Κ. Τζιρώνης, Θ. Τζουβάρας

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Συμπλήρωμα στις λύσεις των ασκήσεων του βιβλίου

Περιλαμβάνει λύσεις ή υποδείξεις για ασκήσεις του βιβλίου που αφορούν κυρίως προβλήματα των οποίων η επίλυση παρουσιάζει δυσκολίες για τους μαθητές

Α.1.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
Α.1.5 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ α΄ ΒΑΘΜΟΥ
ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ
Α.2.1 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
Α.2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

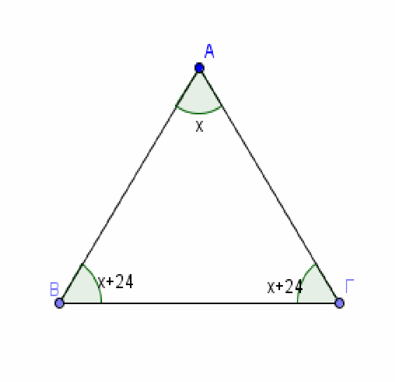
Α.1.4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

7. Αν x ο αριθμός, τότε η εξίσωση γίνεται $3x-9=2x+6$....

8. α) Αν x είναι ο ζητούμενος βαθμός τότε η εξίσωση γράφεται $\frac{15+17+x}{3}=17$ .....

β) Η ζητούμενη εξίσωση θα είχε τη μορφή $\frac{15+17+x}{3}=18$.....

9.



Σύμφωνα με το σχήμα, η εξίσωση έχει τη μορφή $x+x+24+x+24=180$ **....**

10. Περίμετρος τετραγώνου: $x+x+x+x=4x$

Περίμετρος τριγώνου: $x-2+x-2+x-2=3x-6$

Άρα η εξίσωση γράφεται $4x=2(3x-6)$.....

11. β) Η εξίσωση, σύμφωνα και με το (α) ερώτημα, θα έχει τη μορφή $x+x+1+x+2=51$.....

12. Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, λύνουμε την εξίσωση $2x+\frac{1}{4}x=63$.....

13. Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε προκύπτει η εξίσωση $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=20$....

14. Αν x είναι τα γραμματόσημα του Πέτρου, τότε ο Γιάννης θα έχει $2x$, οπότε η εξίσωση γράφεται $2x+7=x+32$....

15. Αν x είναι οι συσκευασίες των 6 τεμαχίων, τότε οι συσκευασίες των 9 τεμαχίων θα είναι $10-x$, οπότε προκύπτει η εξίσωση $6x+9(10-x)=72$.....

16. *Σημείωση: Στην εκφώνηση της άσκησης υπάρχει τυπογραφικό λάθος στις μονάδες των διαστάσεων του ορθογωνίου, οι οποίες πρέπει να δίνονται σε* m *και όχι σε* cm.
Το αρχικό εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $6\cdot 8=48m^2$. Η μικρότερη διάσταση είναι $6m$. Σύμφωνα με τα παραπάνω και από τα δεδομένα του προβλήματος, αν θεωρήσουμε x τη ζητούμενη αύξηση, προκύπτει η εξίσωση $(6+2)(8+x)=48\cdot 2$....

17. Αν θεωρήσουμε x τη μία βάση του τραπεζίου, τότε από τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου προκύπτει η εξίσωση $\dfrac{x+\frac{2}{5}x}{2}\cdot 10=70$ ....

18. Αν x είναι η μικρότερη διάσταση, τότε η άλλη διάσταση θα είναι $0,6+x$ αφού οι διαστάσεις διαφέρουν κατά $60cm=0,6m$. Προκύπτει λοιπόν η εξίσωση
$x+(0,6+x)+x+(0,6+x)=8$ ….

19. Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε προκύπτει η εξίσωση $\dfrac{5+x}{9+x}=\dfrac{2}{3}$ ....

20. Αν x είναι η τιμή χωρίς την έκπτωση, τότε η εξίσωση γράφεται $x-\dfrac{40}{100}x=15$ ....

22. Η παραπληρωματική της α θα είναι $180-\alpha$, οπότε προκύπτει η εξίσωση
$\alpha=2(180-\alpha)-18$ την οποία λύνουμε ως εξής:

$\alpha=360-2\alpha-18$

$\alpha+2\alpha=360-18$

$3\alpha=342$

$\alpha=\dfrac{342}{3}$

$\alpha=114$

(Η λύση που έχει δοθεί στο βιβλίο είναι λάθος.)

