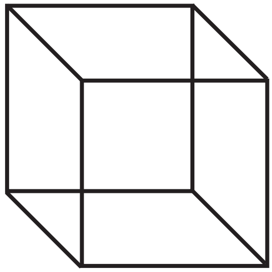
34. 7 12 15 _ 15 12 7

35. 1 2 9 22 41 66 _

Τετράγωνα και κύβοι (τρίτες δυνάμεις)

Κύβος ενός αριθμού είναι το γινόμενο του αριθμού με τον εαυτό του δύο φορές.
Παράδειγμα: Ο κύβος του 6 είναι: $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

36. Με τη χρήση των κύβων ακέραιων αριθμών, με πράξεις μόνο την πρόσθεση και, αν χρειαστεί, την αφαίρεση, υπολογίστε τα τετράγωνα των είκοσι αριθμών από το 1 έως το 20, χρησιμοποιώντας το πολύ τέσσερις κύβους.



37. Βρείτε έναν διψήφιο αριθμό που το πρώτο ψηφίο δείχνει από πόσα τετράγωνα φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος, και το δεύτερο ψηφίο δείχνει από πόσους κύβους φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος.

38. Ανάποδα από τον προηγούμενο γρίφο, βρείτε έναν διψήφιο αριθμό που το πρώτο ψηφίο δείχνει από πόσους κύβους φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος, και το δεύτερο από πόσα τετράγωνα φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος.

39. Βρείτε έναν τριψήφιο αριθμό που τα δύο πρώτα ψηφία του σχηματίζουν διψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσα τετράγωνα φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ο αριθμός, και το τρίτο ψηφίο από πόσους κύβους φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος.

40. Ανάποδα από τον προηγούμενο γρίφο, βρείτε έναν τριψήφιο αριθμό που το πρώτο ψηφίο δείχνει από πόσους κύβους φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος, και τα δύο επόμενα ψηφία σχηματίζουν διψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσα τετράγωνα φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ο αριθμός.

41. Βρείτε έναν τετραψήφιο αριθμό που τα δύο πρώτα ψηφία σχηματίζουν διψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσα τετράγωνα φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος, και τα δύο επόμενα σχηματίζουν διψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσους κύβους φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος.

42. Ανάποδα από τον προηγούμενο γρίφο, βρείτε έναν τετραψήφιο αριθμό που τα δύο πρώτα ψηφία σχηματίζουν διψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσους κύβους φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος, και τα δύο επόμενα σχηματίζουν διψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσα τετράγωνα φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος.

43. Βρείτε έναν πενταψήφιο αριθμό που τα τρία πρώτα ψηφία σχηματίζουν τριψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσα τετράγωνα φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος, και τα δύο τελευταία σχηματίζουν διψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσους κύβους φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος.

44. Ανάποδα από τον προηγούμενο γρίφο, βρείτε έναν πενταψήφιο αριθμό που τα δύο πρώτα ψηφία σχηματίζουν διψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσους κύβους φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος, και τα τρία τελευταία ψηφία σχηματίζουν τριψήφιο αριθμό που δείχνει από πόσα τετράγωνα φυσικών αριθμών είναι μεγαλύτερος.

45. ★ Βρείτε τον εκατοστό κύβο που τελειώνει σε 777.

46. ★ Βρείτε τον τετρακοσιοστό κύβο που τελειώνει σε 888.

47. ★ ★ Μπορείτε να βρείτε δύο αριθμούς, διαφορετικούς από το 0 και το 1, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να ισούται με το άθροισμα των κύβων τους;

Λύσεις

Παιχνίδια με πράξεις

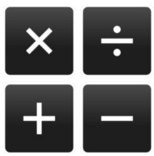
1. $(4 + 3 - 1) \cdot 5 + 2 = \mathbf{32}$, $(3 \cdot 5 + 2) \cdot 4 + 1 = \mathbf{69}$,
$[(2 + 4) \cdot 5 - 1] \cdot 3 = \mathbf{87}$, $[4 \cdot (3 + 2) - 1] \cdot 5 = \mathbf{95}$,
$4 \cdot 5 \cdot (3 + 2) - 1 = \mathbf{99}$.
Μπορείτε να συνεχίσετε το παιχνίδι ψάχνοντας και άλλους αριθμούς μέχρι το 100. Οι μόνοι αριθμοί μέχρι το 100 που δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν είναι οι 76, 79, 86, 92, 94, 97, 98.

