1.2 Μη γραμμικά συστήματα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μη γραμμικό σύστημα 2×2 λέγεται οποιοδήποτε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους περιέχει μία τουλάχιστον μη γραμμική εξίσωση, δηλαδή έχει μια εξίσωση που δεν είναι ή δεν μπορεί να γίνει στη μορφή $\alpha x + \beta y = \gamma$, όπου x, y είναι οι άγνωστοι και οι α, β, γ πραγματικές σταθερές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$ $(\rho > 0)$ εκφράζει **κύκλο** με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα ρ.
2. Η εξίσωση $x^2 = \alpha y$ $(\alpha \neq 0)$ εκφράζει **παραβολή** με κορυφή το O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον y΄y.
3. Η εξίσωση $y^2 = \alpha x$ $(\alpha \neq 0)$ εκφράζει **παραβολή** με κορυφή το O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον x΄x.
4. Η εξίσωση $xy = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$ εκφράζει **υπερβολή**.

Μέθοδοι και εφαρμογές

1η ΜΕΘΟΔΟΣ: Επίλυση μη γραμμικών συστημάτων

Υπόδειξη: Λύνονται με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αν το σύστημα έχει λύση, οι λύσεις που θα βρούμε εκφράζουν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο γραμμών που παριστάνουν οι αρχικές εξισώσεις.

1. Να λύσετε τα συστήματα:

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

α) $\begin{cases} x+y=2 \\ y^2=x \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ yx=10 \end{cases}$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα.

Λύση

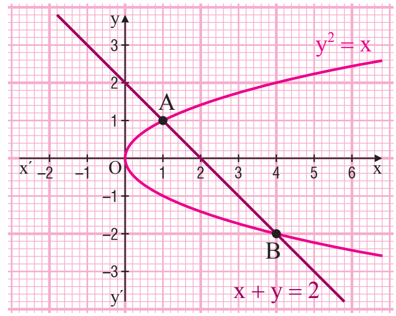
α) $\begin{cases} x+y=2 \\ y^2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ y^2=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y & \text{(I)} \\ y^2+y-2=0 & \text{(II)} \end{cases}$.

Η εξίσωση (ΙΙ) είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 9$ και ρίζες $y = 1$ ή $y = -2$, οπότε και με τη βοήθεια της (Ι) έχουμε:

- Αν y = 1, τότε x = 2 – 1 = 1.
- Αν y = –2, τότε x = 2 – (–2) = 4.

Συνεπώς (x, y) = (1, 1) ή (x, y) = (4, –2).

Η εξίσωση x + y = 2 εκφράζει ευθεία που περνά από τα σημεία (2, 0) και (0, 2), ενώ η εξίσωση $y^2 = x$ εκφράζει παραβολή με κορυφή το O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον x΄x. Οι δύο λύσεις του συστήματος των εξισώσεων εκφράζουν τα σημεία τομής τους, που είναι τα A(1, 1) και B(4, –2).



β) Αφού xy = 10, θα ισχύει ότι $x \neq 0$ και $y \neq 0$. Τότε:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ yx = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 29 = 0 \\ y = \dfrac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\dfrac{10}{x}\right)^2 - 29 = 0 \\ y = \dfrac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2x^2 + x^2\dfrac{100}{x^2} - 29x^2 = 0 \\ y = \dfrac{10}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 29x^2 + 100 = 0 & \textbf{(I)} \\ y = \dfrac{10}{x} & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

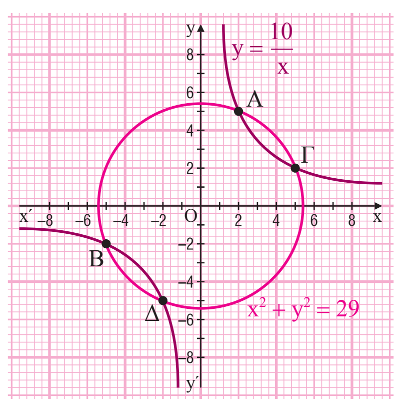
Θέτοντας στη σχέση (Ι) $u = x^2$, προκύπτει $u^2 - 29u + 100 = 0$, η οποία έχει Δ = 441 και u = 4 ή u = 25 $\Leftrightarrow$ $x^2 = 4$ ή $x^2 = 25$ $\Leftrightarrow$ x = ±2 ή x = ±5.

