ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανισώσεις

23 Ανισώσεις 1ου βαθμού

Θεωρία

Επίλυση των ανισώσεων $\alpha x + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$

1. Για να λύσουμε τις ανισώσεις $\alpha x + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$, ενεργούμε όπως και στην εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$, λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι, όταν διαιρούμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με έναν (μη μηδενικό) αριθμό α, τότε η φορά της ανισότητας:

- μένει η ίδια, αν $\alpha > 0$
- αλλάζει, αν $\alpha < 0$

Έχουμε, π.χ.:

$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$, οπότε:

- Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta \Leftrightarrow x > -\dfrac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha < 0$, τότε $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta \Leftrightarrow x < -\dfrac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha = 0$, τότε $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow 0x > -\beta$.
  - Αν $-\beta \geq 0$ (δηλαδή αν $\beta \leq 0$), είναι αδύνατη.
  - Αν $-\beta < 0$ (δηλαδή αν $\beta > 0$), αληθεύει για κάθε τιμή του x.

Λυμένες ασκήσεις

2. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x-2}{2} - \dfrac{2x-1}{4} > \dfrac{x-1}{6} - \dfrac{1}{4}$ (1).

Λύση

Η (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$$12 \cdot \frac{x-2}{2} - 12 \cdot \frac{2x-1}{4} > 12 \cdot \frac{x-1}{6} - 12 \cdot \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 6(x-2) - 3(2x-1) > 2(x-1) - 3 \Leftrightarrow 6x - 12 - 6x + 3 > 2x - 2 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x > -2 - 3 + 12 - 3 \Leftrightarrow -2x > 4 \Leftrightarrow x < \dfrac{4}{-2} \Leftrightarrow x < -2.$

3. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{1}{6} > x - \dfrac{3}{2}$ (1):

i) στο $\mathbb{R}$ ii) στο $\mathbb{N}$ iii) στο $\mathbb{Z}$

Λύση

Η (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$(1) \Leftrightarrow 6 \cdot \dfrac{2x-1}{3} - 6 \cdot \dfrac{1}{6} > 6 \cdot x - 6 \cdot \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2(2x-1) - 1 > 6x - 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 2 - 1 > 6x - 9 \Leftrightarrow 4x - 6x > -9 + 2 + 1 \Leftrightarrow -2x > -6 \Leftrightarrow x < \dfrac{-6}{-2} \Leftrightarrow x < 3.$

i) Στο $\mathbb{R}$, όπως είδαμε: $(1) \Leftrightarrow x < 3$.

ii) Στο $\mathbb{N}$: $(1) \Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow (x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2)$.

iii) Στο $\mathbb{Z}$: $(1) \Leftrightarrow (x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = 0$ ή $x = -1$ ή $x = -2 \ldots)$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{2x-4}{10} - \dfrac{x-5}{15} < \dfrac{2x-10}{15}$ (1).

Λύση

Η (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$30 \cdot \dfrac{2x-4}{10} - 30 \cdot \dfrac{x-5}{15} < 30 \cdot \dfrac{2x-10}{15} \Leftrightarrow 3(2x-4) - 2(x-5) < 2(2x-10) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 12 - 2x + 10 < 4x - 20 \Leftrightarrow 6x - 2x - 4x < -20 + 12 - 10 \Leftrightarrow 0x < -18$

και είναι αδύνατη.

5. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{2x-3}{5} < \dfrac{x-1}{10} - \dfrac{2}{5}$.

Λύση

Η ανίσωση (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$(1) \Leftrightarrow 10 \cdot \dfrac{x-3}{2} - 10 \cdot \dfrac{2x-3}{5} < 10 \cdot \dfrac{x-1}{10} - 10 \cdot \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(x-3) - 2(2x-3) < x - 1 - 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 5x - 15 - 4x + 6 < x - 1 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x - 4x - x < -1 - 4 + 15 - 6 \Leftrightarrow 0x < 4$

και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση 3x + 10 έχει τιμή:
i) το πολύ 25 ii) τουλάχιστον 16 iii) όχι μικρότερη από 28
iv) όχι μεγαλύτερη από 4 v) που υπερβαίνει το 7
vi) που δεν υπερβαίνει το 1 vii) μεταξύ των −2 και 10

Λύση

i) $3x + 10 \leq 25 \Leftrightarrow 3x \leq 25 - 10 \Leftrightarrow 3x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq 5$

ii) $3x + 10 \geq 16 \Leftrightarrow 3x \geq 16 - 10 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$

iii) $3x + 10 \geq 28 \Leftrightarrow 3x \geq 28 - 10 \Leftrightarrow 3x \geq 18 \Leftrightarrow x \geq 6$

iv) $3x + 10 \leq 4 \Leftrightarrow 3x \leq 4 - 10 \Leftrightarrow 3x \leq -6 \Leftrightarrow x \leq -2$

v) $3x + 10 > 7 \Leftrightarrow 3x > 7 - 10 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1$

vi) $3x + 10 \leq 1 \Leftrightarrow 3x \leq 1 - 10 \Leftrightarrow 3x \leq -9 \Leftrightarrow x \leq -3$

vii) $-2 < 3x + 10 < 10 \Leftrightarrow -2 - 10 < 3x < 10 - 10 \Leftrightarrow -12 < 3x < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$

7. Αν $x = 2κπ - \frac{π}{3}$, $κ \in \mathbb{Z}$, και $x \in [0, 2π)$, να βρείτε τον x.

Λύση

Θα βρούμε πρώτα το κ. Λύνουμε τη (διπλή) ανίσωση $x \in [0, 2π)$ ως προς κ και έχουμε:

$$x \in [0, 2π) \Leftrightarrow 0 \leq x < 2π \Leftrightarrow 0 \leq 2κπ - \frac{π}{3} < 2π \Leftrightarrow \frac{π}{3} \leq 2κπ < 2π + \frac{π}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{π}{3} \leq 2κπ < \frac{7π}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 2κ < \frac{7}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq κ < \frac{7}{6}.$$

Όμως $κ \in \mathbb{Z}$, άρα $κ = 1$ και έτσι $x = 2κπ - \frac{π}{3} \overset{κ=1}{=\!=} 2 \cdot 1 \cdot π - \frac{π}{3} = \frac{5π}{3}$.

Τελικά λοιπόν $x = \frac{5π}{3}$.

Πίνακας προσήμων της παράστασης αx + β

8. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του x, το πρόσημο των τιμών της παράστασης:
i) 5x − 10 ii) −3x + 12

Λύση

Σχόλιο Το πρόσημο της παράστασης $αx + β$ (με $α \neq 0$) φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$αx + β$	ετερόσημο του α	0	ομόσημο του α

$\left(x_0 = -\dfrac{β}{α} \text{ είναι η ρίζα του } αx + β\right)$

i) Η παράσταση $5x - 10$ έχει τη μορφή $αx + β$ με $α = 5 > 0$ και ρίζα $x_0 = 2$ [αφού $5x - 10 = 0 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x = 2$].
Έτσι, το πρόσημό της φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$5x - 10$	$-$	0	$+$

ii) Η παράσταση $-3x + 12$ έχει τη μορφή $αx + β$ με $α = -3 < 0$ και ρίζα $x_0 = 4$ $\left[\text{αφού } -3x + 12 = 0 \Leftrightarrow -3x = -12 \Leftrightarrow x = \dfrac{-12}{-3} \Leftrightarrow x = 4\right]$.
Έτσι, το πρόσημό της φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$-3x + 12$	$+$	0	$-$

Συναλήθευση ανισώσεων (επίλυση συστήματος ανισώσεων)

9. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν (αληθεύουν όλες) οι ανισώσεις:

i) $6x - 1 < 2x + 5$ **και** $2 - x \leq 2x + \dfrac{1}{4}$

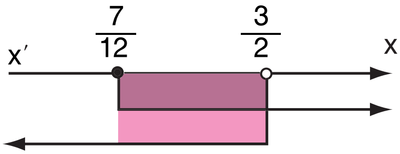
ii) $\dfrac{x}{2} + 1 > \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}$ **και** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x}{6} - 1$

Λύση

i) Για να βρούμε τις κοινές τους λύσεις, λύνουμε πρώτα κάθε ανίσωση χωριστά. Έτσι, έχουμε:

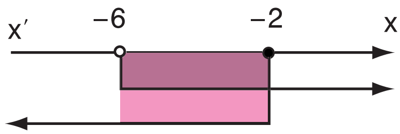
- $6x - 1 < 2x + 5 \Leftrightarrow 4x < 6 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$ και
- $2 - x \leq 2x + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow -3x \leq -\dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x \geq \dfrac{7}{12}$.

Στη συνέχεια παριστάνουμε τις λύσεις τους πάνω στον ίδιο άξονα. Έτσι παρατηρούμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν μόνο αν $\frac{7}{12} \le x < \frac{3}{2}$.



ii) Έχουμε:

- $\frac{x}{2} + 1 > \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 2x + 4 > x - 2 \Leftrightarrow x > -6.$
- $6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{1}{3} \le 6 \cdot \frac{x}{6} - 6 \cdot 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 3x - 2 \le x - 6 \Leftrightarrow 2x \le -4 \Leftrightarrow x \le -2.$
- Οι ανισώσεις συναληθεύουν αν και μόνο αν $-6 < x \le -2$.



«Διπλή» ανίσωση

10. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $-x < 2x - 6 < x + 2$.

Λύση

$-x < 2x - 6 < x + 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x < 2x - 6 \quad (1) \\ \text{και} \\ 2x - 6 < x + 2 \quad (2) \end{cases}$$

- $(1) \Leftrightarrow -x - 2x < -6 \Leftrightarrow -3x < -6 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x > \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x > 2.$
- $(2) \Leftrightarrow 2x - x < 2 + 6 \Leftrightarrow x < 8.$

Επομένως: $-x < 2x - 6 < x + 2 \Leftrightarrow 2 < x < 8.$

Λύνουμε **ξεχωριστά** καθεμία από τις ανισώσεις: $-x < 2x - 6$ και $2x - 6 < x + 2$ και μετά **συναληθεύουμε**.

Επίλυση παραμετρικής ανίσωσης

11. Να λύσετε ως προς x την ανίσωση $\lambda(x - \lambda) > x - 1 \quad (1)$.

Λύση

[Αρχικά, φέρνουμε την ανίσωση στη μορφή $Ax \gtrless B$.]

Η (1), ισοδύναμα, γράφεται:

$(1) \Leftrightarrow \lambda(x-\lambda) > x-1 \Leftrightarrow \lambda x - \lambda^2 > x-1 \Leftrightarrow \lambda x - x > \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda-1)x > (\lambda-1)(\lambda+1)$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda - 1 > 0$, δηλαδή $\lambda > 1$, τότε $(1) \Leftrightarrow x > \lambda + 1$.
- Αν $\lambda - 1 < 0$, δηλαδή $\lambda < 1$, τότε $(1) \Leftrightarrow x < \lambda + 1$.
- Αν $\lambda - 1 = 0$, δηλαδή $\lambda = 1$, τότε $(1) \Leftrightarrow 0x > 0$, που είναι αδύνατη.

12. Να λύσετε ως προς x την ανίσωση $\lambda x + 3 \leq \mu - 4x$.

Λύση

[Φέρνουμε πρώτα την ανίσωση στη μορφή $Ax \leq B$ ή $Ax \geq B$.]
Η ανίσωση, ισοδύναμα, γράφεται:
$\lambda x + 3 \leq \mu - 4x \Leftrightarrow \lambda x + 4x \leq \mu - 3 \Leftrightarrow (\lambda + 4)x \leq \mu - 3 \quad (1)$.
[Διακρίνουμε περιπτώσεις για το λ, ανάλογα με το αν ο συντελεστής του x είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν.]

- Αν $\lambda + 4 > 0$, δηλαδή $\lambda > -4$, τότε $(1) \Leftrightarrow x \leq \dfrac{\mu-3}{\lambda+4}$.
- Αν $\lambda + 4 < 0$, δηλαδή $\lambda < -4$, τότε $(1) \Leftrightarrow x \geq \dfrac{\mu-3}{\lambda+4}$.
- Αν $\lambda + 4 = 0$, δηλαδή $\lambda = -4$, τότε $(1) \Leftrightarrow 0x \leq \mu - 3$, οπότε:
  - Αν [$\lambda = -4$ και] $\mu - 3 \geq 0$, δηλαδή $\mu \geq 3$, τότε η (1) αληθεύει για κάθε x.
  - Αν [$\lambda = -4$ και] $\mu - 3 < 0$, δηλαδή $\mu < 3$, τότε η (1) είναι αδύνατη.

Εύρεση παραμέτρων

13. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η ανίσωση $\lambda x - 3\mu < 2(2x+3)$:
i) είναι αδύνατη, ii) αληθεύει για κάθε x.