2. $3^4 - 5 = \mathbf{76}$, $3^4 - 2 = \mathbf{79}$, $3^4 + 5 = \mathbf{86}$, $5^2 \cdot 4 - 3 = \mathbf{97}$,
$5^2 \cdot 4 - 3 + 1 = \mathbf{98}$. Μόνο τον **94** δεν είναι δυνατόν να βρούμε.

3. Ο μεγαλύτερος διψήφιος αριθμός που μπορούμε να βρούμε είναι ο 99. Δίνουμε τρεις τρόπους:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 99$,
$12 + 3 + 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 99$ και
$1 + 23 + 45 + 6 + 7 + 8 + 9 = 99$.
Χρησιμοποιώντας τα εννιά ψηφία δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί το 100. Ούτε με τα οκτώ πρώτα ψηφία είναι δυνατόν. Μια καλή προσέγγιση είναι: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 78 = 99$.
Με τα επτά πρώτα ψηφία υπάρχουν οι μοναδικές λύσεις:
Α. $\mathbf{1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100}$.
Β. $\mathbf{1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100}$.
Με ακόμα λιγότερα ψηφία πάλι είναι αδύνατο.

4. Σας δίνουμε δύο λύσεις:
Α. $\mathbf{12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100}$, χρησιμοποιώντας τρεις φορές τα σύμβολα συν (+) και πλην (–).
Β. $\mathbf{123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100}$, χρησιμοποιώντας δύο φορές τα σύμβολα συν (+) και πλην (–).

5. Χρησιμοποιώντας και τους οκτώ αριθμούς μπορούμε με τις παρακάτω πράξεις να βρούμε τον αριθμό 12.345:
$\mathbf{[(5 \cdot 25 + 4) \cdot 2 - 1] \cdot 3 \cdot 16 + 9 = 12.345}$.
Και μία λύση χωρίς τη χρήση του αριθμού 1 από τον Κωνσταντίνο Καραγιαννίδη: $25 \cdot [16 \cdot (3 \cdot 9 + 4) - 2] - 5 = 12.345$.



6. $\mathbf{10 - 9} = 1$, $1 \cdot \mathbf{8 - 7} = 1$, $1 \cdot \mathbf{6 - 5} = 1$,
$1 \cdot \mathbf{4 - 3} = 1$, $1 \mathbf{- 1} = 0$, $0 \cdot \mathbf{2} = 0$.

7. Α. **$4 \cdot 3 \cdot 1 - 2 = 10$**, Β. **$(1^3 + 4) \cdot 2 = 10$**,

Γ. **$4 \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right) = 10$**, Δ. **$1^4 + 3^2 = 10$**.

8. Με πέντε εννιάρια: $999 + \frac{9}{9} = 1.000$.

Με οκτώ οχτάρια: $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1.000$.

Με οκτώ επτάρια: $77 \cdot (7 + 7) - 77 - \frac{7}{7} = 1.000$.

Με οκτώ εξάρια: $\frac{6.666 - 666}{6} = 1.000$.

Με έξι πεντάρια: $(5 \cdot 5 - 5) \cdot (55 - 5) = 1.000$.

Με επτά τεσσάρια: $\left(4^4 - 4 - \frac{4 + 4}{4}\right) \cdot 4 = 1.000$.

Με έξι τριάρια: $333 \cdot 3 + \frac{3}{3} = 1.000$.

Με επτά δυάρια: $(22^2 + 2^{2+2}) \cdot 2 = 1.000$.

Με επτά άσους: $1.111 - 111 = 1.000$.

9. Με τη βοήθεια του προγραμματιστή Κωνσταντίνου Καραγιαννίδη, αναζητήσαμε με υπολογιστή τους αριθμούς με τη συγκεκριμένη ιδιότητα στο διάστημα 1–1.000.000. Ως όριο πλήθους επαναλήψεων, για να θεωρηθεί ότι δεν προκύπτει ο αρχικός αριθμός, θέσαμε τις 10.000. Οι αριθμοί που προκύπτουν οι ίδιοι μετά τη διαδικασία που είπαμε είναι μόνο 25 και φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Αξιοπερίεργο είναι ότι όλοι προκύπτουν μετά από 2, 5 ή 18 πράξεις!