Αντικαθιστώντας λοιπόν στη (ΙΙ), βρίσκουμε ότι:

- Αν x = 2, τότε y = 5.
- Αν x = –2, τότε y = –5.
- Αν x = 5, τότε y = 2.
- Αν x = –5, τότε y = –2.

Συνεπώς (x, y) = (2, 5) ή (x, y) = (–2, –5) ή (x, y) = (5, 2) ή (x, y) = (–5, –2).

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 29$ εκφράζει κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα $\sqrt{29}$, ενώ η εξίσωση xy = 10 εκφράζει υπερβολή στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο. Οι τέσσερις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων εκφράζουν τα σημεία τομής τους, που είναι τα A(2, 5), B(–5, –2), Γ(5, 2) και Δ(–2, –5).



2. **Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά τις λύσεις του. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραμμών.**

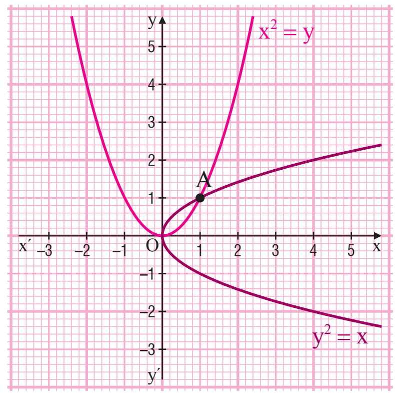
Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ (x^2)^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases}.$$

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 = αy$ ή $y^2 = αx$ $(α \neq 0)$ εκφράζει παραβολή.



- Αν $x = 0$, βρίσκουμε $y = 0$.
- Αν $x = 1$, βρίσκουμε $y = 1$.

Οι εξισώσεις που αποτελούν το παραπάνω σύστημα, αν παρασταθούν σε σύστημα συντεταγμένων, εκφράζουν δύο παραβολές. Οι λύσεις $(0, 0)$ και $(1, 1)$ του συστήματος είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής των παραβολών, δηλαδή των σημείων $O(0, 0)$ και $A(1, 1)$.

3. **Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά τις λύσεις του. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραμμών.**

Λύση

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 + y)^2 + y^2 = 4 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2y + y^2 + y^2 = 4 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 2y - 3 = 0 & \textbf{(I)} \\ x = y + 1 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 = ρ^2$ $(ρ \neq 0)$ εκφράζει κύκλο με κέντρο το $O(0, 0)$ και ακτίνα ίση με $|ρ|$.

Η εξίσωση (Ι) είναι 2ου βαθμού με $Δ = 28 > 0$ και

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \cdot 2} \Leftrightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \text{ ή } y = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}.$$

Από τη (ΙΙ) έχουμε:

- Αν $y = \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{2}$, τότε $x = \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{2} + 1 = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{2}$.
- Αν $y = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{2}$, τότε $x = \dfrac{-1 - \sqrt{7}}{2} + 1 = \dfrac{1 - \sqrt{7}}{2}$.

Επομένως οι λύσεις είναι οι:

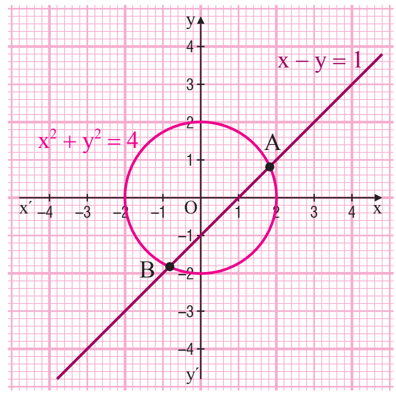
$$(x, y) = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$\text{ή } (x, y) = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right).$$

Οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων εκφράζουν τις συντεταγμένες των σημείων τομής.

Οι εξισώσεις που αποτελούν το παραπάνω σύστημα, αν παρασταθούν σε σύστημα συντεταγμένων, εκφράζουν έναν κύκλο ($x^2 + y^2 = 4$) και μια ευθεία ($x - y = 1$). Οι λύσεις αυτού του συστήματος είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

Δίπλα φαίνεται η **γραφική επίλυση του συστήματος**, η οποία όμως, όπως είναι προφανές, δεν μπορεί να δώσει ακριβείς λύσεις.