Λύση

Φέρνουμε πρώτα την ανίσωση στη μορφή $Ax > B$ ή $Ax < B$.
Έχουμε: $\lambda x - 3\mu < 2(2x+3) \Leftrightarrow \lambda x - 3\mu < 4x + 6 \Leftrightarrow \lambda x - 4x < 3\mu + 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda - 4)x < 3\mu + 6$.

i) Η ανίσωση είναι αδύνατη αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \lambda - 4 = 0 \\ 3\mu + 6 \leq 0 \end{cases} \quad \text{δηλαδή:} \quad \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu \leq -2 \end{cases}$$

ii) Η ανίσωση αληθεύει για κάθε x αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \lambda - 4 = 0 \\ 3\mu + 6 > 0 \end{cases} \quad \text{δηλαδή:} \quad \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu > -2 \end{cases}$$

γ Ερωτήσεις κατανόησης

14. Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στην πρώτη γραμμή:

Ανισότητα που ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός x	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο πραγματικός αριθμός x
$3 \leq x < 5$	$[3, 5)$
$2 < x \leq 10$	
	$(-4, -1)$
$-3 \leq x \leq 1$	
	$(-\infty, 5]$
$x < -3$	
	$(-2, +\infty)$
$x \geq 17$	

15. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπως φαίνεται στην πρώτη γραμμή:

Ανισότητα που ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός x	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο πραγματικός αριθμός x
$-3 < x \leq 1$	$(-3, 1]$
	$(-4, 2]$
$-3 < x < 2$	
	$[1, 5]$
$-2 \leq x < 1$	
	$(-\infty, 7)$
$x > 5$	
	$[-10, +\infty)$
$x \leq 12$	

16. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).

Σ Λ

i) Αν α αριθμός του διαστήματος $[-1, 0]$ και του $[0, 3]$, τότε $α = 0$. ❑ ❑

ii) Αν α αριθμός του διαστήματος $[1, 3]$, τότε ο α ανήκει στο διάστημα $[1, 2)$ ή στο $(2, 3]$. ❑ ❑

iii) Η λύση της εξίσωσης $αx = β$, με $1 \leq α \leq 2$ και $3 < β \leq 6$, είναι αριθμός του διαστήματος $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right]$. ❑ ❑

iv) Οι ανισώσεις $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$ και $3x \geq 3$ είναι ισοδύναμες. ❑ ❑

v) Οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $2(x + 5) < 5 - x$ και $\frac{x}{3} \geq \frac{x}{4}$ είναι ακριβώς εκείνα τα x με $0 < x < 1$. ❑ ❑

vi) Υπάρχει x στο $(-12, +\infty)$ για το οποίο αληθεύει η ανίσωση $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} \geq 2$. ❑ ❑

17. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος x για τον οποίο ισχύει $-6x - 5 > 8$;

Α. 3 **Β.** -3 **Γ.** -2 **Δ.** 2

18. Ποιος είναι ο μικρότερος ακέραιος x για τον οποίο ισχύει $3 - 2x \leq 10 + 3x$;

Α. -3 **Β.** -2 **Γ.** -1 **Δ.** 1

19. Αν $x \leq 8x + 1 \leq -4$ (1), τότε:

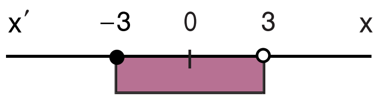
Α. $x \leq 0$ **Β.** $-\frac{7}{8} \leq x \leq \frac{1}{8}$ **Γ.** $-\frac{5}{8} \leq x \leq \frac{3}{8}$

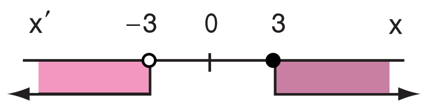
Δ. δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία να ισχύει η (1)

20. Ισχύει $3x - 4 < 0$ και $4x - 1 < 3$ αν και μόνο αν:

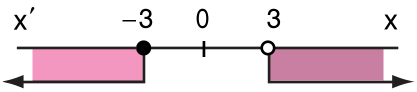
Α. $x < 1$ **Β.** $x < \frac{4}{3}$ **Γ.** $x > \frac{3}{4}$ **Δ.** $x < \frac{8}{7}$

21. Αν $-x \geq 3$ ή $2x - 1 > 5$, τότε ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα δείχνει με γραμμοσκίαση το σύνολο στο οποίο υποχρεούται να βρίσκεται (να ανήκει) ο x;

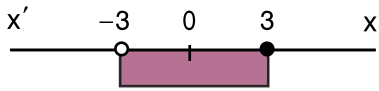
Α.


Β.


Γ.



Δ.



22. Αν ισχύει $\lambda(x-2)>0$ για κάποιο $x<2$, τότε:
Α. $\lambda<-2$ **Β.** $\lambda>2$ **Γ.** $\lambda>0$ **Δ.** $\lambda<0$

23. Έστω η ανίσωση $(\lambda-1)x>\lambda^2-2$. Να εξετάσετε ποιο από τα παρακάτω πρέπει να συμβαίνει, ώστε η ανίσωση να αληθεύει για κάθε τιμή του x:
Α. $\lambda=1$ **Β.** $\lambda=2$ **Γ.** $\lambda=\sqrt{2}$ **Δ.** $\lambda=-\sqrt{2}$ **Ε.** $\lambda=0$

24. Έστω η ανίσωση $(\lambda-2)x>1+\lambda$. Να βρείτε ποιο από τα παρακάτω πρέπει να ισχύει, ώστε η ανίσωση να είναι αδύνατη:
Α. $\lambda=-1$ **Β.** $\lambda=-2$ **Γ.** $\lambda=2$ **Δ.** $\lambda=0$ **Ε.** $\lambda=1$

25. Αν $(\alpha+1>0$ και $2-\alpha<0)$ ή $(\alpha+1<0$ και $2-\alpha>0)$, τότε:
Α. $\alpha<-2$ ή $\alpha>1$ **Β.** $\alpha<-2$ ή $\alpha<1$ **Γ.** $-1<\alpha<2$ **Δ.** $\alpha>2$ ή $\alpha<-1$

26. Αν $(\alpha+1>0$ και $3-\alpha\geq 0)$ ή $(\alpha+1<0$ και $3-\alpha\leq 0)$, τότε:
Α. $-1<\alpha\leq 3$ **Β.** $-1\leq\alpha<3$ **Γ.** $\alpha<-1$ ή $\alpha\geq 3$ **Δ.** $\alpha<1$ ή $\alpha\geq -3$

27. Οι λύσεις της ανίσωσης $\dfrac{2}{x}>1$ είναι:
Α. $x<2$ **Β.** $x>-2$ **Γ.** $x>0$ **Δ.** $0<x<2$

Ασκήσεις για λύση

Επίλυση ανίσωσης

28. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $2x+1\geq 4x-3$ **ii)** $(x+1)^2-(x-1)^2<0$
iii) $(2x+1)^3+(x-2)^3>9x^3+6x^2-10$

29. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $5-3x>x+2$ **ii)** $3x-8\leq 4x-8$
iii) $(x-1)^2+(x+3)^2>2(x-2)(x+1)+38$

30. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $0 \cdot x < 2$ **ii)** $0 \cdot x < -1$ **iii)** $0 \cdot x > -1$

iv) $0 \cdot x > 0$ **v)** $0 \cdot x > 1$ **vi)** $0 \cdot x < 0$

31. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $0 \cdot x \geq 3$ **ii)** $0 \cdot x \geq 0$ **iii)** $0 \cdot x \geq -2$

iv) $0 \cdot x \leq 3$ **v)** $0 \cdot x \leq 0$ **vi)** $0 \cdot x \leq -1$

32. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2(x-2) > 3(x-1) - x$ **ii)** $5(x-4) - 2(5-x) \leq 7(x-3)$

iii) $3x - 5(2-x) > 4(2x-1) + 7$ **iv)** $3(x+3) - 2(3x+1) > -3(x-1)$

v) $5(x+1) \geq 5 - 2(2-x) - 3(4-x)$ **vi)** $11 - 5(x-2) < 4(x+1) - 9(x+2)$

33. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+5}{6} \geq \dfrac{x-2}{3}$ **ii)** $\dfrac{x-2}{2} + \dfrac{2x+1}{4} > \dfrac{x-1}{6}$

34. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{y+4}{6} + 2 > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{2} - 1 + \dfrac{y-2}{3}\right)$ **ii)** $\omega - \dfrac{\omega-3}{2} \leq \dfrac{\omega}{2} - \dfrac{\omega-4}{4}$

35. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-3}{3} > \dfrac{x+5}{6}$ **ii)** $\dfrac{x+5}{4} - \dfrac{x-3}{6} \geq \dfrac{x}{3}$

iii) $\dfrac{7-3x}{12} + \dfrac{3}{4} < 2(x-2) + \dfrac{5(5-2x)}{6}$

36. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{4x-9}{5} - \dfrac{x-9}{6} < \dfrac{2x+6}{3} - \dfrac{2x-15}{9}$ **ii)** $\dfrac{x}{2} - 1 < \dfrac{4-2x}{5} + \dfrac{3}{4}(x-2)$

iii) $\dfrac{(x-1)(x+5)}{3} - \dfrac{(x+2)(x+5)}{12} \geq \dfrac{(x-1)(x+2)}{4}$

37. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{(x+2)^2}{3} + \dfrac{(x-1)(x-2)}{2} \geq \dfrac{(5x+4)(x-3)}{6} + \dfrac{28}{3}$

ii) $\dfrac{(x-9)^2}{5} + \dfrac{(x-1)^2}{3} > \dfrac{(3x-5)(3x-7)-(x+1)(x-3)}{15}$

38. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-5}{2}-\frac{x-5}{3}>\frac{x+5}{6}$ **ii)** $\frac{x-3}{2}-\frac{x-3}{3}\leq\frac{x+5}{6}$

iii) $\frac{5+2x}{12}-\frac{3-2x}{4}\geq\frac{2x-3}{6}+\frac{x-5}{3}$ **iv)** $\frac{x+2}{16}-\frac{2+x}{2}<\frac{x}{16}-\frac{3+2x}{4}-1$

39. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $2x-3$ έχει τιμή:
i) τουλάχιστον 5 **ii)** το πολύ -1 **iii)** όχι μεγαλύτερη από 1
iv) όχι μικρότερη από 9 **v)** που υπερβαίνει το -7
vi) που δεν υπερβαίνει το 7 **vii)** μεταξύ των -5 και 9

40. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $-4x+2$ έχει τιμή:
i) τουλάχιστον 6 **ii)** το πολύ 10 **iii)** που υπερβαίνει το -2
iv) που δεν υπερβαίνει το -6 **v)** όχι μικρότερη από 18
vi) όχι μεγαλύτερη από 14 **vii)** μεταξύ των -10 και 26

41. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες προσήμων (αφού πρώτα βρείτε τη ρίζα x_0 της παράστασης $αx+β$ που δίνεται κάθε φορά):

i)

x	
$2x-1$	0

ii)

x	
$3x+6$	0

iii)

x	
$-x+4$	0

iv)

x	
$-2x-10$	0

v)

x	
$-3x$	0

vi)

x	
$2-5x$	0

42. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους αληθεύει η ανίσωση:
i) $3x+2\leq 9$ **ii)** $(x-2)\sqrt{2}<x-1$

43. Να βρείτε τον μικρότερο ακέραιο κ για τον οποίο ισχύει:

i) $-8{,}25<κ<-3{,}54$ **ii)** $κ\geq-\frac{158}{3}$ **iii)** $-κ\leq\frac{612}{5}$

44. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό ν για τον οποίο ισχύει $ν\geq\frac{256}{7}$.

45. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό x για τον οποίο ισχύει:
i) $4x - 1 > 7$ **ii)** $5x - 2 > 10$ **iii)** $3x + 2 \geq -10$

46. Να βρείτε τον μικρότερο ακέραιο αριθμό x για τον οποίο ισχύει:
i) $2x + 15 > 7$ **ii)** $-x - 8 < -3$

47. Να βρείτε τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό ν του οποίου το τριπλάσιο, ελαττωμένο κατά 2, δεν υπερβαίνει το 15.

48. Αν $x = κπ - \frac{π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$, και $x \in (0, π)$, να βρείτε τον x.

49. Αν $x = 2κπ - \frac{π}{5}$, $κ \in \mathbb{Z}$, και $x \in [0, 3π)$, να βρείτε τον x.

50. Αν $x = κπ - \frac{π}{4}$, $κ \in \mathbb{Z}$, και $x \in [0, 2π)$, να βρείτε τον x.

51. Αν $x = κπ + \frac{π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$, και $x \in [0, 2π)$, να βρείτε τον x.

52. Αν $x = 2κπ + \frac{2π}{3}$, $κ \in \mathbb{Z}$, και $x \in (-π, 3π]$, να βρείτε τον x.

Συναληθεύουσες ανισώσεις – Συστήματα ανισώσεων

53. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

i) $3x < 2(x + 1)$ και $3(x - 2) - \frac{x}{2} < 3x - 7$

ii) $\frac{5x + 1}{2} - \frac{1 - 3x}{5} > 3 - 2x$ και $\frac{x}{2} - 2 + \frac{5 - 2x}{5} < \frac{x - 2}{10} - \frac{2}{5}$

54. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
i) $5x - 12 < 3x - 3$ και $2x + 3 \geq 1$

ii) $\frac{x + 4}{9} + \frac{x + 8}{8} > \frac{2x + 5}{7}$ και $\frac{x + 8}{4} - \frac{x - 4}{6} > \frac{x - 1}{3}$

55. Να λύσετε τα συστήματα των ανισώσεων:

i) $-2 \leq 6x + 3 \leq 3$ **ii)** $\frac{3x + 2}{4} < x - 1 \leq \frac{2 - x}{3}$

56. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $3(2x-5)-2(x-2)<2x-3$ και $x-(2x+10)\leq 3x-6$:
i) στο $\mathbb{R}$ **ii)** στο $\mathbb{Z}$ **iii)** στο $\mathbb{N}$

57. Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις $-4(x+4)\leq 3(x+1)+4$ και $\dfrac{5(x-2)}{2}+3<\dfrac{3x+1}{2}$.

58. Αν $\alpha<\beta$ και $\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι $\lambda\in(0,1)$.