Αριθμός	Πράξεις	Αριθμός	Πράξεις
1	2	55	18
2	2	61	18
5	5	68	18
7	5	74	18
10	5	82	18
14	5	91	18
17	18	110	18
20	5	122	18
25	18	136	18
34	18	164	18
37	18	182	18
41	18	272	18
50	18		

Μαγικά τετράγωνα 3x3

10. Στα μαγικά τετράγωνα 3x3 το τριπλάσιο του μεσαίου αριθμού μάς δίνει το άθροισμα της κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου. Αυτή η πρόταση μπορεί να μας βοηθήσει να συμπληρώνουμε εύκολα τα μαγικά τετράγωνα 3x3. Ας την αποδείξουμε. Έστω το παρακάτω μαγικό τετράγωνο και Α το άθροισμα της κάθε γραμμής, στήλης και διαγωνίου.

α	β	γ
δ	ε	ζ
η	θ	ι

Έχουμε: β + ε + θ = Α
δ + ε + ζ = Α
α + ε + ι = Α
γ + ε + η = Α

Αν προσθέσουμε τα τέσσερα πρώτα μέλη, έχουμε:
β + ε + θ + δ + ε + ζ + α + ε + ι + γ + ε + η = 4Α, η οποία γίνεται:
(α + β + γ) + (δ + ε + ζ) + (η + θ + ι) + 3ε = 4Α, άρα, 3Α + 3ε = 4Α και τελικά **3ε = Α**.
Στις δύο πρώτες περιπτώσεις, που έχουμε τους αριθμούς από το 1 έως το 9, το άθροισμα των τριών γραμμών θα είναι:
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 = 3Α, άρα, Α = 15 και ο μεσαίος θα είναι το ένα τρίτο του Α, δηλαδή το 5.
Στην τρίτη περίπτωση το άθροισμα των τριών γραμμών είναι:
5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 81 = 3Α, άρα, Α = 27 και ο μεσαίος θα είναι το ένα τρίτο του Α, δηλαδή το 9.
Στην τέταρτη περίπτωση έχουμε άθροισμα στήλης:
Α = 66 + 16 + 83 = 165 και ο μεσαίος θα είναι το ένα τρίτο του Α, δηλαδή το 55.

Α.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Β.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Γ.

8	7	12
13	9	5
6	11	10

Δ.

27	72	66
94	55	16
44	38	83

Δύο κρυπτάριθμοι πρόσθεσης

11. **Α.** Μπορείτε να βρείτε πολλές λύσεις, και μία από αυτές είναι:

$$\begin{array}{r} 5.210 \\ +\ 1.370 \\ \hline 6.580 \end{array}$$

Αναζητώντας όμως τη λύση που δίνει το μεγαλύτερο αποτέλεσμα, ελέγξτε, αν γίνεται, Δ = 9, Ε = 8, Κ = 7. Το Α είναι ίσο με 0, αφού Α + Α = Α. Έτσι, η λύση με το μεγαλύτερο αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{array}{r} 8.310 \\ +\ 1.560 \\ \hline 9.870 \end{array}$$

Για το μικρότερο αποτέλεσμα δοκιμάστε Ε = 1, Τ = 2 και Δ = 3 ή, αν δεν είναι δυνατόν αυτό, δοκιμάστε Δ = 4. Τελικά η λύση είναι:

$$\begin{array}{r} 1.320 \\ +\ 2.850 \\ \hline 4.170 \end{array}$$

Β. Το Π είναι υποχρεωτικά ίσο με 1. Για το μικρότερο αποτέλεσμα δοκιμάστε Δ = 6 ή 8 και Ε = 4 ή 2, ώστε Λ = 0. Τελικά μία λύση με το μικρότερο αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{array}{r} 625 \\ +\ 412 \\ \hline 1.037 \end{array}$$

Για το μεγαλύτερο αποτέλεσμα δοκιμάστε Δ = 9 και Ε = 8, ώστε το Λ = 7, και τελικά η λύση είναι:

$$\begin{array}{r} 942 \\ +\ 814 \\ \hline 1.756 \end{array}$$

Αρίθμηση σελίδων

12. Για τις πρώτες εννιά σελίδες απαιτούνται εννιά ψηφία. Οι σελίδες από 10 έως 99 είναι 90 και χρειάζονται $90 \cdot 2 = 180$ ψηφία. Οι σελίδες από 100 έως 999 είναι 900 και χρειάζονται $900 \cdot 3 = 2.700$ ψηφία.
Σύνολο ψηφίων για τις σελίδες αυτές: 9 + 180 + 2.700 = 2.889 ψηφία.

Ψηφία ανά σελίδα	Σελίδες	Σύνολο ψηφίων
1	1 – 9 (9)	9
2	10 – 99 (90)	180
3	100 – 999 (900)	2.700
4	1.000 – 9.999 (9.000)	36.000

Τα υπόλοιπα ψηφία είναι 3.333 – 2.889 = 444. Οι σελίδες μετά τη χιλιοστή απαιτούν τέσσερα ψηφία. Άρα, θα είναι 444 : 4 = 111 σελίδες, δηλαδή οι σελίδες από 1.000 – 1.110. Τελικά ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου είναι **1.110**.