4. **Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x+y=16 \\ xy=63 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γραφικά τις λύσεις του. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των δύο γραμμών.**

Λύση

$$\begin{cases} x+y=16 \\ xy=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16-y \\ xy=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16-y \\ (16-y)y=63 \end{cases} \Leftrightarrow$$

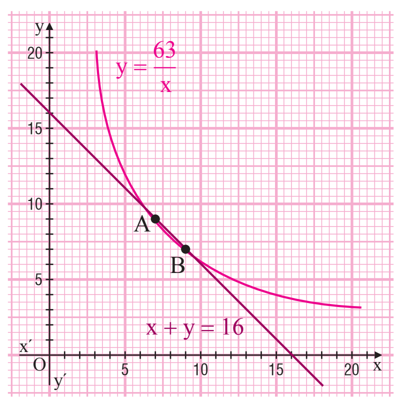
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=16-y \\ 16y-y^2=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16-y & \textbf{(I)} \\ y^2-16y+63=0 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Κάθε εξίσωση της μορφής $xy = \rho$ ($\rho \neq 0$) εκφράζει υπερβολή.

Η (ΙΙ) έχει $\Delta = 4$ και $y = 9$ ή $y = 7$. Τότε:

- Αν $y = 9$, από την (Ι) βρίσκουμε $x = 7$.
- Αν $y = 7$, από την (Ι) βρίσκουμε $x = 9$.

Οι εξισώσεις που αποτελούν το παραπάνω σύστημα, αν παρασταθούν σε σύστημα συντεταγμένων, εκφράζουν μια υπερβολή ($xy = 63$) και μια ευθεία ($x + y = 16$). Οι λύσεις (7, 9) και (9, 7) του συστήματος είναι οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους στο σύστημα των συντεταγμένων, δηλαδή των Α(7, 9) και Β(9, 7).



5. **Να λύσετε το σύστημα** $\begin{cases} \mathbf{3x+y=-1} \\ \mathbf{x^2-xy=14} \end{cases}$.

Λύση

$$\begin{cases} 3x+y=-1 \\ x^2-xy=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-3x \\ x^2-xy=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-3x \\ x^2-x(-1-3x)=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-3x \\ x^2+x+3x^2=14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1-3x & \textbf{(I)} \\ 4x^2+x-14=0 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Η εξίσωση (ΙΙ) είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 225$ και $x = -2$ ή $x = \frac{7}{4}$. Συνεπώς:

- Αν $x = -2$, από την (Ι) βρίσκουμε $y = -1 - 3(-2) = 5$.
- Αν $x = \frac{7}{4}$, από την (Ι) βρίσκουμε $y = -1 - 3\cdot\frac{7}{4} = -\frac{25}{4}$.

Επομένως $(x, y) = (-2, 5)$ ή $(x, y) = \left(\frac{7}{4}, -\frac{25}{4}\right)$.

6. **Να λύσετε το σύστημα** $\begin{cases} \mathbf{x^3+y^3=28} \\ \mathbf{xy(x+y)=12} \end{cases}$.

Λύση

$$\begin{cases} x^3+y^3=28 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=28 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3\cdot 12=28 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=64 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\sqrt[3]{64} \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 4xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ (4-y)y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y \\ 4y-y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-y & \textbf{(I)} \\ y^2-4y+3=0 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Η (ΙΙ) έχει $\Delta = 4$, οπότε $y = 1$ ή $y = 3$.

- Αν $y = 1$, από την (Ι) βρίσκουμε $x = 4 - 1 = 3$.
- Αν $y = 3$, από την (Ι) βρίσκουμε $x = 4 - 3 = 1$.

Επομένως $(x, y) = (3, 1)$ ή $(x, y) = (1, 3)$.

7. **Να λύσετε το σύστημα** $\begin{cases} \mathbf{2xy+4y^2-5y=0} \\ \mathbf{y=2x^2-3x+1} \end{cases}$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{cases} 2xy+4y^2-5y=0 \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x+4y-5)=0 \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } 2x+4y-5=0 \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } 4y=5-2x \\ y=2x^2-3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ή } y=\dfrac{5-2x}{4} & \textbf{(I)} \\ y=2x^2-3x+1 & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

➤ Αν $y = 0$, τότε από τη (ΙΙ) έχουμε $2x^2 - 3x + 1 = 0$, που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 1$ και ρίζες $x = 1$ ή $x = \frac{1}{2}$, οπότε $(x, y) = (1, 0)$ ή $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

➤ Αν $y = \frac{5-2x}{4}$, τότε από τη (ΙΙ) έχουμε $\frac{5-2x}{4} = 2x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 - 2x = 8x^2 - 12x + 4 \Leftrightarrow 8x^2 - 10x - 1 = 0$, που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta = 132$ και ρίζες $x = \frac{10 \pm \sqrt{132}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm 2\sqrt{33}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{8}$.