Παραμετρικές ανισώσεις

59. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\alpha x<2$ **ii)** $(\lambda-2)x\leq 5$ **iii)** $(3-\mu)x>2\mu-6$

60. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις, για τις διάφορες τιμές του μ:
i) $(\mu+1)(x-1)+\mu-3>4x-3$ **ii)** $\dfrac{2\mu(x-1)}{3}+1\geq\dfrac{3x}{4}-\dfrac{2\mu+1}{4}$

61. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $2\lambda x<5\lambda$ **ii)** $x+16\lambda^2\geq 4\lambda x+1$ **iii)** $\dfrac{\lambda x-2}{3}-\dfrac{x-3}{4}\leq\dfrac{\lambda-2x}{6}$

62. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\lambda^2+x\leq 1-\lambda x$ **ii)** $(\lambda+1)^2x>1+2\lambda x$ **iii)** $2(x-\alpha)-(\alpha+1)^2<3-\alpha x$

63. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\lambda x-5>\mu-3x$ **ii)** $(\lambda+2)x-2\mu\leq 3x-2$

64. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\lambda(x-\lambda)<\mu(x-\mu)$ **ii)** $(\lambda-2)x>\mu+5$ **iii)** $(\lambda+1)x<\mu-\lambda+2$

Εύρεση παραμέτρων

65. Να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού λ είναι αδύνατη η ανίσωση (με άγνωστο x):
i) $0x<\lambda-2$ **ii)** $0x>\lambda+1$ **iii)** $0x\leq\lambda-4$
iv) $0x\geq-\lambda$ **v)** $(\lambda-1)x<0$ **vi)** $(\lambda+2)x>0$

66. Να βρείτε για ποιες τιμές του α αληθεύει για κάθε x η ανίσωση:
i) $0x < \alpha$ **ii)** $0x > \alpha - 1$ **iii)** $0x \leq \alpha + 2$
iv) $0x \geq \alpha - 2$ **v)** $(\alpha - 2)x \geq 0$ **vi)** $(\alpha + 1)x \leq 0$

67. **Α.** Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β η ανίσωση $2(\alpha x + 5) \geq 5\beta - x$:
i) αληθεύει για κάθε x, **ii)** είναι αδύνατη.
Β. Ομοίως για την ανίσωση $\beta x - 4 > \alpha - x$.

68. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η ανίσωση $\lambda(2x - 5) \leq 2(2x + 4\mu - 3)$:
i) είναι αδύνατη, **ii)** αληθεύει για κάθε x.

69. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ και μ η ανίσωση $(\lambda - 1)^2 x \leq 1 - (\mu + 2)^2 x$ αληθεύει για κάθε τιμή του x.

70. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $\lambda x + \lambda^2 = 16 - 4x$ έχει μοναδική λύση, η οποία επιπλέον είναι θετική.

71. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $(1 + 2\lambda)x = 4\lambda^2 - 1$ έχει μοναδική λύση ως προς x, η οποία επιπλέον είναι αρνητική.

72. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $\lambda(x - 2\lambda) = 5(x - 10)$ έχει μοναδική λύση, η οποία μάλιστα ανήκει στο διάστημα:
i) $[20, +\infty)$ **ii)** $(-\infty, 24]$ **iii)** $[18, 26)$

73. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ανίσωση $(\lambda - 2)x = 2\lambda^2 - 8$ έχει:
i) θετική λύση **ii)** αρνητική λύση **iii)** λύση στο διάστημα $(2, 8)$

74. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ανίσωση $\lambda x \leq 4\lambda^2 - 5\lambda$ έχει σύνολο λύσεων το διάστημα $[-9, +\infty)$.

75. Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{x + \lambda}{5} + 2 = \dfrac{6x - \lambda}{4} + \dfrac{\lambda}{20} - \dfrac{\lambda - 4x}{40}$ (1).
i) Να λύσετε την (1).
ii) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ για τις οποίες η λύση της (1) ανήκει στο διάστημα $\left[1, \dfrac{5}{2}\right)$.

76. Να βρείτε για ποιους θετικούς ακέραιους αριθμούς α η ανίσωση:
$(\alpha + \beta - 3)x > 5\alpha + 4\beta - 17$ αληθεύει για κάθε τιμή του x.

Διάφορες ασκήσεις

77. Βρείτε δύο ανισώσεις με άγνωστο x που να συναληθεύουν αν και μόνο αν:
i) $x \in [-2, 4)$ **ii)** $x \in (0, 5)$

78. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\dfrac{-5}{2x-6} \geq 0$ **ii)** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{-2x+10} \leq 0$ **iii)** $\dfrac{2-\sqrt{5}}{-3x-6} < 0$

79. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{4}$ **ii)** $\dfrac{1}{x} < 3$ **iii)** $\dfrac{1}{x} > -2$ **iv)** $\dfrac{1}{x} < -\dfrac{2}{3}$

80. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\dfrac{x}{x-3} < 1$ **ii)** $\dfrac{3}{x-2} \leq 1$ **iii)** $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$

81. Να λύσετε ως προς x το σύστημα: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \geq 2(x+\lambda) \end{cases}$

82. Να λύσετε ως προς x το σύστημα: $\begin{cases} x-2 < \lambda \\ \lambda x \leq 2\lambda(\lambda+1) \end{cases}$

83. Να λύσετε ως προς x τις ανισώσεις:
i) $\dfrac{(\lambda-2)x}{\lambda} < \dfrac{\lambda+3}{\lambda}$ **ii)** $\dfrac{(\mu-6)x}{4\mu} > \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{2(x-1)}{\mu}$

84. Ο κύριος Γιάννης είναι μεγαλύτερος κατά 26 χρόνια από τον γιο του και κατά 50 χρόνια από τον εγγονό του. Αν η ηλικία του είναι μικρότερη από το άθροισμα των ηλικιών του γιου του και του εγγονού του, ποια είναι η ηλικία του;

24 Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Θεωρία

1. Οι ανισώσεις $|x| < \theta$ και $|x| > \theta$ με $\theta > 0$

Αν $\theta > 0$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
- $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

Λυμένες ασκήσεις

Ανισώσεις των μορφών $|A(x)| < \theta$, $|A(x)| \leq \theta$, $|A(x)| > \theta$, $|A(x)| \geq \theta$ με $\theta > 0$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|x - 2| < 5$ ii) $|2x + 1| > 7$ iii) $|2x - 5| \leq 3$ iv) $|1 - 2x| \geq 1$

Λύση

i) $|x - 2| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 2 < 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -5 + 2 < x < 5 + 2 \Leftrightarrow -3 < x < 7.$

ii) $|2x + 1| > 7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x + 1 > 7$ ή $2x + 1 < -7) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x > 7 - 1$ ή $2x < -7 - 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x > 6$ ή $2x < -8) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x > 3$ ή $x < -4).$

Αν $\theta > 0$:
- $|A(x)| < \theta \Leftrightarrow -\theta < A(x) < \theta.$
- $|A(x)| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq A(x) \leq \theta.$
- $|A(x)| > \theta \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow A(x) > \theta$ ή $A(x) < -\theta.$
- $|A(x)| \geq \theta \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow A(x) \geq \theta$ ή $A(x) \leq -\theta.$

iii) $|2x - 5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x - 5 \leq 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3 + 5 \leq 2x \leq 3 + 5 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4.$

iv) $|1 - 2x| \geq 1 \Leftrightarrow (1 - 2x \geq 1$ ή $1 - 2x \leq -1) \Leftrightarrow (-2x \geq 0$ ή $-2x \leq -2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \leq 0$ ή $x \geq 1).$

Ανισώσεις των μορφών $|A(x)| < -\theta$, $|A(x)| \le -\theta$, $|A(x)| > -\theta$, $|A(x)| \ge -\theta$ με $\theta > 0$

3. **Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $|2x-6| < -5$ **ii)** $|3x-5| \le -2$ **iii)** $|5x-4| > -10$ **iv)** $|x-5| \ge -5$

Λύση

i), ii) Οι ανισώσεις $|2x-6| < -5$ και $|3x-5| \le -2$ είναι αδύνατες.

iii), iv) Οι ανισώσεις $|5x-4| > -10$ και $|x-5| \ge -5$ αληθεύουν για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού x.

Αν $\theta > 0$:

- Οι ανισώσεις $|A(x)| < -\theta$ και $|A(x)| \le -\theta$ είναι αδύνατες.
- Οι ανισώσεις $|A(x)| > -\theta$ και $|A(x)| \ge -\theta$ αληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ορίζεται η παράσταση A(x).

Ανισώσεις των μορφών $|A(x)| \ge 0$, $|A(x)| < 0$, $|A(x)| \le 0$, $|A(x)| > 0$

4. **Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $|x-4| \ge 0$ **ii)** $|3x-6| < 0$ **iii)** $|3x-6| \le 0$ **iv)** $|x-4| > 0$

Λύση

i) Η ανίσωση $|x-4| \ge 0$ αληθεύει για κάθε τιμή του x.

ii) Η ανίσωση $|3x-6| < 0$ είναι αδύνατη, αφού για κάθε x ισχύει $|3x-6| \ge 0$.

iii) $|3x-6| \le 0 \Leftrightarrow |3x-6| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x-6 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

iv) $|x-4| > 0 \Leftrightarrow x-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$.

- Η ανίσωση $|A(x)| \ge 0$ αληθεύει για κάθε τιμή του x για την οποία ορίζεται η παράσταση A(x).
- Η ανίσωση $|A(x)| < 0$ είναι αδύνατη.
- $|A(x)| \le 0 \Leftrightarrow |A(x)| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A(x) = 0$.
- $|A(x)| > 0 \Leftrightarrow A(x) \neq 0$.

5. **Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $\left|\dfrac{5}{x-2}\right| \ge 0$ **ii)** $\dfrac{20}{|x-3|} \ge 5$

Λύση

i) Η ανίσωση αυτή αληθεύει για κάθε τιμή του x για την οποία έχει νόημα η παράσταση $\dfrac{5}{x-2}$, δηλαδή για κάθε x με $x \neq 2$.

ii) Αρχικά, πρέπει $|x-3| \neq 0$, δηλαδή $x-3 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 3$. Τότε έχουμε:

$$\frac{20}{|x-3|} \geq 5 \Leftrightarrow |x-3| \cdot \frac{20}{|x-3|} \geq 5 \cdot |x-3| \Leftrightarrow 20 \geq 5|x-3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq |x-3| \Leftrightarrow |x-3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x-3 \leq 4 \Leftrightarrow -4+3 \leq x \leq 4+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7.$$

Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για κάθε x με $-1 \leq x \leq 7$ και $x \neq 3$.

Συναλήθευση ανισώσεων

6. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $|x-2| < 3$ και $|4-x| \geq 2$.

Λύση

Λύνουμε πρώτα ξεχωριστά καθεμιά από τις ανισώσεις:

- $|x-2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Leftrightarrow -3+2 < x < 3+2 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$
- $|4-x| \geq 2 \Leftrightarrow (4-x \geq 2$ ή $4-x \leq -2) \Leftrightarrow (-x \geq 2-4$ ή $-x \leq -2-4) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (-x \geq -2$ ή $-x \leq -6) \Leftrightarrow x \leq 2$ ή $x \geq 6.$

Οι κοινές λύσεις των αρχικών ανισώσεων είναι τα x για τα οποία $(-1 < x < 5)$ **και** $(x \leq 2$ ή $x \geq 6)$, δηλαδή τα x με $-1 < x \leq 2$.

Σχόλιο Δεν είναι απαραίτητο, αλλά για πολλούς, αφού βρούμε τις λύσεις κάθε ανίσωσης ξεχωριστά, είναι χρήσιμο να τις σχεδιάσουμε στον ίδιο άξονα, ώστε να βρούμε πιο εύκολα τις κοινές τους λύσεις. Π.χ., στην άσκησή μας έχουμε:

Κοινές λύσεις: $-1 < x \leq 2$

Ανισώσεις στις οποίες οι παραστάσεις που βρίσκονται μέσα σε απόλυτο δεν αλλάζουν ορόσημο

7. Να λύσετε την ανίσωση $3|(x-1)^2| - 2|-x^2-4| < x^2 - 1$.

Λύση

Για το πρόσημο των παραστάσεων που βρίσκονται στα απόλυτα έχουμε:

- $(x-1)^2 \geq 0$ για κάθε x
- $-x^2-4 < 0$ για κάθε x

Επομένως: $|(x-1)^2| = (x-1)^2$ και $|-x^2-4| = -(-x^2-4) = x^2+4$.

Η ανίσωση της εκφώνησης γίνεται:

$3(x-1)^2 - 2(x^2+4) < x^2-1 \Leftrightarrow 3(x^2-2x+1) - 2x^2 - 8 < x^2 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 - 2x^2 - 8 < x^2 - 1 \Leftrightarrow -6x < 4 \Leftrightarrow x > -\dfrac{4}{6} \Leftrightarrow x > -\dfrac{2}{3}$.

Οι ιδιότητες $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$ (με x πραγματικό)

8. Να λύσετε την ανίσωση $||x|+x| - ||x|-x| > 3x+8$.

Λύση

Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$, οπότε $|x| - x \geq 0$ και $|x| + x \geq 0$, άρα:

$||x|+x| = |x| + x$ και $||x|-x| = |x| - x$.

Έτσι η ανίσωσή μας γράφεται: $|x| + x - (|x| - x) > 3x + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x| + x - |x| + x > 3x + 8 \Leftrightarrow 2x - 3x > 8 \Leftrightarrow -x > 8 \Leftrightarrow \mathbf{x < -8}$.