Για τις σελίδες μέχρι τον αριθμό 99 απαιτούνται 189 ψηφία. Μέχρι το χιλιοστό ψηφίο που αναζητούμε, απαιτούνται ακόμα 811 ψηφία. Τα 810 από αυτά, αν διαιρεθούν με το 3, μας δίνουν 270 σελίδες με τριψήφια αρίθμηση. Άρα, φτάνουμε από τη σελίδα 100 στη σελίδα με αριθμό 369. Η επόμενη σελίδα είναι η σελίδα με τον αριθμό 370 και κατά συνέπεια το πρώτο της ψηφίο, το **3**, είναι το χιλιοστό ψηφίο που χρησιμοποιήθηκε για την αρίθμηση του βιβλίου.

Απορία

13. Οι δύο αριθμοί είναι ίσοι. Αν διαιρέσουμε το 1 με το 3, προκύπτει ο αριθμός 0,3333... με άπειρα τριάρια. Αυτό το γράφουμε: $\frac{1}{3} = 0,\overline{33}$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί 3 και έχουμε:

$$\frac{1}{3} \cdot 3 = 0,\overline{33} \cdot 3 \Leftrightarrow 1 = 0,\overline{99}.$$

Συμπληρώστε τα τετράγωνα της πυραμίδας

14. Έστω το τρίγωνο:

α
β ι
γ θ
δ ε ζ η

Αν είναι Α το άθροισμα της κάθε πλευράς, θα ισχύει:

α + β + γ + δ = Α
δ + ε + ζ + η = Α
η + θ + ι + α = Α

Προσθέτουμε τα τρία πρώτα μέλη κι έχουμε:

α + β + γ + δ + δ + ε + ζ + η + η + θ + ι + α = 3Α, άρα,
(α + β + γ + δ + ε + ζ + η + θ + ι) + α + δ + η = 3Α.

Εφόσον στο τρίγωνο βάζουμε τους αριθμούς από το 1 έως το 9, η παρένθεση θα ισούται με 1 + ... + 9 = 45. Τελικά θα είναι:

$$45 + α + δ + η = 3Α.$$

Για Α = 21, θα πρέπει οι τρεις κορυφές α, δ, η να έχουν άθροισμα α + δ + η = 3Α – 45 = 18. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να είναι: α = 3, δ = 6, η = 9 ή α = 3, δ = 7, η = 8 ή α = 4, δ = 5, η = 9 ή α = 4, δ = 6, η = 8 ή α = 5, δ = 6, η = 7. Λύσεις μάς δίνουν τελικά μόνο οι δύο πρώτες περιπτώσεις.

Μπορούμε να ψάξουμε ομοίως και για λύσεις με άλλα αθροίσματα ανά πλευρά.

Παράδειγμα: Για Α = 17, θα πρέπει οι τρεις κορυφές α, δ, η να έχουν άθροισμα α + δ + η = 3Α – 45 = 6. Αυτό σημαίνει ότι θα είναι υποχρεωτικά: α = 1, δ = 2, η = 3.

Οι λύσεις συνολικά για όλα τα αθροίσματα είναι 16 και ανά άθροισμα κατανέμονται ως εξής:

Άθροισμα 17: λύση 1
Άθροισμα 18: καμία λύση
Άθροισμα 19: λύσεις 4
Άθροισμα 20: λύσεις 6
Άθροισμα 21: λύσεις 4
Άθροισμα 22: καμία λύση
Άθροισμα 23: λύση 1

Άθροισμα 17

```
    1
   5 6
  9   7
 2 4 8 3
```

Άθροισμα 19

```
    1          1          2          2
   6 2        5 3        5 4        6 1
  8   9      9   8      9   6      8   9
 4 3 5 7    4 2 6 7    3 1 8 7    3 4 5 7
```

Άθροισμα 20

```
    1          2          2          3
   8 3        4 3        6 1        4 1
  6   7      9   7      7   9      8   9
 5 2 4 9    5 1 6 8    5 4 3 8    5 2 6 7
```

```
    4
  3   1
 8     9
5  2  7  6
```

```
    4
  2   3
 9     7
5  1  8  6
```

Άθροισμα 21

```
    3
  5   1
 7     8
6  2  4  9
```

```
    3
  2   4
 9     6
7  1  5  8
```

```
    3
  4   2
 8     7
6  1  5  9
```

```
    3
  5   1
 6     9
7  2  4  8
```