- Αν $x = \frac{5+\sqrt{33}}{8}$, τότε από την (Ι) βρίσκουμε:

$$y = \frac{5 - 2\cdot\frac{5+\sqrt{33}}{8}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{20-5-\sqrt{33}}{4}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{15-\sqrt{33}}{16},$$

οπότε $(x, y) = \left(\frac{5+\sqrt{33}}{8}, \frac{15-\sqrt{33}}{16}\right)$.

- Αν $x = \frac{5-\sqrt{33}}{8}$, τότε από την (Ι) βρίσκουμε:

$$y = \frac{5 - 2\cdot\frac{5-\sqrt{33}}{8}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{20-5+\sqrt{33}}{4}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{15+\sqrt{33}}{16},$$

οπότε $(x, y) = \left(\frac{5-\sqrt{33}}{8}, \frac{15+\sqrt{33}}{16}\right)$.

Επομένως $(x, y) = (1, 0)$ ή $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ή $(x, y) = \left(\frac{5+\sqrt{33}}{8}, \frac{15-\sqrt{33}}{16}\right)$ ή $(x, y) = \left(\frac{5-\sqrt{33}}{8}, \frac{15+\sqrt{33}}{16}\right)$.

8. Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση το διάστημα είναι $x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ και η ταχύτητα είναι $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$. Να εκφράσετε την επιτάχυνση α και τον χρόνο t συναρτήσει των x, υ, υ_0.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Ουσιαστικά έχουμε να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων ως προς α, t:

$$\begin{cases} x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \upsilon = \upsilon_0 + \alpha t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\upsilon_0 t + \alpha t t \\ \alpha t = \upsilon - \upsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\upsilon_0 t + (\upsilon - \upsilon_0)t \\ \alpha t = \upsilon - \upsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = (2\upsilon_0 + \upsilon - \upsilon_0)t \\ \alpha t = \upsilon - \upsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = (\upsilon_0 + \upsilon)t \\ \alpha t = \upsilon - \upsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x}{\upsilon_0 + \upsilon} \\ \alpha t = \upsilon - \upsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x}{\upsilon_0 + \upsilon} \\ \alpha \dfrac{2x}{\upsilon_0 + \upsilon} = \upsilon - \upsilon_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x}{\upsilon_0 + \upsilon} \\ \alpha = \dfrac{(\upsilon - \upsilon_0)(\upsilon_0 + \upsilon)}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2x}{\upsilon_0 + \upsilon} \\ \alpha = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2x} \end{cases}.$$

2η ΜΕΘΟΔΟΣ: Προβλήματα

Υπόδειξη: Θέτουμε με μεταβλητές τις άγνωστες ποσότητες και δημιουργούμε είτε σύστημα εξισώσεων είτε εξίσωση, τα οποία λύνουμε.

9. **Αν κάθε δύο απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου αυξηθούν κατά 2 m και 3 m αντίστοιχα, προκύπτει ένα ορθογώνιο, το οποίο μαζί με το τετράγωνο έχει εμβαδόν 81 m².**
Να βρείτε την πλευρά του τετραγώνου.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Αν x m (x > 0) είναι η πλευρά του τετραγώνου, το εμβαδόν του είναι x^2 m^2 και οι πλευρές του ορθογωνίου είναι (x + 2) m και (x + 3) m, με αντίστοιχο εμβαδόν ορθογωνίου $y = (x + 2)(x + 3)$ m^2.
Αφού το ορθογώνιο και το τετράγωνο έχουν εμβαδόν 81 m^2, έχουμε $y + x^2 = 81$.
Επομένως:

$$\begin{cases} y = (x+2)(x+3) \\ y + x^2 = 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 - x^2 = x^2 + 5x + 6 \\ y = 81 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 75 = 0 \quad \textbf{(I)} \\ y = 81 - x^2 \end{cases}.$$

Η (Ι) έχει $\Delta = 625$ και ρίζες $x = -\dfrac{15}{2}$ (απορρίπτεται) ή $x = 5$ m.