23. Αν θεωρήσουμε x τα χρόνια που πρέπει να περάσουν, ώστε η ηλικία του κύριου Θόδωρου να είναι τριπλάσια της ηλικίας του Χρήστου, προκύπτει η εξίσωση:
$41+x=3(5+x)$ ….

24. Η μία βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 20 λεπτά, άρα το κάθε λεπτό γεμίζει το $\dfrac{1}{20}$ της δεξαμενής. Η άλλη βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 30 λεπτά, άρα το κάθε λεπτό γεμίζει το $\dfrac{1}{30}$ της δεξαμενής. Αν x είναι τα λεπτά της ώρας στα οποία γεμίζει η δεξαμενή αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες, τότε προκύπτει η εξίσωση $\dfrac{x}{20}+\dfrac{x}{30}=1$ ....
(Το 1 εκφράζει το μέρος της δεξαμενής που γέμισε, οπότε αφού γέμισε ολόκληρη συμβολίζουμε με 1.)

25. Η μία βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 6 ώρες, άρα την κάθε ώρα γεμίζει το $\dfrac{1}{6}$ της δεξαμενής. Η άλλη βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 4 ώρες, άρα την κάθε ώρα γεμίζει το $\dfrac{1}{4}$ της δεξαμενής. Η τρίτη βρύση αδειάζει τη δεξαμενή σε 3 ώρες, άρα, αντίστοιχα με την άσκηση 24, προκύπτει η εξίσωση $\dfrac{x}{6}+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{3}=1$ ....

26. Η μία βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 12 ώρες, άρα σε 1 ώρα θα έχει γεμίσει το $\frac{1}{12}$ της δεξαμενής. Η άλλη βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 8 ώρες, άρα σε 1 ώρα θα έχει γεμίσει το $\frac{1}{8}$ της δεξαμενής.

α) Αν ανοιχτούν και οι δύο βρύσες μαζί και θεωρώντας x τις ώρες που χρειάζονται για να γεμίσει η άδεια δεξαμενή, προκύπτει η εξίσωση $\frac{x}{12}+\frac{x}{8}=1$.....

β) Αν θεωρήσουμε ότι η πρώτη βρύση μένει ανοιχτή x ώρες προκειμένου να γεμίσει η δεξαμενή, τότε η δεύτερη βρύση αφού ανοίγει 2 ώρες αργότερα από την πρώτη θα μένει ανοιχτή $x-2$ ώρες, άρα προκύπτει η εξίσωση $\frac{x}{12}+\frac{x-2}{8}=1$....

27. Αν θεωρήσουμε x το ποσό που πήρε ο δεύτερος, τότε ο πρώτος, αφού πήρε 3600€ περισσότερα, θα πήρε $x+3600$ και ο τρίτος, ο οποίος πήρε 1200€ λιγότερα από τον δεύτερο, θα πήρε $x-1200$. Άρα, προκύπτει η εξίσωση $x+3600+x+x-1200=9000$. Λύνοντας την εξίσωση προκύπτει $x=2200$, άρα ο πρώτος φίλος πήρε $3600+2200=5800$ €, ο δεύτερος πήρε 2200 € και ο τρίτος πήρε $2200-1200=1000$ €.

28. Αν θεωρήσουμε x τα έσοδα της οικογένειας, τότε αυτή ξόδεψε $\frac{x}{12}$ για την εξόφληση του δανείου, $\frac{x}{3}$ για διατροφή, $\frac{x}{6}$ για αγορά τεχνολογικού εξοπλισμού, $\frac{x}{15}$ για ρουχισμό, $\frac{x}{4}$ για τα υπόλοιπα έξοδα και της έμειναν και 3120 €. Άρα, προκύπτει η εξίσωση $\frac{x}{12}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{x}{15}+\frac{x}{4}+3120=x$....

29. Μετά από 10 ημέρες, θα έχει μείνει τροφή ώστε να περάσουν τα 24 άτομα άλλες 20 ημέρες. Μετά την περισυλλογή όμως των 6 ναυαγών τα άτομα στο πλοίο θα έχουν γίνει 30. Άρα, αν x είναι οι μέρες για τις οποίες φτάνουν τα τρόφιμα για τους 30 ανθρώπους, προκύπτει η εξίσωση $30x=24\cdot 20$....