Άθροισμα 23

```
    7
  2   3
 6     4
8  1  5  9
```

Τυπογραφείο

15. Η πιο γρήγορη μηχανή του τυπογραφείου μπορεί να τυπώνει σε δύο ώρες εκατό εφημερίδες, δηλαδή πενήντα εφημερίδες την ώρα. Η επόμενη μπορεί να τυπώνει εκατό εφημερίδες σε τρεις ώρες, δηλαδή $\frac{100}{3}$ εφημερίδες την ώρα. Οι υπόλοιπες τυπώνουν την ώρα 25, 20, $\frac{100}{6}$, $\frac{100}{7}$, 12,5, $\frac{100}{9}$, 10 εφημερίδες αντίστοιχα. Με δύο μηχανές είναι αδύνατον να τυπωθούν 100 εφημερίδες σε μία ώρα. Με τρεις μηχανές (τη γρηγορότερη, τη δεύτερη και την πέμπτη) όμως είναι δυνατόν να τυπωθούν, γιατί

$$\frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \frac{100}{6} = \frac{300}{6} + \frac{200}{6} + \frac{100}{6} = \frac{600}{6} = 100.$$

Άλλη δυνατότητα δεν έχει ο τυπογράφος.

Δύο κρυπτάριθμοι

16. **Α.** Για το μεγαλύτερο αποτέλεσμα δοκιμάστε να ξεκινήσετε με Δ = 9 και Ι = 8. Τελικά προκύπτουν δύο λύσεις:

$$\begin{array}{r} 468 \\ +\ 518 \\ \hline 986 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 768 \\ +\ 218 \\ \hline 986 \end{array}$$

Για το μικρότερο αποτέλεσμα δοκιμάστε να ξεκινήσετε με Δ = 3, Κ = 1 και Ε = 2. Τελικά η λύση είναι:

$$\begin{array}{r} 105 \\ +\ 245 \\ \hline 350 \end{array}$$

Β. Για το μεγαλύτερο αποτέλεσμα η λύση είναι:

$$\begin{array}{r} 908 \\ -\ 128 \\ \hline 780 \end{array}$$

ενώ προκύπτουν δύο λύσεις για το μικρότερο αποτέλεσμα:

$$\begin{array}{r} 602 \\ -\ 482 \\ \hline 120 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 702 \\ -\ 582 \\ \hline 120 \end{array}$$

Τετράγωνα

17. Πρέπει να βρούμε τετράγωνα που να αποτελούνται από ψηφία που να είναι επίσης τετράγωνα, όπως το 1, το 4 και το 9. Υπάρχει ένας διψήφιος αριθμός, το **49**, δύο τριψήφιοι, το **144** = 12^2 και το **441** = 21^2, και ο τετραψήφιος **1.444** = 38^2.

18. Οι αριθμοί **449** (4, 4, 9, 49), **499** (4, 9, 9, 49), **949** (9, 4, 9, 49) περικλείουν στα ψηφία τους τέσσερα τετράγωνα, αλλά τα δύο είναι ίδια. Ο αριθμός **491** (4, 9, 1, 49) είναι παρόμοιος με αυτόν που δώσαμε και στην εκφώνηση του γρίφου, έχει δηλαδή τέσσερα διαφορετικά τετράγωνα. Όλοι οι αριθμοί που βρήκαμε ως τώρα έχουν και τα τρία τους ψηφία τετράγωνα. Ο αριθμός όμως **164** αποτελείται από δύο ψηφία - τετράγωνα, αλλά περικλείει τελικά τέσσερα διαφορετικά τετράγωνα (1, 16, 4, 64).

19. Οι αριθμοί που ψάχνουμε πρέπει να έχουν μικρά ψηφία, για να μην προκύπτουν «κρατούμενα» κατά τον πολλαπλασιασμό. Επίσης, για να έχουν τον ίδιο αριθμό ψηφίων τα δύο τετράγωνα.

– Ο δεύτερος διψήφιος αριθμός (εκτός φυσικά από το 11) με αυτή την ιδιότητα είναι ο **13**, αφού 13^2 = 169 και 31^2 = 961.
– Οι τριψήφιοι με αυτή την ιδιότητα είναι οι εξής πέντε: **102**, **103**, **112**, **113**, **122**.
– Οι τετραψήφιοι είναι οι εξής δεκατρείς: **1.002**, **1.003**, **1.011**, **1.012**, **1.013**, **1.021**, **1.022**, **1.102**, **1.103**, **1.112**, **1.113**, **1.211**, **1.212**.