10. **Η κυρία Μαρία αγόρασε πετσέτες πληρώνοντας 24 ευρώ. Αν με τα ίδια χρήματα αγόραζε 4 πετσέτες επιπλέον, θα πλήρωνε 0,2 ευρώ λιγότερα για κάθε πετσέτα. Πόσο κοστίζει κάθε πετσέτα;**

Λύση

Έστω x (x > 0) οι πετσέτες που αγόρασε η κυρία Μαρία αρχικά και y ευρώ (y > 0) το κόστος της καθεμίας.

Τότε $xy = 24 \Leftrightarrow y = \frac{24}{x}$ **(I)**.

Όμως, αν αγόραζε x + 4 πετσέτες με τα 24 ευρώ, θα πλήρωνε 0,2 ευρώ λιγότερα ανά πετσέτα, άρα $(y - 0,2)(x + 4) = 24$ **(II)**.

Από τις (I), (II) έχουμε:

$$\left(\frac{24}{x} - 0,2\right)(x + 4) = 24 \Leftrightarrow \frac{24}{x}x - 0,2x + \frac{24}{x}4 - 0,2 \cdot 4 = 24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,2x + \frac{96}{x} - 0,8 = 0 \Leftrightarrow -0,2xx + \frac{96}{x}x - 0,8x = 0x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,2x^2 + 96 - 0,8x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 8x - 960 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 480 = 0,$$

όπου $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1(-480) = 1.936 > 0$,

οπότε $x = \frac{-4 \pm \sqrt{1.936}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 44}{2} \Leftrightarrow x = 20$ ή $x = -24$ (απορρίπτεται),

άρα αρχικά αγοράστηκαν 20 πετσέτες.

Συνεπώς, από την (I), κάθε πετσέτα κοστίζει $\frac{24}{20} = 1,2$ ευρώ.

11. Δύο εργάτες χρειάζονται 6 μέρες για να εκτελέσουν ένα έργο μαζί. Αν ο ένας χρειάζεται 5 μέρες λιγότερες από τον άλλο αν το έφτιαχνε μόνος του, πόσες μέρες χρειάζεται ο καθένας μόνος του για να τελειώσει το έργο;

Λύση

Έστω x (x > 0) οι μέρες που χρειάζεται ο ένας μόνος του για την περάτωση του έργου, οπότε x + 5 μέρες χρειάζεται ο άλλος μόνος του.

Επομένως σε μία μέρα ο καθένας μόνος του φτιάχνει το $\frac{1}{x}$ και το $\frac{1}{x+5}$ του έργου αντίστοιχα. Άρα σε 6 μέρες ο καθένας φτιάχνει τα $\frac{6}{x}$ και τα $\frac{6}{x+5}$ του έργου αντίστοιχα, όμως και οι δύο μαζί ολοκληρώνουν το έργο, οπότε:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{x+5} = 1 \Leftrightarrow x(x + 5)\frac{6}{x} + x(x + 5)\frac{6}{x+5} = x(x + 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(x + 5) + 6x = x(x + 5) \Leftrightarrow 6x + 30 + 6x = x^2 + 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6x - 30 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 = 0,$$

όπου $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1(-30) = 169 > 0$ και οι λύσεις είναι οι:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 13}{2} \Leftrightarrow x = 10 \text{ ή } x = -3 \text{ (απορρίπτεται).}$$

Συνεπώς ο ένας θέλει 10 μέρες για να τελειώσει μόνος του το έργο, ενώ ο άλλος θέλει 15 μέρες.

3η ΜΕΘΟΔΟΣ: Παραμετρικά συστήματα

Υπόδειξη: Λύνουμε τα συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης και διακρίνουμε περιπτώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου.

12. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε τον αριθμό των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} x^2 = 2y \\ y = x + \mu \end{cases}$ και να βρείτε τις λύσεις σε κάθε περίπτωση.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

$$\begin{cases} x^2 = 2y \\ y = x+\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2(x+\mu) \\ y = x+\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x+2\mu \\ y = x+\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2\mu = 0 & \textbf{(I)} \\ y = x+\mu & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Η εξίσωση (Ι) έχει $\Delta = 4 + 8\mu$. Τότε:

- Αν $4 + 8\mu > 0 \Leftrightarrow 8\mu > -4 \Leftrightarrow \mu > -\frac{1}{2}$, η εξίσωση (Ι) έχει δύο άνισες ρίζες, τις $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8\mu}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+2\mu}$, οπότε από τη (ΙΙ) έχουμε $y = 1 + \mu \pm \sqrt{1+2\mu}$.
- Αν $\mu = -\frac{1}{2}$, η εξίσωση (Ι) έχει μία διπλή ρίζα, τη $x = 1$, οπότε από τη (ΙΙ) βρίσκουμε $y = \frac{1}{2}$.
- Αν $\mu < -\frac{1}{2}$, η εξίσωση (Ι) είναι αδύνατη, άρα και το σύστημα είναι αδύνατο.

13. Δίνονται η παραβολή $y = 2x^2$ και η ευθεία $x + y = k$, όπου $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πλήθος των κοινών τους σημείων για τις διάφορες τιμές του k.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

Λύση

Το πλήθος των σημείων τομής της παραβολής και της ευθείας εξαρτάται από το πλήθος των λύσεων του συστήματος των εξισώσεών τους.

Επομένως $\begin{cases} y = 2x^2 \\ x+y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = k - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - x = 2x^2 \\ y = k - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - k = 0 & \textbf{(I)} \\ y = k - x & \textbf{(II)} \end{cases}.$

Το πλήθος των λύσεων του συστήματος εξαρτάται από το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (Ι), η οποία έχει $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2(-k) = 1 + 8k$.

Επομένως:

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 8k > 0 \Leftrightarrow 8k > -1 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{8}$, η εξίσωση (Ι) έχει δύο λύσεις, άρα και το σύστημα έχει δύο λύσεις, οπότε η παραβολή και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία.

- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$, η εξίσωση (Ι) έχει μία διπλή λύση, άρα και το σύστημα έχει μία λύση, οπότε η παραβολή και η ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο.
- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{8}$, η εξίσωση (Ι) δεν έχει πραγματικές λύσεις, άρα και το σύστημα δεν έχει λύση, οπότε η παραβολή και η ευθεία δεν έχουν κοινά σημεία.

14. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα λ, μ $\in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \mathbf{x^2 - 3y + \mu = 2xy} \\ \mathbf{y - x = \lambda} \end{cases}$ να είναι αδύνατο.

Λύση

$$\begin{cases} x^2 - 3y + \mu = 2xy \\ y - x = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3y + \mu = 2xy \\ y = x + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3(x+\lambda) + \mu = 2x(x+\lambda) \\ y = x + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 3\lambda + \mu = 2x^2 + 2x\lambda \\ y = x + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x\lambda - x^2 + 3x + 3\lambda - \mu = 0 \\ y = x + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2\lambda + 3)x + 3\lambda - \mu = 0 & \textbf{(I)} \\ y = x + \lambda & \textbf{(II)} \end{cases}.$$

Η εξίσωση (Ι) είναι 2ου βαθμού με:
$\Delta = (2\lambda + 3)^2 - 4(3\lambda - \mu) = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 12\lambda + 4\mu = 4\lambda^2 + 9 + 4\mu$.
Το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο όταν το τριώνυμο (Ι) είναι αδύνατο, δηλαδή όταν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 9 + 4\mu < 0$.

Ερωτήσεις νέου τύπου

✔ **Να σημειώσετε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.**

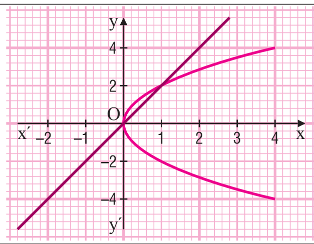
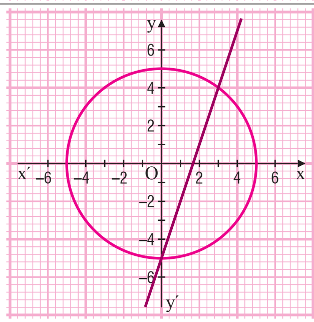
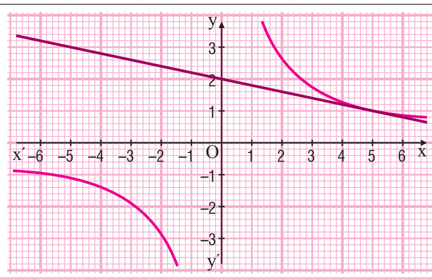
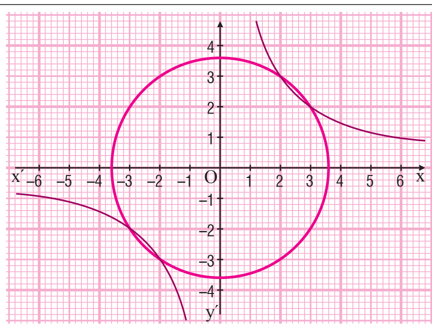
1. Το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y = -5 \\ y + 3x = 0 \end{cases}$ είναι αδύνατο. ☐