Ανισώσεις των μορφών $|A(x)| \geq A(x)$, $|A(x)| < A(x)$, $|A(x)| \leq A(x)$, $|A(x)| > A(x)$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|2x-6| \geq 2x-6$ ii) $|5x-20| < 5x-20$ iii) $|2x+8| \leq 2x+8$

iv) $|5x-10| > 5x-10$ v) $||x|-3| \leq |x|-3$ vi) $||x|-2| > |x|-2$

Λύση

Λαμβάνοντας υπόψη τα σχόλια δεξιά, έχουμε:

i) Η ανίσωση $|2x-6| \geq 2x-6$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ii) Η ανίσωση $|5x-20| < 5x-20$ είναι αδύνατη (με x πραγματικό).

iii) $|2x+8| \leq 2x+8 \Leftrightarrow 2x+8 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x \geq -8 \Leftrightarrow x \geq -4$.

iv) $|5x-10| > 5x-10 \Leftrightarrow 5x-10 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x < 10 \Leftrightarrow x < 2$.

Θυμίζουμε ότι:

- $|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$ • $|\alpha| \geq \alpha$ για κάθε α

Επομένως:

- $\boxed{\text{Η ανίσωση } |\alpha| < \alpha \text{ είναι αδύνατη}}$
- $\boxed{|\alpha| \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0}$
  [Είναι $|\alpha| \leq \alpha \Leftrightarrow (|\alpha| < \alpha$ ή $|\alpha| = \alpha)$ $\Leftrightarrow |\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 0$]
- $\boxed{|\alpha| > \alpha \Leftrightarrow \alpha < 0}$
  [Είναι $|\alpha| > \alpha \Leftrightarrow (|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \neq \alpha)$ $\Leftrightarrow |\alpha| \neq \alpha \Leftrightarrow \alpha < 0$]

v) $||x| - 3| \le |x| - 3 \Leftrightarrow |x| - 3 \ge 0 \Leftrightarrow |x| \ge 3 \Leftrightarrow (x \ge 3$ ή $x \le -3)$.

vi) $||x| - 2| > |x| - 2 \Leftrightarrow |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Ανισώσεις των μορφών $|A(x)| \ge -A(x)$, $|A(x)| < -A(x)$, $|A(x)| \le -A(x)$, $|A(x)| > -A(x)$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|3x - 6| \ge 6 - 3x$ **ii)** $|2x - 10| < 10 - 2x$ **iii)** $|5x - 20| \le -5x + 20$

iv) $|x + 10| > -x - 10$ **v)** $|x^2 - 9| \le 9 - x^2$ **vi)** $|x^2 - 4| > -x^2 + 4$

Λύση

Λαμβάνοντας υπόψη τα σχόλια δεξιά, έχουμε:

i) Η ανίσωση $|3x - 6| \ge 6 - 3x$ γράφεται $|3x - 6| \ge -(3x - 6)$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ii) Η ανίσωση $|2x - 10| < 10 - 2x$ γράφεται $|2x - 10| < -(2x - 10)$ και είναι αδύνατη (με x πραγματικό).

iii) $|5x - 20| \le -5x + 20 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |5x - 20| \le -(5x - 20) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x - 20 \le 0 \Leftrightarrow 5x \le 20 \Leftrightarrow x \le 4$.

Θυμίζουμε ότι:
- $|\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \le 0$
- $|\alpha| \ge -\alpha$ για κάθε α

Επομένως:
- Η ανίσωση $|\alpha| < -\alpha$ είναι αδύνατη
- $\boxed{|\alpha| \le -\alpha \Leftrightarrow \alpha \le 0}$

  [Είναι $|\alpha| \le -\alpha \Leftrightarrow \big(|\alpha| < -\alpha$ ή $|\alpha| = -\alpha\big) \Leftrightarrow |\alpha| = -\alpha \Leftrightarrow \alpha \le 0$]
- $\boxed{|\alpha| > -\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0}$

  [Είναι $|\alpha| > -\alpha \Leftrightarrow \big(|\alpha| \ge \alpha$ και $|\alpha| \ne -\alpha\big) \Leftrightarrow |\alpha| \ne -\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0$]

iv) $|x + 10| > -x - 10 \Leftrightarrow |x + 10| > -(x + 10) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 10 > 0 \Leftrightarrow x > -10$.

v) $|x^2 - 9| \le 9 - x^2 \Leftrightarrow |x^2 - 9| \le -(x^2 - 9) \Leftrightarrow x^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 \le 9 \Leftrightarrow |x|^2 \le 3^2 \Leftrightarrow |x| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x \le 3$.

vi) $|x^2 - 4| > -x^2 + 4 \Leftrightarrow |x^2 - 4| > -(x^2 - 4) \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x|^2 > 2^2 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow (x > 2$ ή $x < -2)$.

Ανισώσεις της μορφής $|A(x)| < B(x)$ ή $|A(x)| > B(x)$ ή $|A(x)| \le B(x)$ ή $|A(x)| \ge B(x)$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)** $|x^2 - 32| \le x^2$ **ii)** $|x^2 - 5| > x^2 + 3$

Λύση

i) Αφού $x^2 \geq 0$ για κάθε x, έχουμε:

$|x^2 - 32| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 - 32 \leq x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-x^2 \leq x^2 - 32 \text{ και } x^2 - 32 \leq x^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2x^2 \leq -32 \text{ και } -32 \leq 0) \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2 \geq 4^2 \Leftrightarrow |x| \geq 4 \Leftrightarrow (x \geq 4 \text{ ή } x \leq -4)$.

Αν $\alpha \geq 0$, τότε ισχύουν:
$|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$
$|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$
$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \alpha$ ή $x \leq -\alpha$
$|x| > \alpha \Leftrightarrow x > \alpha$ ή $x < -\alpha$

ii) Αφού $x^2 + 3 > 0$ για κάθε x, έχουμε:

$|x^2 - 5| > x^2 + 3 \Leftrightarrow [x^2 - 5 > x^2 + 3 \text{ ή } x^2 - 5 < -(x^2 + 3)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\underbrace{-5 > 3}_{\text{αδύνατη}} \text{ ή } x^2 - 5 < -x^2 - 3) \Leftrightarrow 2x^2 < 2 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1^2 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$.

12. **Να λύσετε την ανίσωση $3x - |x - 9| > -5$.**

Λύση

1ος τρόπος

Η παράσταση που βρίσκεται στο απόλυτο είναι η $x - 9$. Η ρίζα και το πρόσημο της παράστασης αυτής φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	9
x − 9	− 0 +

Διακρίνουμε περιπτώσεις για το x ανάλογα με το αν $x - 9 \geq 0$ ή $x - 9 < 0$.

- Αν $x \geq 9$, τότε $x - 9 \geq 0$, οπότε η ανίσωση γίνεται:
  $3x - (x - 9) > -5$ ή $3x - x + 9 > -5$ ή $2x > -14$ ή $x > -7$.
  Η συναλήθευση της $x > -7$ με τον περιορισμό $x \geq 9$ δίνει $x \geq 9$, που είναι **η λύση της ανίσωσης σε αυτή την περίπτωση**.
- Αν $x < 9$, τότε $x - 9 < 0$, οπότε η ανίσωση γίνεται $3x - [-(x - 9)] > -5$ ή $3x + (x - 9) > -5$ ή $3x + x - 9 > -5$ ή $4x > 4$ ή $x > 1$.
  Επειδή στην περίπτωση αυτή είναι και $x < 9$, συμπεραίνουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η ανίσωση έχει τη λύση $1 < x < 9$.

Τελικά, η λύση της ανίσωσης [που είναι η «ένωση» των λύσεών της σε κάθε περίπτωση, δηλαδή των $x \geq 9$ και $1 < x < 9$] είναι η $x > 1$.

2ος τρόπος

Αν απομονώσουμε το απόλυτο, η ανίσωση γράφεται
$|x - 9| < 3x + 5$.
Διακρίνουμε περιπτώσεις για το x ανάλογα με το αν
$3x + 5 \leq 0$ ή $3x + 5 > 0$.

x	$-\frac{5}{3}$
3x + 5	− 0 +

- Αν $x \leq -\frac{5}{3}$, τότε $3x + 5 \leq 0$ και η ανίσωση $\underbrace{|x-9|}_{\geq 0} < \underbrace{3x+5}_{\leq 0}$ είναι αδύνατη.

- Αν $x > -\dfrac{5}{3}$, τότε $3x + 5 > 0$ και

$$|x-9| < 3x+5 \Leftrightarrow -(3x+5) < x-9 < 3x+5 \Leftrightarrow -3x-5 < x-9 < 3x+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-5 < x-9 \\ x-9 < 3x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x < -4 \\ -2x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$$

Η συναλήθευση της $x > 1$ με τον περιορισμό $x > -\dfrac{5}{3}$ δίνει $x > 1$.

Τελική λύση: $\boxed{x > 1}$

Σχόλιο Αν λάβουμε υπόψη τα σχόλια στη λύση της επόμενης άσκησης [και συγκεκριμένα το ότι η ισοδυναμία $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ είναι αληθής όχι μόνο για $\theta > 0$, αλλά γενικά για κάθε πραγματικό αριθμό θ], έχουμε και την εξής, πολύ γρηγορότερη, λύση:

$$3x - |x-9| > -5 \Leftrightarrow 3x+5 > |x-9| \Leftrightarrow |x-9| < 3x+5 \Leftrightarrow -(3x+5) < x-9 < 3x+5$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -3x-5 < x-9 \\ x-9 < 3x+5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -4x < -4 \\ -2x < 4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x > 1 \\ x > -2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x > 1}.$$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x^2 - 40| \leq x^2 - 32$ **ii)** $|x^2 - 34| < x^2 - 38$

iii) $|x^2 - 30| > x^2 - 2$ **iv)** $|x^2 - 5| \geq x^2 - 13$

Λύση

i) $|x^2 - 40| \leq x^2 - 32 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -(x^2-32) \leq x^2 - 40 \leq x^2 - 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -x^2 + 32 \leq x^2 - 40 \\ x^2 - 40 \leq x^2 - 32 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x^2 \leq -72 \\ -40 \leq -32 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 36 \Leftrightarrow |x|^2 \geq 6^2 \Leftrightarrow |x| \geq 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 6 \text{ ή } x \leq -6.$$

ii) $|x^2 - 34| < x^2 - 38 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -(x^2-38) < x^2 - 34 < x^2 - 38 \Leftrightarrow$$

Οι ισοδυναμίες:
$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
$|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
$|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$
$|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta$ ή $x \leq -\theta$
ισχύουν για κάθε πραγματικό αριθμό θ (δηλαδή όχι μόνο αν $\theta > 0$, αλλά και αν $\theta \leq 0$), (βλ. σχόλιο στο τέλος της άσκησης).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 38 < x^2 - 34 \\ x^2 - 34 < x^2 - 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 < -72 \\ -34 < -38 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 > 72 \\ \underbrace{34 > 38}_{\text{αδύνατη}} \end{cases}$$

Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιούμε αυτές τις ισοδυναμίες χωρίς να ελέγχουμε αν $\theta > 0$.

Άρα και η αρχική ανίσωση είναι αδύνατη.

iii) $|x^2 - 30| > x^2 - 2 \Leftrightarrow [x^2 - 30 > x^2 - 2 \;\text{ ή }\; x^2 - 30 < -(x^2 - 2)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\underbrace{-30 > -2}_{\text{αδύνατη}} \text{ ή } x^2 - 30 < -x^2 + 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 30 < -x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^2 < 32 \Leftrightarrow x^2 < 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2 < 4^2 \Leftrightarrow |x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$

iv) $|x^2 - 5| \geq x^2 - 13 \Leftrightarrow [x^2 - 5 \geq x^2 - 13 \text{ ή } x^2 - 5 \leq -(x^2 - 13)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\underbrace{-5 \geq -13}_{\substack{\text{αληθής} \\ \text{(για κάθε x)}}} \;\text{ ή }\; x^2 - 5 \leq -x^2 + 13)$

Επομένως η ανίσωση $|x^2 - 5| \geq x^2 - 13$ αληθεύει για κάθε x.

Σχόλιο Δύο ανισώσεις (ή δύο εξισώσεις) λέγονται **ισοδύναμες** αν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις (**το ίδιο σύνολο λύσεων**, όπως λέμε).

Άρα, για παράδειγμα, αν $\theta < 0$, έχουμε:

- $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ (αφού έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων: το κενό σύνολο { }).
- $|x| > \theta \Leftrightarrow (x > \theta \;\text{ ή }\; x < -\theta)$
  (κοινό σύνολο λύσεων το σύνολο των πραγματικών αριθμών).

Ανισώσεις της μορφής $\alpha|A(x)| + \beta|B(x)| \gtrless \Gamma(x)$

14. Να λύσετε την ανίσωση $|2x + 6| - 3|4 - x| > 2x - 3$.

Λύση

Αρχικά, θέλουμε να «βγάλουμε» τα απόλυτα. Για να το κάνουμε αυτό, χρειάζεται να γνωρίζουμε το πρόσημο των παραστάσεων που βρίσκονται «μέσα» στα απόλυτα.