30. Αν x είναι το πλήθος των γυναικών στη γιορτή, τότε το πλήθος των ανδρών είναι $2x$. Όταν έφυγαν 8 άνδρες με τις γυναίκες τους, έμειναν $2x-8$ άνδρες και $x-8$ γυναίκες. Άρα, προκύπτει η εξίσωση $2x-8=3(x-8)$....

31. Αν x είναι η έκταση της πρώτης περιοχής, τότε η έκταση της δεύτερης περιοχής είναι $200-x$. Άρα, προκύπτει η εξίσωση $40x+30(200-x)=7300$....

32. Αν x το ωρομίσθιο του Κώστα, τότε το ωρομίσθιο του Θόδωρου είναι $6+x$. Ο Κώστας εργάστηκε συνολικά 24 ώρες (3 ημέρες, από 8 ώρες την ημέρα) και ο Θόδωρος 20 ώρες (4 ημέρες, από 5 ώρες την ημέρα). Άρα, προκύπτει η εξίσωση $20(6+x)=40+24x$, από τη λύση της οποίας προκύπτει $x=20$. Άρα, ο Κώστας παίρνει ωρομίσθιο 20€ και ο Θόδωρος 26€.

33. Αν x είναι οι ώρες που πρέπει να περάσουν από τις 8 το πρωί, για να συναντηθούν, τότε στο χρόνο αυτό ο ποδηλάτης θα έχει διανύσει $15x\,km$. Ο μοτοσικλετιστής ξεκινάει δύο ώρες αργότερα, άρα στον χρόνο αυτό, θα έχει διανύσει $30(x-2)km$. Οπότε, προκύπτει η εξίσωση $15x = 30(x-2)$ από τη λύση της οποίας παίρνουμε $x = 4$. Άρα, η συνάντηση θα γίνει 4 ώρες μετά τις 8 το πρωί, δηλαδή στις 12:00 και η συνάντηση θα γίνει σε απόσταση $15 \cdot 4 = 60\,km$ από την πόλη.

Α.1.5 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ α΄ ΒΑΘΜΟΥ

46. Υπόδειξη: Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η τριγωνική ανισότητα, σύμφωνα με την οποία, κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά των άλλων δύο και μικρότερη από τη διαφορά τους. (*Η λύση βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου.)*

47. Αν x είναι ο ζητούμενος φυσικός, τότε $4x - 5 < 25$ ....

48. Αν x είναι ο ζητούμενος φυσικός, τότε $5x + 3 > 42$ ....

56. Αν x είναι ο ακέραιος, τότε $2 < 3x + 12 < 16$ ....

58. Για να μη συμφέρει τον επιβάτη η κάρτα απεριορίστων διαδρομών, θα πρέπει οι διαδρομές που θα κάνει μέσα σε ένα μήνα να στοιχίζουν λιγότερο από την αξία της κάρτας που είναι 38 €. Αν θεωρήσουμε x τις διαδρομές που θα κάνει ο επιβάτης συνολικά μέσα στο μήνα, θα πρέπει να ισχύει $0,8x < 38$, απ΄όπου προκύπτει $x < 47,5$, οπότε ο επιβάτης θα πρέπει να κάνει το πολύ 47 διαδρομές για να μην τον συμφέρει η κάρτα απεριορίστων διαδρομών.

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

11. Αν x είναι τα αυγά που πούλησε προς $0,37$ € το ένα, τότε πούλησε $166 - x$ αυγά προς 0,40 € το ένα. Άρα, προκύπτει η εξίσωση $0,37x + 0,4(166 - x) = 63,43$ ....

12. Αν x ο ζητούμενος αριθμός τότε $2x + 4 = 3x - 17$ ....

13. Το αρχικό εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $60\,m^2$, άρα το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου είναι $120\,m^2$. Αν x εκφράζει τη αύξηση της πλευράς που είναι $6\,m$, τότε έχουμε την εξίσωση $15(6 + x) = 120$ ....

14. Αν x ο ζητούμενος φυσικός, τότε προκύπτει η διπλή ανίσωση $3x < 2x + 6 < 4x$, την οποία για να λύσουμε, πρέπει να προχωρήσουμε στη λύση των δύο επιμέρους ανισώσεων και στη συνέχεια να συναληθεύσουμε. Από την ανίσωση $3x < 2x + 6$ προκύπτει $x < 6$ και από την ανίσωση $2x + 6 < 4x$ προκύπτει $x > 3$. Τελικά, οι φυσικοί που ψάχνουμε είναι ο 4 και ο 5.