2. Το σύστημα $\begin{cases} 2xy - 5y^2 + 3y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$ έχει λύση (0, 0). ☐

3. Το σύστημα $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής (κ, ±κ), κ $\in \mathbb{R}$. ☐

4. Αν λ = 2, το σύστημα $\begin{cases} \lambda x^2 - 4x + 2\lambda = 4y - 4 \\ y - x = 0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. ☐

✔ **Να αντιστοιχίσετε τα σχήματα της 1ης στήλης με τα συστήματα των εξισώσεών τους της 2ης στήλης.**

	1η στήλη	2η στήλη	
		$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x \end{cases}$	**Α**
1		$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ yx = 6 \end{cases}$	**Β**
2		$\begin{cases} xy = 5 \\ 5y + x = 10 \end{cases}$	**Γ**
3		$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 4x \end{cases}$	**Δ**
4		$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$	**Ε**
		$\begin{cases} xy = 5 \\ y + 5x = 2 \end{cases}$	**ΣΤ**

Ασκήσεις προς λύση

✔ Α΄ Ομάδα

1. Να λύσετε και να ερμηνεύσετε γραφικά τα ακόλουθα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=6 \\ y^2=3x \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} x+y=8 \\ y^2=-7x \end{cases}$, **γ)** $\begin{cases} x+y=15 \\ y^2=4x \end{cases}$, **δ)** $\begin{cases} -x+2y=6 \\ y^2=6x \end{cases}$.

2. Να λύσετε και να ερμηνεύσετε γραφικά τα ακόλουθα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x-y=6 \\ x^2=8y \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2=-y \end{cases}$, **γ)** $\begin{cases} 5x+2y=7 \\ x^2=-2y \end{cases}$, **δ)** $\begin{cases} x+3y=6 \\ x^2=9y \end{cases}$.

3. Να λύσετε και να ερμηνεύσετε γραφικά τα ακόλουθα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} x-y=5 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$, **γ)** $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$, **δ)** $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$.

4. Να λύσετε και να ερμηνεύσετε γραφικά τα ακόλουθα συστήματα:

α) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=12 \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=15 \end{cases}$, **γ)** $\begin{cases} 2x+y=10 \\ xy=8 \end{cases}$, **δ)** $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$.

5. Να λύσετε και να ερμηνεύσετε γραφικά τα ακόλουθα συστήματα:

α) $\begin{cases} yx=9 \\ x^2=3y \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} x^2+y^2=45 \\ y^2=12x \end{cases}$, **γ)** $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ xy=20 \end{cases}$,

δ) $\begin{cases} x^2=9y \\ 3y^2=x \end{cases}$, **ε)** $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2=-y \end{cases}$, **στ)** $\begin{cases} xy=16 \\ y^2=32x \end{cases}$.

6. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x^2+9=y^2 \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} 3x+4y=13 \\ x^2-5xy=-6 \end{cases}$, **γ)** $\begin{cases} x-3y=3 \\ xy=6 \end{cases}$.

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής με εξίσωση $y=-3x^2$ και της ευθείας με εξίσωση $y=x-4$.

8. Να βρείτε τα κοινά σημεία του κύκλου με εξίσωση $y^2+x^2=8$ και της ευθείας με εξίσωση $y=-x$.

9. Τα έξοδα για ένα γεύμα ήταν 100 €. Όμως μεταξύ των ατόμων που έλαβαν μέρος υπήρχαν και 5 φιλοξενούμενοι, οπότε οι υπόλοιποι αναγκάστηκαν να βάλουν από 1 € επιπλέον σε σχέση με το ποσό που τους αναλογούσε. Πόσα άτομα έλαβαν συνολικά μέρος στο γεύμα;

10. Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι στην ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση το διάστημα είναι $x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2$ και η ταχύτητα είναι $\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t$. Να εκφράσετε την επιτάχυνση α και τον χρόνο t συναρτήσει των x, υ, υ_0.

11. Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι στην ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση η γωνιακή μετατόπιση είναι $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2$ και η γωνιακή ταχύτητα είναι $\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t$. Να εκφράσετε τη γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ και τον χρόνο t συναρτήσει των θ, ω, ω_0.

12. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου με διαγώνιο 20 m και εμβαδόν 192 m^2.

13. Να βρείτε τις διαστάσεις ενός ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα 13 m και εμβαδόν 30 m^2.

14. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα, γινόμενο και πηλίκο τον ίδιο αριθμό.

✔ Β΄ Ομάδα

15. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε τον αριθμό των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} x^2 = 3y \\ y = 2x + \mu \end{cases}$ και να βρείτε τις λύσεις σε κάθε περίπτωση.

16. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε τον αριθμό των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} y^2 = 5x \\ x = 2y - \mu \end{cases}$ και να βρείτε τις λύσεις σε κάθε περίπτωση.

17. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών σημείων των γραμμών με εξισώσεις $x^2 + y^2 = 25$, $y = x + \mu$. Ποια είναι τα κοινά σημεία σε κάθε περίπτωση;

18. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών σημείων της υπερβολής $xy = -4$ και της ευθείας $y + x = \mu$.

19. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η ευθεία $y = \lambda x + 3$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$;

20. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού κ η ευθεία $y = 2x + \kappa$ τέμνει την παραβολή $y = -x^2$ σε δύο σημεία;

21. Δίνονται η ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + 5$ και η παραβολή $y^2 = 3x$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραβολή έχει:
α) ένα κοινό σημείο με την ευθεία, **β)** δύο κοινά σημεία με την ευθεία.

22. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις της ευθείας x + y = μ και του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

23. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + \mu x + \lambda^2 + 2y + \mu = 0 \\ y = \lambda x - \mu \end{cases}$$

να είναι αδύνατο.

24. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 92 \\ 5(x + y) = 3xy \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 37 \\ xy(x + y) = -12 \end{cases}$, **γ)** $\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ (x + y)xy = 2 \end{cases}$,

δ) $\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 - xy = 2 \end{cases}$, **ε)** $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$, **στ)** $\begin{cases} x^4 + y^4 = 97 \\ x + y = -1 \end{cases}$.

25. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 22 \\ x^2 - y^2 + x - y = 18 \end{cases}$, **β)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 9x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases}$,

γ) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 2y = -2 \\ x^2 + y^2 + x + y = 2 \end{cases}$, **δ)** $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$.

26. Η κύριος Νεκτάριος αγόρασε τετράδια και πλήρωσε 18 ευρώ. Αν με τα ίδια χρήματα αγόραζε 8 τετράδια επιπλέον, θα πλήρωνε 0,6 ευρώ λιγότερα για κάθε τετράδιο. Πόσο κοστίζει κάθε τετράδιο;

27. Δύο εργάτες χρειάζονται 35 μέρες για να εκτελέσουν ένα έργο μαζί. Αν ο ένας χρειάζεται 24 μέρες λιγότερες από τον άλλο αν το έφτιαχνε μόνος του, πόσες μέρες χρειάζεται ο καθένας μόνος του για να τελειώσει το έργο;

28. Το άθροισμα των πλευρών δύο τετραγώνων είναι 11 cm και η διαφορά των εμβαδών τους είναι 33 cm^2. Να βρείτε τις πλευρές των τετραγώνων αυτών.

29. Αν ελαττώσουμε τη βάση ενός ορθογωνίου κατά 3 cm και αυξήσουμε την άλλη πλευρά κατά 2 cm, το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 1 cm^2. Αν όμως αυξήσουμε τη βάση κατά 1 cm και αυξήσουμε την άλλη πλευρά κατά 6 cm, το εμβαδόν γίνεται 132 cm^2. Να βρείτε τις διαστάσεις του.

30. Να βρείτε τις γωνίες x, y με $0^o < \hat{x}, \hat{y} < 90^o$ για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu^2 y - 4\eta\mu x = -1 \\ \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu y + 2\eta\mu x = 2 \end{cases}$$