- Οι παραστάσεις που βρίσκονται σε απόλυτο είναι οι $2x + 6$ και $4 - x$.
- Η παράσταση $2x + 6$ μηδενίζεται για $x = -3$ και η $4 - x$ για $x = 4$.
- Χρησιμοποιώντας τον ίδιο πίνακα για το πρόσημο και των δύο παραστάσεων $2x + 6$ και $4 - x$, έχουμε το διπλανό σχήμα.

x		-3		4	
$2x+6$	$-$	0		$+$	
$4-x$			$+$	0	$-$

- Διακρίνουμε για το x τις περιπτώσεις $x < -3$, $-3 \le x \le 4$, $x > 4$ (ώστε να ξέρουμε σε κάθε περίπτωση το πρόσημο των $2x + 6$ και $4 - x$).

↦ Αν $x < -3$, τότε $2x + 6 < 0$ και $4 - x > 0$, οπότε η ανίσωση γράφεται:
$-(2x + 6) - 3(4 - x) > 2x - 3 \Leftrightarrow -2x - 6 - 12 + 3x > 2x - 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x + 3x - 2x > -3 + 6 + 12 \Leftrightarrow -x > 15 \Leftrightarrow x < -15$.
Η συναλήθευση της $x < -15$ με τον περιορισμό $x < -3$ δίνει $x < -15$, που είναι **η λύση της ανίσωσης σε αυτή την περίπτωση**.

↦ Αν $-3 \le x \le 4$, τότε $2x + 6 \ge 0$ και $4 - x \ge 0$, οπότε η ανίσωση γράφεται:
$2x + 6 - 3(4 - x) > 2x - 3 \Leftrightarrow 2x + 6 - 12 + 3x > 2x - 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x > -3 - 6 + 12 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$.
Η συναλήθευση της $x > 1$ με τον περιορισμό $-3 \le x \le 4$ δίνει $1 < x \le 4$, που είναι η λύση της ανίσωσης σε αυτή την περίπτωση.

↦ Αν $x > 4$, τότε $2x + 6 > 0$ και $4 - x < 0$, οπότε η ανίσωση γράφεται:
$2x + 6 - 3[-(4 - x)] > 2x - 3 \Leftrightarrow 2x + 6 + 3(4 - x) > 2x - 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x + 6 + 12 - 3x > 2x - 3 \Leftrightarrow -3x > -3 - 6 - 12 \Leftrightarrow -3x > -21 \Leftrightarrow x < 7$.
Η συναλήθευση της $x < 7$ με τον περιορισμό $x > 4$ δίνει $4 < x < 7$, που είναι η λύση της ανίσωσης σε αυτή την περίπτωση.

- Τελικά, η λύση της ανίσωσης [που είναι η «ένωση» των λύσεων της κάθε περίπτωσης, δηλαδή των $x < -15$, $1 < x \le 4$, $4 < x < 7$] είναι η (**$x < -15$ ή $1 < x < 7$**).

Ανισώσεις της μορφής $|A(x)| < |B(x)|$

15. Να λύσετε την ανίσωση $|x + 5| < |x - 1|$.

Λύση

Και τα δύο μέλη της ανίσωσης είναι ≥ 0.
[Έτσι, αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της, προκύπτει **ισοδύναμη** ανισότητα της ίδιας φοράς.]

Αν $\alpha, \beta \ge 0$, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:
$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^2 < \beta^2$
$\alpha \le \beta \Leftrightarrow \alpha^2 \le \beta^2$

Έχουμε:

$|x + 5| < |x - 1| \Leftrightarrow |x + 5|^2 < |x - 1|^2 \Leftrightarrow (x + 5)^2 < (x - 1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 10x + 25 < -2x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x + 2x < 1 - 25 \Leftrightarrow 12x < -24 \Leftrightarrow x < -2.$

16. Να λύσετε την ανίσωση $|2x + 1| < |x - 2|$.

Υπόδειξη:

Δε θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο της προηγούμενης άσκησης (υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο κτλ.), αφού έτσι προκύπτει ανίσωση 2ου βαθμού (συγκεκριμένα, προκύπτει $3x^2 + 8x - 3 < 0$).

Εργαζόμαστε όπως στην άσκηση 14, διακρίνοντας τις περιπτώσεις:

$x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \le x < 2$, $x \ge 2$,

και τελικά προκύπτει $-3 < x < \frac{1}{3}$.

x		$-\frac{1}{2}$		2	
2x+1	−	0	+		
x−2			−	0	+

Ανισώσεις των μορφών $x^{2\nu} < \alpha^{2\nu}$ ή $x^{2\nu} > \alpha^{2\nu}$ με ν θετικό ακέραιο

17. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 < 9$ ii) $x^2 \ge 64$ iii) $x^4 \le 16$ iv) $(x - 2)^6 > (-8)^2$

Λύση

i) $x^2 < 9 \Leftrightarrow |x|^2 < 3^2 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3 < x < 3.$

ii) $x^2 \ge 64 \Leftrightarrow |x|^2 \ge 8^2 \Leftrightarrow |x| \ge 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \ge 8$ ή $x \le -8.$

iii) $x^4 < 16 \Leftrightarrow |x|^4 < 2^4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2 < x < 2.$

iv) $(x - 2)^6 > (-8)^2 \Leftrightarrow (x-2)^6 > 64 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x - 2|^6 > 2^6 \Leftrightarrow |x - 2| > 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 2 > 2$ ή $x - 2 < -2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > 4$ ή $x < 0.$

Γενικά, δεν ισχύει η ισοδυναμία:
$\alpha^\nu < \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha < \beta.$
Π.χ.:
- $-4 < -3$, ενώ $(-4)^2 > (-3)^2$.
- $-2 < 1$, ενώ $(-2)^2 > 1^2$.

Αν όμως $\alpha, \beta \ge 0$ και ν θετικός ακέραιος, τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:
$\alpha^\nu < \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha < \beta$
$\alpha^\nu \le \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha \le \beta$

18. Να λύσετε την ανίσωση $(x-1)^{28} < (5-x)^{28}$.

Λύση

$(x-1)^{28} < (5-x)^{28} \Leftrightarrow |x-1|^{28} < |5-x|^{28} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x-1| < |5-x| \Leftrightarrow |x-1|^2 < |5-x|^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 < (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1 < 25-10x+x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x+10x < 25-1 \Leftrightarrow 8x < 24 \Leftrightarrow x < 3.$

Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος, τότε ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^\nu < \beta^\nu \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Ανισώσεις των μορφών $A(x)+B(x) \leq 0$ ή $A(x)+B(x) > 0$, όπου $A(x) \geq 0$ και $B(x) \geq 0$ για κάθε x

19. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|2x^2-8| + |x^2+2x| \leq 0$ ii) $|x| + |x^2-4| \leq x$ iii) $|x^2-1| + |x^2-x| > 0$

Λύση

i) Επειδή $|2x^2-8| \geq 0$ και $|x^2+2x| \geq 0$, θα είναι και $|2x^2-8| + |x^2+2x| \geq 0$.
Επομένως:

$|2x^2-8| + |x^2+2x| \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |2x^2-8| + |x^2+2x| = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |2x^2-8| = 0 \\ |x^2+2x| = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2-8 = 0 \\ x^2+2x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 = 8 \\ x(x+2) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x = 0 \text{ ή } x+2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \text{ ή } x = 2 \\ x = 0 \text{ ή } x = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = -2.$$

Αν $A(x) \geq 0$ και $B(x) \geq 0$ για κάθε x, τότε και $A(x)+B(x) \geq 0$ και ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $A(x)+B(x) \leq 0 \Leftrightarrow A(x)+B(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A(x) = B(x) = 0 \Leftrightarrow$ Το x είναι κοινή ρίζα των εξισώσεων $A(x) = 0$, $B(x) = 0$.
  [Έτσι, για να λύσουμε την ανίσωση $A(x)+B(x) \leq 0$, βρίσκουμε τις κοινές ρίζες των εξισώσεων: $A(x) = 0$ και $B(x) = 0$.]
- $A(x)+B(x) > 0 \Leftrightarrow A(x)+B(x) \neq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Το x δεν είναι κοινή ρίζα των εξισώσεων $A(x) = 0$, $B(x) = 0$.
  [Έτσι, για να λύσουμε την ανίσωση $A(x)+B(x) > 0$, βρίσκουμε τις κοινές ρίζες των εξισώσεων $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ και απορρίπτουμε μόνο αυτές.]

ii) $|x| + |x^2 - 4| \leq x \Leftrightarrow |x| - x + |x^2 - 4| \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} |x| - x = 0 \\ |x^2 - 4| = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} |x| = x \\ x^2 = 4 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 2 \text{ ή } x = -2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow x = 2.$$

(Αφού $|x| - x \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.)

iii) Αφού $|x^2 - 1| \geq 0$ και $|x^2 - x| \geq 0$, θα είναι και $|x^2 - 1| + |x^2 - x| \geq 0$.
Άρα ισχύει η ισοδυναμία $|x^2 - 1| + |x^2 - x| > 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| + |x^2 - x| \neq 0$.
Λύνουμε πρώτα την εξίσωση $|x^2 - 1| + |x^2 - x| = 0$, όπως στο i), και βρίσκουμε ότι: $|x^2 - 1| + |x^2 - x| = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Επομένως: $|x^2 - 1| + |x^2 - x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Διάφορες ασκήσεις

20. Να βρείτε μια ανίσωση της μορφής $|x - x_0| < \rho$ που να έχει σύνολο λύσεων: i) το διάστημα (1, 7), ii) το διάστημα (–7, 1).

Λύση

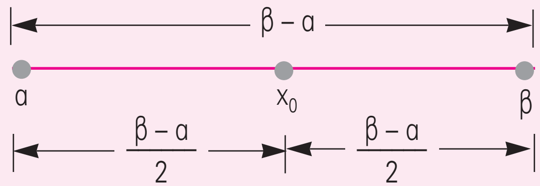
Έχουμε:

i) $1 < x < 7 \Leftrightarrow 1 - 4 < x - 4 < 7 - 4 \Leftrightarrow -3 < x - 4 < 3 \Leftrightarrow |x - 4| < 3$.
Η ζητούμενη ανίσωση είναι: $|x - 4| < 3$.

ii) $-7 < x < 1 \Leftrightarrow -7 + 3 < x + 3 < 1 + 3 \Leftrightarrow -4 < x + 3 < 4 \Leftrightarrow |x + 3| < 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x - (-3)| < 4$.
Η ζητούμενη ανίσωση είναι: $|x - (-3)| < 4$.

Σχόλια 1) Αν Δ είναι ένα διάστημα της μορφής (α, β) ή [α, β] ή (α, β] ή [α, β), τότε:

- ο αριθμός $x_0 = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ λέγεται **κέντρο** ή **μέσο** του διαστήματος Δ
  [και ισχύει $d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta)$].
- ο αριθμός $d(\alpha, \beta) = \beta - \alpha$ λέγεται **μήκος** του Δ.
- ο αριθμός $\rho = \dfrac{d(\alpha, \beta)}{2} = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ λέγεται **ακτίνα** του Δ.



2) Κάθε διάστημα Δ της μορφής (α, β) ή [α, β] είναι σύνολο λύσεων μιας ανίσωσης της μορφής $|x - x_0| < ρ$ ή $|x - x_0| \leq ρ$ αντίστοιχα.

Το x_0 είναι το κέντρο του Δ $\left(\text{δηλαδή } x_0 = \frac{α + β}{2}\right)$ και το ρ είναι η ακτίνα του Δ $\left(\text{δηλαδή } ρ = \frac{β - α}{2}\right)$.

Π.χ., αν θέλουμε να βρούμε μια ανίσωση της μορφής $|x - x_0| < ρ$ με σύνολο λύσεων το (–1, 7), έχουμε:

- $x_0 = \frac{-1 + 7}{2} = 3$
- $ρ = \frac{7 - (-1)}{2} = 4$

και η ανίσωση που θέλουμε είναι $|x - 3| < 4$.

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x - 1| + |x - 2| < |x - 1 + x - 2|$ ii) $|x^2 - 4x + 3| \leq |x^2 - 5x| + |x + 3|$

Λύση

Είναι γνωστό ότι $|α| + |β| \geq |α + β|$. Έτσι, για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

i) $|x - 1| + |x - 2| \geq |x - 1 + x - 2|$, άρα η ανίσωση $|x - 1| + |x - 2| < |x - 1 + x - 2|$ είναι αδύνατη.

ii) $|x^2 - 5x| + |x + 3| \geq |x^2 - 5x + x + 3| = |x^2 - 4x + 3|$, άρα η ανίσωση που δίνεται αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

22. Να λύσετε την ανίσωση $|(x - 1)^5| < 32$.

Λύση

$|(x - 1)^5| < 32 \Leftrightarrow |x - 1|^5 < 2^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x - 1| < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$

Αν α, β ≥ 0 και ν θετικός ακέραιος, τότε ισχύει η ισοδυναμία $α^ν < β^ν \Leftrightarrow α < β$.

23. Να λύσετε τις ανισώσεις: i) $(x-4)\,|x-3| \geq 0$ ii) $(x-3)\,|x-2| < 0$

Λύση

i) • Αν $x \neq 3$, τότε $|x-3| > 0$ και η ανίσωση γράφεται:

$$(x-4)\,|x-3| \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)\,|x-3|}{|x-3|} \geq \frac{0}{|x-3|} \Leftrightarrow x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4.$$

• Αν $x = 3$, η ανίσωση γίνεται $0 \geq 0$ και αληθεύει.