18. Αν x είναι τα χιλιόμετρα που θα διανύσει το λεωφορείο, τότε για να συμφέρει η προσφορά του 2ου γραφείου, θα πρέπει να ισχύει $390 + 0,9x < 300 + 1,2x$ ....

Α.2.1 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

36. Υπόδειξη: Για την πλευρά α του τετραγώνου ισχύει $\alpha = \sqrt{\mathrm{E}}$, όπου Ε είναι το εμβαδόν του τετραγώνου.

37. Υπόδειξη: Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια, οπότε εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα.

38. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διάμεσος, άρα προκύπτει ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 13 και κάθετη πλευρά 5, άρα από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $x^2 = 13^2 - 5^2$....

40. Αν x είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς τριγώνου βάσης $6m$ και περιμέτρου $16m$, τότε βρίσκουμε το x από την εξίσωση $6 + x + x = 16$......
Στη συνέχεια βρίσκουμε το ύψος όπως στην άσκηση 38....

42. Αν x είναι ο θετικός αριθμός που ψάχνουμε, τότε έχουμε την εξίσωση $2x^2 + 27 = 5x^2$....

Α.2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3. Υπόδειξη: Από Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε την υποτείνουσα ΑΓ και αφαιρούμε από αυτή τη ΔΓ, για να βρούμε την απόσταση ΑΔ.

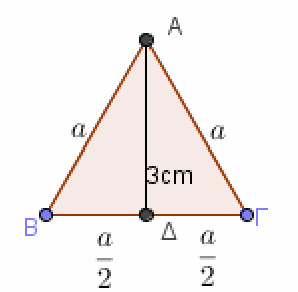
5. Υπόδειξη: Βρίσκουμε πρώτα την υποτείνουσα από Πυθαγόρειο θεώρημα.

6. Αν x είναι η άλλη κάθετη πλευρά του τριγώνου, τότε λύνοντας την εξίσωση $\frac{4x}{2} = 10$ βρίσκουμε την κάθετη αυτή πλευρά και στη συνέχεια βρίσκουμε την υποτείνουσα από Πυθαγόρειο θεώρημα.

7. Αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οι κάθετες πλευρές του θα έχουν το ίδιο μήκος, το οποίο θεωρούμε x. Άρα, προκύπτει η εξίσωση $\frac{x^2}{2} = 12$, από την οποία βρίσκουμε το μήκος x των κάθετων πλευρών και στη συνέχεια από Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε την υποτείνουσα, η οποία προκύπτει $4\sqrt{3}\ cm$ ($6,93cm$ με προσέγγιση εκατοστού).

8. Αν x είναι η μία κάθετη πλευρά του τριγώνου, τότε η άλλη θα είναι $2x$. Άρα, βρίσκουμε τις κάθετες πλευρές από την επίλυση της εξίσωσης $\frac{x \cdot 2x}{2} = 16$ και στη συνέχεια βρίσκουμε την υποτείνουσα από Πυθαγόρειο θεώρημα. Για να βρούμε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, βρίσκουμε πρώτα το εμβαδόν του τριγώνου, χρησιμοποιώντας τις κάθετες πλευρές, και στη συνέχεια, θεωρώντας ως βάση την υποτείνουσα, βρίσκουμε από τον τύπο του εμβαδού το αντίστοιχο ύψος.

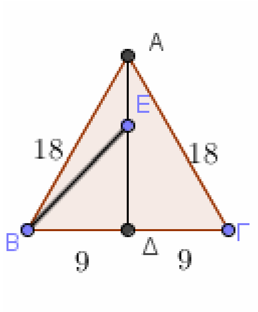
9. Αν α είναι η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου, τότε, αφού το ύψος είναι και διάμεσος, θα χωρίζει την πλευρά στην οποία αντιστοιχεί σε δύο ίσα μέρη, κάθε ένα εκ των οποίων θα είναι $\frac{\alpha}{2}$. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ, προκύπτει $\alpha^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 3^2$ ....



10. Εμβαδόν ορθογωνίου: $27m^2$

Εμβαδόν τετραγώνου: $x^2 = 27$ ....

13.



Βρίσκουμε πρώτα την ΑΔ, εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ: $ΑΔ^2 = 18^2 - 9^2$ ...... $ΑΔ = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}\,cm$.

Από την ΑΔ βρίσκουμε την ΕΔ $\left(ΕΔ = \frac{2}{3}ΑΔ\right)$ και στη συνέχεια, εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΕΔ, βρίσκουμε την υποτείνουσα ΒΕ.