Τελικά, λοιπόν: $(x-4)\,|x-3| \geq 0 \Leftrightarrow (x = 3$ ή $x \geq 4)$.

ii) • Αν $x \neq 2$, τότε $|x-2| > 0$ και η ανίσωση γράφεται:

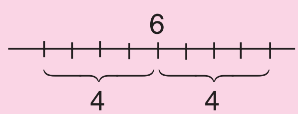
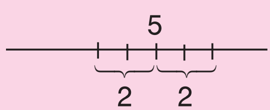
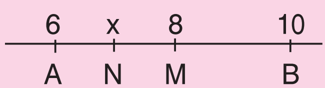
$$(x-3)\,|x-2| < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)\,|x-2|}{|x-2|} < \frac{0}{|x-2|} \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \ (\text{με } x \neq 2).$$

• Αν $x = 2$, η ανίσωση γίνεται $0 < 0$ και δεν αληθεύει.

Τελικά, λοιπόν: $(x-3)\,|x-2| < 0 \Leftrightarrow 2 \neq x < 3$.

Χρήσιμες παρατηρήσεις

24. Χρησιμοποιώντας την έννοια της απόστασης δύο αριθμών, μπορούμε να «μαντέψουμε» τη λύση μερικών απλών ανισώσεων (π.χ., των μορφών $|x-x_0| < \rho$, $|x-x_0| > \rho$, $|x-x_1| < |x-x_2|$, όπου ρ, x_0, x_1, x_2 γνωστοί αριθμοί). Για παράδειγμα:

Εξίσωση - Ανίσωση	Ισοδύναμη διατύπωση	Σχήμα	Λύση
$\|x-6\| < 4$	$d(x, 6) < 4$		$2 < x < 10$
$\|x-5\| > 2$	$d(x, 5) > 2$		$x < 3$ ή $x > 7$
$\|x-6\| < \|x-10\|$	$d(x, 6) < d(x, 10)$	 NA < NB	$x < 8$

25. Γενική μέθοδος επίλυσης ανίσωσης με ένα απόλυτο

Για να λύσουμε μια ανίσωση που περιέχει ένα απόλυτο:

A) *Αν δεν κάνουμε χρήση των σχολίων στη λύση της άσκησης 13.*

- Εξετάζουμε αν η παράσταση που είναι στο απόλυτο, έστω $A(x)$, είναι ≥ 0 για κάθε x ή ≤ 0 για κάθε x (όπως, π.χ., στις ανισώσεις $|(x-1)^2| < x^2 - 5$ και $|-x^2 - 1| > x^2 - 2x$).
- Αν όχι, εξετάζουμε αν η ανίσωση έχει κάποια ειδική μορφή.
  Π.χ., εξετάζουμε αν, «απομονώνοντας» το απόλυτο, παίρνει τη μορφή $|A(x)| \gtrless B(x)$, όπου $B(x) = A(x)$ ή $B(x) = -A(x)$ ή $B(x)$ σταθερό, οπότε λύνεται με τον αντίστοιχο τρόπο.
- Αν ούτε αυτό συμβαίνει, τότε σχηματίζουμε πίνακα με τις ρίζες και το πρόσημο του $A(x)$ και παίρνουμε περιπτώσεις για το x.

B) *Αν κάνουμε χρήση των σχολίων στη λύση της άσκησης 13.*

- Φέρνουμε, αν είναι δυνατόν, την ανίσωση στη μορφή $|A(x)| \gtrless B(x)$ και εφαρμόζουμε απευθείας τις ιδιότητες $|A(x)| < B(x) \Leftrightarrow -B(x) < A(x) < B(x)$ ή $|A(x)| > B(x) \Leftrightarrow (A(x) > B(x)$ ή $A(x) < -B(x))$, χωρίς να ασχοληθούμε καθόλου με το πρόσημο του $A(x)$ ή του $B(x)$ (και, φυσικά, χωρίς να διακρίνουμε περιπτώσεις).

γ Ερωτήσεις κατανόησης

26. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).

		Σ	Λ
i)	Αν $-3 < x < 7$, τότε $|x-2| < 5$.	❑	❑
ii)	Αν $x < -5$ ή $x > 3$, τότε $|x+1| > 4$.	❑	❑
iii)	Αν $x - 10 \leq y$ και $x + 10 \geq y$, τότε $|x-y| \leq 10$.	❑	❑
iv)	Οι λύσεις της ανίσωσης $|x| < 3$ είναι οι αριθμοί $-2, -1, 0, 1, 2$ και μόνο αυτοί.	❑	❑
v)	Αν $\left|\frac{-6}{x}\right| > 3$, τότε $-2 < x < 2$ (με $x \neq 0$).	❑	❑
vi)	Αν $x < 2$ και $y < 3$, τότε $xy < 6$.	❑	❑
vii)	Αν $|x| < 2$ και $|y| < 3$, τότε $|xy| < 6$.	❑	❑
viii)	Αν $-4 < x < 4$ και $-5 < y < 5$, τότε $-20 < xy < 20$.	❑	❑

ix) Αν $x \leq 4$, τότε $x^2 \leq 16$. ❑ ❑

x) Ισχύει η ισοδυναμία $x^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$. ❑ ❑

xi) Αν $|x| \leq |y|$, τότε $-|y| \leq x \leq |y|$. ❑ ❑

xii) Αν $|x| \leq |y|$, τότε $|x| \leq y$ ή $|x| \leq -y$. ❑ ❑

xiii) Η παράσταση $A = |x + 2| - |x - 2|$, με $|x| \geq 2$, είναι σταθερή. ❑ ❑

xiv) Ισχύει η ισοδυναμία $0 < |x - 2| < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$. ❑ ❑

27. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).

Σ Λ

i) Αν $x < 10$, τότε $|x| < 10$. ❑ ❑

ii) Αν $x > 10$, τότε $|x| > 10$. ❑ ❑

iii) Αν $x < -5$, τότε $|x| < |-5|$. ❑ ❑

iv) Αν $x > -5$, τότε $|x| > |-5|$. ❑ ❑

v) Αν $x < -5$, τότε $|x| > |-5|$. ❑ ❑

vi) Αν $x > -5$, τότε $|x| < |-5|$. ❑ ❑

vii) Αν $x < 5$, τότε $|x - 5| < 0$. ❑ ❑

viii) Αν $x < \alpha$, τότε $|x - \alpha| > 0$. ❑ ❑

ix) $|x - \alpha| \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha$. ❑ ❑

x) $(x + 2)\,|x| \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$. ❑ ❑

xi) $x|x - 3| > 0 \Leftrightarrow x > 0$. ❑ ❑

xii) Για κάθε πραγματικό αριθμό α η ανίσωση $|x| > \alpha$ έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις. ❑ ❑

xiii) $|x - \alpha| > 0 \Leftrightarrow x \neq \alpha$. ❑ ❑

xiv) Αν $|x| \geq \alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε $\alpha \leq 0$. ❑ ❑

xv) Η εξίσωση $|x| < \alpha$ είναι αδύνατη $\Leftrightarrow \alpha < 0$. ❑ ❑

28. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).

Σ Λ

i) Αν $|x| > 2$, τότε $x > 2$ και $x < -2$. ❑ ❑

ii) Αν $-4 < x < 5$, τότε $|x| < 5$. ❑ ❑

iii) Η ανίσωση $|x| \leq 0$ είναι αδύνατη. ❑ ❑

iv) Η ανίσωση $|3x^2 + 12| \leq 0$ είναι αδύνατη. ❑ ❑

v) Η ανίσωση $|x| > 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x. ❑ ❑

vi) Αν $x + 1 > 0$ και $x - 5 < 0$, τότε $|x - 2| < 3$. ❑ ❑

vii) Ισχύει $|x - 2| + |y + 3| > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y. ❑ ❑

viii) Ισχύει $|x - 2| + |y + 3| \geq 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y. ❑ ❑

ix) Ισχύει $|x - 2| + |x + 3| > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. ❑ ❑

x) Οι σχέσεις $|x| + |y| \neq 0$ και $|x| + |y| > 0$ είναι ισοδύναμες (δηλαδή ισχύουν για τις ίδιες ακριβώς τιμές των x, y). ❑ ❑

xi) $|x| \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$. ❑ ❑

xii) Η ανίσωση $|x^2 + 5| > 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x. ❑ ❑

29. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) και ποιες λανθασμένες (Λ).

Σ Λ

i) Η ανίσωση $|x| > α$ δεν είναι ποτέ (δηλαδή για καμία τιμή του α) αδύνατη. ❑ ❑

ii) Η ανίσωση $|x| \leq α$ δεν αληθεύει ποτέ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x. ❑ ❑

iii) Αν η ανίσωση $|x| \leq α$ είναι αδύνατη, τότε $α < 0$. ❑ ❑

iv) Η ανίσωση $|x| > α$ αληθεύει για κάθε x αν και μόνο αν $α \leq 0$. ❑ ❑

v) Αν η ανίσωση $|x| \leq α$ δεν είναι αδύνατη, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. ❑ ❑

vi) Αν η ανίσωση $|x| < α$ δεν είναι αδύνατη, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. ❑ ❑

vii) Αν η ανίσωση $|x| \leq α$ έχει περισσότερες από μία λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. ❑ ❑

30. Αδύνατη είναι η ανίσωση:

Α. $|x| + 2 < 5$ **Β.** $|x + 5| < 2$ **Γ.** $|x| + 5 < 2$ **Δ.** $|x + 2| < 5$

31. Αδύνατη είναι η ανίσωση:

Α. $|x| \geq -4$ **Β.** $|x| > 10^{10^{10}}$ **Γ.** $|x| < -|-2|$ **Δ.** $|x| < 0,000000001$

32. Για κάθε πραγματικό αριθμό x αληθεύει η ανίσωση:

Α. $|x + 2| < 5$ **Β.** $|x| + 2 < 5$ **Γ.** $|x| + 5 < 2$ **Δ.** $|x| + 2 < |x| + 5$

33. Αδύνατη είναι η ανίσωση:
Α. $|x| + 1 > 6$ **Β.** $|x| + 3 > 3$ **Γ.** $|x| + 5 > |x|$ **Δ.** $|-x| + 2 < |x|$

34. Για κάθε πραγματικό αριθμό x αληθεύει η ανίσωση:
Α. $|x| > 0$ **Β.** $|x| + 5 > 3$ **Γ.** $|x + 3| > 5$ **Δ.** $|x| + 3 > 5$

35. Η ανίσωση $|x| - x \geq 2$ αληθεύει αν και μόνο αν:
Α. $x \leq 0$ **Β.** $x \leq -1$ **Γ.** $x \leq 2$ **Δ.** $x \leq -2$

36. Αν $0 < |\alpha| < 2$, τότε η παράσταση $K = \dfrac{|\alpha - 2| + |\alpha + 2|}{|\alpha - 2| - |\alpha + 2|}$ είναι ίση με:
Α. $-\dfrac{2}{\alpha}$ **Β.** $-\dfrac{\alpha}{2}$ **Γ.** $\dfrac{2}{\alpha}$ **Δ.** $\dfrac{\alpha}{2}$

37. Αδύνατη είναι η ανίσωση:
Α. $|x| < x$ **Β.** $|x| \leq x$ **Γ.** $|x| > x$ **Δ.** $|x| \geq x$

38. Αδύνατη είναι η ανίσωση:
Α. $|x| \geq -x$ **Β.** $|x| > -x$ **Γ.** $|x| < -x$ **Δ.** $|x| \leq -x$

39. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:
Α. $|x| > 0$ **Β.** $|x| \leq x$ **Γ.** $|x| \geq 10^{-30}$ **Δ.** $|x| \geq -x$

40. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:
Α. $|x|^3 = x^3$ **Β.** $|x| \leq -x$ **Γ.** $|x| \geq x$ **Δ.** $|x| > -x$

41. Αν $|x| \leq x$ και $|y| \leq -y$ και $xy \neq 0$, τότε:
Α. $x - y < 0$ **Β.** $xy > 0$ **Γ.** $x < 0 < y$ **Δ.** $y - x < 0$

42. Αν $|x| > x$ και $|y| > -y$, τότε:
Α. $y - x < 0$ **Β.** $\dfrac{x}{y} > 0$ **Γ.** $x - y < 0$ **Δ.** $xy \geq 0$

43. Να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως δείχνει η 1η γραμμή του.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Τιμές του x
$\|x - 2\| < 3$	$d(x, 2) < 3$	$-1 < x < 5$
$\|x\| < 2$		
	$d(x, 5) < 2$	
		$2 < x < 10$
$\|x + 4\| < 5$		
	$d(x, -2) < 1$	
		$-6 < x < 2$

44. Να συμπληρώσετε τον πίνακα όπως δείχνει η 1η γραμμή του.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Τιμές του x
$\|x-2\| > 5$	$d(x, 2) > 5$	$x > 7$ ή $x < -3$
$\|x-1\| > 2$		
	$d(x, 8) > 2$	
		$x > 5$ ή $x < -1$
$\|x+1\| > 3$		
	$d(x, -4) > 1$	
		$x > 1$ ή $x < -5$

Ασκήσεις για λύση

Βασικές ασκήσεις

45. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|x-5| < 7$ **ii)** $|2x-7| \leq 1$ **iii)** $|x+2| > 2$ **iv)** $|2x-1| \geq 5$

46. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|x| \geq 0$ **ii)** $|x| > 0$ **iii)** $|x| < 0$ **iv)** $|x| \leq 0$

47. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|5x-3| < 0$ **ii)** $|2x-10| \geq 0$ **iii)** $0 > |4-x|$ **iv)** $0 \leq |x+2|$

48. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|3x-6| < -6$ **ii)** $|5x+8| \geq -2$ **iii)** $|x-5| > -5$ **iv)** $|2x+5| \leq -1$

49. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|5x+10| \leq 0$ **ii)** $|6+3x| > 0$ **iii)** $|2x-8| \leq 0$ **iv)** $|-2x+6| > 0$

50. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|8-5x| \leq 2$ **ii)** $|2-x| < 2$ **iii)** $|1-2x| < 5$ **iv)** $|-3x+2| \geq 1$
v) $|-3x-2| \leq 0$ **vi)** $|-5x+2| > 0$ **vii)** $-|-x-2| < 0$ **viii)** $-|10-5x| \geq 0$

51. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|x| < \sqrt{3}-2$ **ii)** $|x| < \sqrt{2}-1$ **iii)** $|x| > \sqrt{5}-2$ **iv)** $|x| > \sqrt{5}-3$

52. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)** $|x + 4| \leq 3 - \sqrt{9}$ **ii)** $|x - 2| > 18 - 3\sqrt{2}$

53. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $|x| < \pi - 3$ **ii)** $|x - 3| > \pi - 3$ **iii)** $|x - 3| < |\pi - 3|$
iv) $|x| < \pi - 4$ **v)** $|x - 4| > \pi - 4$ **vi)** $|x - 4| < |\pi - 4|$

54. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $(x^2 + 5)\,|x| < 3(x^2 + 5)$ **ii)** $|x - 2|\,(x^2 + 3) \geq x^2 + 3$

55. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\left|\dfrac{x-2}{x+4}\right| \geq 0$ **ii)** $\left|\dfrac{x-5}{x+1}\right| > 0$ **iii)** $\left|\dfrac{x-3}{x+5}\right| > -1$
iv) $\left|\dfrac{x-4}{x+8}\right| \geq -1$ **v)** $\left|\dfrac{x^2-25}{10x-50}\right| \leq 0$

56. Να αποδείξετε ότι:
i) Αν $x + 5 \geq y$ και $x - 5 \leq y$, τότε $|x - y| \leq 5$.
ii) Αν $x > y + 2$ ή $x < y - 2$, τότε $|x - y| > 2$.
iii) Αν $y < x - 4$ ή $y > x + 4$, τότε $|x - y| > 4$.

57. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ισχύει:
i) $2 < |x| < 5$ **ii)** $1 \leq |2x - 1| < 5$ **iii)** $-2 \leq |x - 1| \leq 5$
iv) $0 \leq |x + 2| \leq 1$ **v)** $0 < |x + 2| < 4$ **vi)** $-3 \leq |10 + 5x| \leq 0$

58. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $\dfrac{5|x-6|+2}{3} \leq 4$ **ii)** $\dfrac{7|x+2|+12}{4} \leq 3$ **iii)** $\dfrac{5|x-3|+8}{4} > 2$
iv) $\dfrac{3|-x+5|+4}{4} > 4$ **v)** $\dfrac{5-|-x-2|}{6} \leq -2$ **vi)** $\dfrac{|2x-5|+20x}{5} \geq 4x + 3$

59. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\dfrac{2|4x+1|-1}{3} \leq \dfrac{|4x+1|+1}{2}$ **ii)** $5\dfrac{|x-3|+6}{4} - 4|x-3| < \dfrac{5|x-3|+6}{8}$
iii) $\dfrac{5|x+4|+8}{4} - \dfrac{3|x+4|-6}{2} \leq \dfrac{-7|x+4|+30}{6} - |x+4|$
iv) $\dfrac{-|x-5|+1}{4} - \dfrac{2-3|x-5|}{8} < \dfrac{5|x-5|+24}{12} - 2$

60. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\dfrac{|x-5|+1}{2} - |x-5| \leq 1 - \dfrac{5-|5-x|}{4}$

ii) $\dfrac{|x-3|+2}{3} - |2x-6| > \dfrac{10-|3-x|}{6} - 7$

iii) $\dfrac{2+|4-x|}{4} - \dfrac{3-|x-4|}{2} \geq -1 + |8-2x|$

iv) $\dfrac{|3x-6|-4}{10} - \dfrac{|5x-10|-8}{4} < -6$

61. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{2|3-x|-1}{3} - |x-3| > \dfrac{|3-x|-8}{3} + 1$

ii) $\dfrac{|3x-2|+2}{2} - \dfrac{|2-3x|}{3} > \dfrac{6-|3x-2|}{2} - 2$

iii) $\dfrac{-|3x-6|+2}{4} - \dfrac{|x-2|-6}{12} \leq \dfrac{|2-x|-16}{8} + 3 - |2-x|$

62. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|5x-2| - |0{,}4-x| < \dfrac{12}{5}$ **ii)** $|2x-3| > \left|x-\dfrac{3}{2}\right|$ **iii)** $|10x-3| \leq |0{,}3-x|$

63. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $|x-2| < 3$ **ii)** $2 < |x| < 5$ **iii)** $0 < |x-1| < 3$

64. Να βρείτε τη μικρότερη θετική ακέραια ρίζα της ανίσωσης $|x-2| > 4$.

65. Να βρείτε τη μεγαλύτερη αρνητική ακέραια ρίζα της ανίσωσης:

i) $|x| \geq 5$ **ii)** $|x-4| > 6$

66. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x|^3 > 8$ **ii)** $|x-2|^{107} \leq 1$ **iii)** $|x^5| < 32$

iv) $|(x-4)^7| > 128$ **v)** $0 < |x-1|^{15} < 1$ **vi)** $1 < |x-1|^3 \leq 64$

67. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 < 1$ **ii)** $x^2 > 4$ **iii)** $x^4 \leq 1$

iv) $(x-2)^4 \geq 16$ **v)** $x^8 < 256$ **vi)** $(x+1)^{12} \leq 5^{12}$

vii) $(x-6)^{56} > (-4)^{28}$ **viii)** $9 < x^2 < 25$ **ix)** $0 < x^{10} < 1$

x) $4 < (x-1)^2 < 16$ **xi)** $0 < (x-5)^4 < 16$ **xii)** $x^6 \geq 16x^2$

68. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x+3| > |x-1|$ **ii)** $|2x+1| - 2|x| \leq 0$ **iii)** $|4-5x| \geq |5x+4|$

iv) $\left|\dfrac{x+4}{2}\right| > \left|\dfrac{3x-4}{6}\right|$ **v)** $\left|\dfrac{5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{2x-1}\right|$ **vi)** $|4x-3| < |4x+5|$

69. Αν $\alpha < \beta$, να λύσετε την ανίσωση $|x-\alpha| > |x-\beta|$.

70. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\left(|x-2|+2\right)(3x+6) < 0$ **ii)** $\left(|x+1|+1\right)\left(|x+2|-2\right) \le 0$
iii) $(x^2+3)\left(|x|-3\right) > 0$ **iv)** $\left(|x-3|+1\right)\left(|x|-|x-2|\right) > 0$

71. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $(x-4)\left(|x|-5\right) \ge 0$ **ii)** $(x+2)\left(3|x|-12\right) < 0$ **iii)** $\left(|x|-4\right)(3x-6) < 0$
iv) $\left(2-|x|\right)(2+x) > 0$ **v)** $\left(|x|-3\right)(x-3) > 0$ **vi)** $\left(|x|-4\right)(x-4) \le 0$

72. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)** $\dfrac{|x|-4}{x-2} < 0$ **ii)** $\dfrac{|x|-3}{x-5} \le 0$

73. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $(x+3)|x-1| \le 0$ **ii)** $(x-5)|x-4| \ge 0$ **iii)** $(x+2)|x-3| > 0$

74. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $x \cdot |x^2-4| > 0$ **ii)** $x \cdot |x^2-4| \ge 0$
iii) $(x+2)|x^2-5x| > 0$ **iv)** $(x-5)|x^2-4x| \ge 0$

75. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\left|-x^2-5\right| \le x^2-2x-1$ **ii)** $\left|x^2+3\right|-5x > x^2-2$
iii) $\left|(x-2)^2\right| < x^2-8$ **iv)** $\left|x^2-10x+25\right| \ge x^2-5$
v) $\left|2x-x^2-1\right| < x^2-7$ **vi)** $2x^2-\left|2x^2-40x+200\right| > 45$

76. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\left||x-2|+3\right| < 5$ **ii)** $\left|-|x-4|-2\right| > 6$ **iii)** $\left||x-2|+2\right| \le 2$

77. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\left||x-2|+3\right| < 5-|x-2|$ **ii)** $\left|x^2+5|x|\right| \ge x^2+20$
iii) $\left||x-2|+|x+3|\right| \le |x-2|-|x+3|$ **iv)** $\left||x-5|+4\right| > 10-|2x-10|$
v) $\left||2x-4|+1\right| < 6-|6-3x|$ **vi)** $\left||3-x|+16\right| > |x-3|+x^2$
vii) $\left||1-x|+|1+x|\right| > |x-1|-|x+1|$

78. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $\left|3x^2+5\right|-\left|-2x^2-1\right| < x^2-8x$ **ii)** $-\left|x^2-12x+36\right| \le 3-\left|-x^2+6x-9\right|$
iii) $\left|2|x|+3x^2\right|-\left|-3x^2-5|x|\right| < -12$ **iv)** $\left|\left(16-|x|\right)|x|-64\right| > \left|8\left(|x|-2\right)-x^2\right|$

79. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|2x-1| > 3-x$ **ii)** $|2x-4| < x-1$ **iii)** $2|x+1| > 4+x$

80. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|3x-2| \geq x+2$ **ii)** $|x-2| < x$ **iii)** $3|x+1| > x-1$

81. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(|x|-x)(|x-2|+1) \leq 0$ **ii)** $(x+|x|)(|x+4|+4) > 0$

iii) $(|x|-x)(x+1) \leq 0$ **iv)** $(|x|-x)(x-1) \geq 0$

v) $(|x|+x)(x-1) \leq 0$

82. Να λύσετε την ανίσωση $(x-1)|x-2| \geq x-2$.

83. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{|x-3|}{x-3} \geq 0$ **ii)** $\dfrac{|2x-10|}{5-x} \geq 0$ **iii)** $\dfrac{|2x+6|}{5x+20} > 0$

iv) $\dfrac{|x-4|}{x-5} < 0$ **v)** $\dfrac{|x-3|}{x-3} < x+5$ **vi)** $\dfrac{|x|}{x} > |x|-2$

84. Αν $x \neq 3$, να εξετάσετε αν είναι αληθής η ισοδυναμία:

i) $\dfrac{x-2}{|x-3|} > 1 \Leftrightarrow x-2 > |x-3|$ **ii)** $\dfrac{|x-2|}{x-3} > 1 \Leftrightarrow |x-2| > x-3$

85. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ισχύει:

i) $|x| = x$ **ii)** $|x| > x$ **iii)** $|x| < x$ **iv)** $|x| \geq x$ **v)** $|x| \leq x$

86. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ισχύει:

i) $|x| = -x$ **ii)** $|x| > -x$ **iii)** $|x| < -x$ **iv)** $|x| \geq -x$ **v)** $|x| \leq -x$

87. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $||x|-2| = |x|-2$ **ii)** $||x|-5| = 5-|x|$

iii) $|x^4-16| = 16-x^4$ **iv)** $|x^4-1| = x^4-1$

88. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|4x-3| \geq 4x-3$ **ii)** $|2x+1| < 2x+1$

iii) $|x+5| \leq x+5$ **iv)** $|2x-1| > 2x-1$

89. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|5x-8| \geq 8-5x$ **ii)** $|3x-5| < 5-3x$

iii) $|2x-5| \leq -2x+5$ **iv)** $|x+2| > -x-2$

90. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x^2 - 16| \leq x^2 - 16$ **ii)** $|x^2 - 100| > x^2 - 100$

iii) $||x| - 2| \leq 2 - |x|$ **iv)** $|5 - |x|| < |x| - 5$

91. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{3}{|x-4|} \geq 1$ **ii)** $\dfrac{5}{|x+2|} \leq \dfrac{5}{|x|}$ **iii)** $\dfrac{1}{x^2} > \dfrac{4}{9}$

92. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x^2-1}{|x|-1} < 3$ **ii)** $\dfrac{x^2-16}{|x|-4} \leq 8$ **iii)** $\dfrac{x^2-100}{|x|-10} \geq 20$ **iv)** $\dfrac{x^2-25}{|x|-5} > 6$

93. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x|x| - 4 < 4|x| - x$ **ii)** $2(x - |x|) < x|x| - 4$

Διάφορες επιπλέον ασκήσεις

94. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις είναι αδύνατες:

i) $|x - 2 + x - 6| > |x - 2| + |x - 6|$ **ii)** $||5 - x| - |x + 3|| > 8$

iii) $|x - 1| - |4 - x| > 3$ **iv)** $|x^3 - x - 1| < x^3 - x - 1$

v) $|x^3 - x - 1| < 1 + x - x^3$

95. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x - 2| + |x - 8| < |x - 2 + x - 8|$

ii) $|x^2 - 16| + |x + 4| \geq |x^2 - 16 + x + 4|$

iii) $|x^2 + 3x| + |2x - 6| < |x^2 + 5x - 6|$

iv) $|x^2 + 3x + 2| + |x^2 + 5x - 6| \geq |2x^2 + 8x - 4|$

96. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{8+|x|}{x} < 3$ **ii)** $x|x - 4| \leq 4x$ **iii)** $|x| < \dfrac{4}{x}$ **iv)** $\dfrac{1}{|x|} > \dfrac{1}{x}$

97. Να λύσετε τις ανισώσεις: **i)** $3|x| \leq x^2$ **ii)** $|x^3| \geq 5x^2$ **iii)** $|x^3| < 10x^2$

98. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x - 5| \cdot |x + 5| \leq 2|x + 5|$ **ii)** $4|x + 3| \geq x^2|x + 3|$

iii) $x^2|x - 2| < 9|x - 2|$ **iv)** $(x - 5)^2 < 3|x - 5|$

v) $|x| \cdot |x - 2| > |x - 2|$ **vi)** $|x - 3| \cdot |x - 5| \leq |x - 3|$

99. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x^2 - 3x| < 4|x|$ **ii)** $|x^2 - x| \geq 5|x|$ **iii)** $|x^2 + 3x| < |4x + 12|$

100. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\big|3|x| - 1\big| \leq 5$ **ii)** $\big||1 - x| - 2\big| < 1$ **iii)** $\big||x| - 4\big| < 4$

101. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\big||1 - x| - 3\big| > 2$ **ii)** $\big||x + 1| - 2\big| > 3$ **iii)** $\big||x| - 2\big| \geq 2$

102. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\Big|\big||x| - 3\big| - 1\Big| < 2$ **ii)** $\Big|\big||x| - 2\big| - 3\Big| \leq 1$ **iii)** $\Big|\big||x| - 3\big| - 2\Big| < 1$

103. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\Big|\big||x| - 3\big| - 2\Big| \geq 1$ **ii)** $\Big|\big||x| - 10\big| - 5\Big| \geq 5$

104. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{|x| + 7}{|x| + 1} \geq 3$ **ii)** $\dfrac{|x| + 6}{|x| + 3} < 2$ **iii)** $\dfrac{|4x - 3| + 8}{|x| + 2} > 4$

105. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{5|x| - 4}{|x| + 2} > 3$ **ii)** $\dfrac{20 - |x|}{|x| + 4} > 3$ **iii)** $\left|\dfrac{-5x}{2 + |x|}\right| < 3$

106. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x^2 - 8| \leq x^2$ **ii)** $|x^2 - 9| < x^2 + 5$ **iii)** $|x - 2| \cdot |x + 2| > x^2 + 2$

107. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x^2 - 5| < x^2 - 3$ **ii)** $|x^2 - 6| \geq x^2 - 2$

iii) $|x^2 - 8| \leq x^2 - 10$ **iv)** $|x^2 - 12| \geq x^2 - 20$

108. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x| \cdot |2x^3 + x| \leq 2x^4 - x^2$ **ii)** $|x| \cdot \big|x^2 + |x|\big| \big(|x| - 1\big) > x^4 - 9$

109. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\big|x^2 + |x|\big| \geq 2|x| + 2$

ii) $|x^2 - 4| + |x + 2| < 3|x - 2| + 3$

iii) $x^4 - |x| < (x^2 - 3)\big(x^2 + |x| + 1\big)$

110. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{3x+10}{x+|x|} > 4$ **ii)** $\dfrac{2|x|+8}{|x|-x} > 3$

111. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\big||x|-3\big| < |x|+1$ **ii)** $\big|2|x|-5\big| \leq |x|+2$ **iii)** $\big|2|x|-7\big| > |x|+4$

112. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x^2-9}{|x|+3} > 5|x|-7$ **ii)** $\dfrac{x^2+4|x|}{4+|x|} > 4$ **iii)** $\dfrac{|x^3|+x^2}{|x|+1} \leq 25$

113. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x^2+3|x|}{|x|+3} < |x-4|$ **ii)** $\dfrac{x^2-25}{|x|+5} \geq |x+2|-5$ **iii)** $x^2+10|x| > (|x|+10)|x+2|$

114. Να λύσετε την ανίσωση $\big||x|-2\big| < \big||x|-6\big|$.

115. Να λύσετε την ανίσωση $\big|x-|x-1|\big| < \big|x+|x-1|\big|$.

116. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{|x-1|-|x+5|}{|x+1|} < 0$ **ii)** $\dfrac{|x-1|-|x+5|}{x+1} > 0$

117. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\left|\dfrac{5|x|-2}{2+3|x|}\right| < 1$ **ii)** $\left|\dfrac{|x|-4}{|x|+1}\right| < \dfrac{2}{3}$

118. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\left|\dfrac{x^2-4}{x+2}\right| > 3$ **ii)** $\dfrac{|x^2+x|}{|x+1|} < 2$

119. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| \cdot \big|(x-1)(x+3)\big| < 25$ **ii)** $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \cdot |x^2-1| < 16$

120. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\left|\dfrac{x-5}{x+2}\right| < \dfrac{10}{|x+2|}$ **ii)** $\left|\dfrac{x^2}{x+3}\right| < \dfrac{16}{|x+3|}$

121. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x^2-3|x|}{|x|-3} < 5$ **ii)** $\dfrac{(|x|-2)^2-1}{|x|-3} > 1$ **iii)** $\dfrac{x^2-2|x|+1}{|x|-1} \geq -\dfrac{1}{2}$

122. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{|x^3| - 4x^2}{|x| - 4} < 25$ **ii)** $\dfrac{|x^3| - 25|x|}{x^2 - 25} > 3$ **iii)** $\dfrac{|x^3| - 2x^2}{|x| - 2} \leq 4$

123. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\big|x - |x|\big| > |x - 2| - x$ **ii)** $\big|x + |x|\big| < 2|x| + x - 5$

iii) $3\big|x - |x|\big| + 2\big|x + |x|\big| \leq 5|x - 4| - x$ **iv)** $\big|x + |x|\big| < \big|x - |x|\big|$

124. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{|x - 3|}{x - 3} + 2|x + 1| \leq 9$ **ii)** $|x + 2| - \dfrac{|x + 1|}{x + 1} > 1$

125. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x + 1| + |x - 4| > 7$ **ii)** $|x + 1| - |2 - x| \geq 1$

iii) $|x - 2| + 3|1 - x| < 2x + 9$ **iv)** $|x + 4| - |2 - x| \geq x - 3$

126. Να λύσετε την ανίσωση:

$$7 - 2|x - 3| + 3\left|\frac{1}{2} - x\right| < 5\,\frac{|x + 2|}{2} - 3x.$$

127. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x - 1| - |x| + \big|2x + 3\big| > 2x + 4$ **ii)** $|x - 1| - |x| + \big|2x + 3\big| \leq 2x + 4$

128. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $2|x - 2| \leq |1 - x| + 4 \leq |x - 5|$.

129. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x, y:

i) η ανισότητα $|x| + |y| \leq 0$; **ii)** η ανισότητα $|x| + |y| > 0$;

130. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\big|x^2 - 1\big| + \big|(x + 1)(x - 3)\big| \geq 0$ **ii)** $\big|x^2 - 9\big| \geq -\big|x^2 + 3x\big|$

131. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\big|(x - 4)(x + 5)(x - 6)\big| + \big|(x + 5)(x - 6)(x + 7)\big| \leq 0$

ii) $\big|2x^2 - 8\big| \leq -\big|3x^2 + 6x\big|$ **iii)** $\big|x + 3y\big| \leq -\big|x + 6\big|$

132. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x| - x + \big|x^2 - 64\big| \leq 0$ **ii)** $|x| + x + \big|x^2 - 1\big| \leq 0$

iii) $|x| + x + \big|y^2 - 16\big| \leq 0$ **iv)** $\big|x + 3\big| + |y| \leq y$

133. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\big|2x^2 - 8\big| + \big|x^2 + 2x\big| > 0$ **ii)** $\big|5 - |x|\big| + \big|x + |x|\big| > 0$

iii) $|x-2|\cdot|x-3|\cdot|x+1| + |x-1|\cdot|x+2|\cdot|x-3| > 0$

iv) $\left|2x+y\right| + \left|x+4\right| > 0$

134. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\left|x^2-4\right| > -\left|(x+2)\,(x+4)\right|$ **ii)** $\left|x+3\right| > -\left|y-2\right|$

135. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\left(x+|x|\right)^2 + \left(y-|y|\right)^2 \leq 0$ **ii)** $\left(x+|x|\right)^2 + \left(y-|y|\right)^2 > 0$

136. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{5x-3}{\left|2x+1\right|} \leq 3$.

137. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{|1-x|}{2+x} < 4$.

138. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία παίρνουν τιμές τα α, β.

i) $|4-\beta| < 1$ και $\alpha\beta - |\alpha| = 8$ **ii)** $|\beta-5| < 4$ και $\alpha\beta - |\alpha| = 8$

iii) $|5+\beta| < 2$ και $\alpha\beta + |\alpha| = -16$ **iv)** $|3+\beta| < 2$ και $\alpha\beta - |\alpha| = 8$

139. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α:

i) η ανίσωση $|x| \geq \alpha$ αληθεύει για κάθε x

ii) η ανίσωση $|x| > \alpha$ αληθεύει για κάθε x

iii) η ανίσωση $|x| < \alpha$ είναι αδύνατη

iv) η ανίσωση $|x| \leq \alpha$ είναι αδύνατη

140. Να λύσετε, για τις διάφορες τιμές του λ, τις ανισώσεις:

i) $|x-3| < \lambda+5$ **ii)** $|x+1| \leq \lambda-3$ **iii)** $|x-5| > \lambda-2$ **iv)** $|x+1| \geq \lambda+2$

141. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του λ, πόσες και ποιες λύσεις έχει η ανίσωση:

i) $|x| < \lambda-2$ **ii)** $|x| \leq \lambda-2$ **iii)** $|x| \geq \lambda-5$ **iv)** $|x| > \lambda-5$

142. Αν $|\alpha| < |\beta|$:

A. να αποδείξετε ότι: **i)** $\beta \neq 0$ **ii)** $-|\beta| < \alpha < |\beta|$

iii) οι αριθμοί $\alpha+\beta$ και $\alpha-\beta$ είναι ετερόσημοι

iv) $\dfrac{|\alpha|}{|\alpha|-|\beta|} + \dfrac{|\beta|}{\left||\alpha|-|\beta|\right|} = 1$ **v)** $\dfrac{|\alpha+\beta|}{|\alpha|-|\beta|} \leq 1$

B. να λύσετε την ανίσωση $|\alpha|x - \alpha^2 < |\beta|x - \beta^2$ και να αποδείξετε ότι για κάθε λύση x_0 αυτής ισχύει $x_0 > 0$.

143. Αν $2|\alpha| + 3|\beta| < 6$:

i) να αποδείξετε ότι:

α) $|\alpha| < 3$ και $|\beta| < 2$ **β)** $|\alpha\beta| + 6 > 2|\alpha| + 3|\beta|$

γ) $|\alpha + \beta| < 5$ **δ)** $|\alpha - \beta| < 5$ **ε)** $|\alpha^2 - \beta^2| < 13$

ii) να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x|\alpha| + 12 > 4|\alpha| + 3x$ **β)** $|\alpha x| + 6 < 2|\alpha| + 3|x|$

144. Αν $|\alpha| + |\beta| < 1$:

i) να αποδείξετε ότι:

α) $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 1$ **β)** $|\alpha\beta| + 1 > |\alpha| + |\beta|$

γ) $|\alpha + \beta| < 1$ **δ)** $|\alpha - \beta| < 1$ **ε)** $|\alpha^2 - \beta^2| < 1$

ii) να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x|\alpha| + 1 < |\alpha| + x$ **β)** $|\alpha x| + 1 > |\alpha| + |x|$

Η παράσταση $|x - \alpha| + |x - \beta|$

145. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x-4| + |x-1| \geq 3$ **ii)** $|x| + |x+2| > 1$ **iii)** $|x-3| + |x-5| < 2$

iv) $|x+1| + |x-1| \leq 2$ **v)** $|x| + |x-5| < 4$ **vi)** $|x-1| + |x-2| > 1$

vii) $|x+4| + |x-2| > 6$ **viii)** $|x+1| + |x+2| \leq 1$ **ix)** $|3-x| + |7-x| > 4$

146. Αν α είναι ένας δεδομένος πραγματικός αριθμός με $\alpha > 0$, να λύσετε, για τις διάφορες τιμές του μ, την ανίσωση $|x-\alpha| + |x+\alpha| < \mu$.

Η παράσταση $|x - \alpha| - |x - \beta|$

147. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x-3| - |x-2| > 1$ **ii)** $|x-2| - |x+4| < -6$

iii) $|x-5| - |x-2| < -3$ **iv)** $|x-4| - |x+1| > 5$

148. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x-1| - |x-3| \geq 2$ **ii)** $|x+4| - |x-1| \leq -5$

iii) $|x+2| - |x-1| < 3$ **iv)** $|x-2| - |x-5| > -7$

149. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x-4| - |x-1| \geq 3$ **ii)** $|x| - |x+2| \leq -2$

iii) $|x-10| - |x-8| < 2$ **iv)** $|x+2| - |x+5| > -3$

Απαντήσεις - Υποδείξεις Ασκήσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

23. Ανισώσεις 1ου βαθμού

14.

$2 < x \le 10$	$(2, 10]$
$-4 < x < -1$	$(-4, -1)$
$-3 \le x \le 1$	$[-3, 1]$
$x \le 5$	$(-\infty, 5]$
$x < -3$	$(-\infty, -3)$
$x > -2$	$(-2, +\infty)$
$x \ge 17$	$[17, +\infty)$

15.

$-4 < x \le 2$	$(-4, 2]$
$-3 < x < 2$	$(-3, 2)$
$1 \le x \le 5$	$[1, 5]$
$-2 \le x < 1$	$[-2, 1)$
$x < 7$	$(-\infty, 7]$
$x > 5$	$(5, +\infty)$
$x \ge -10$	$[-10, +\infty)$
$x \le 12$	$(-\infty, 12]$

16. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Λ, **vi)** Λ

17. Β **18.** Γ **19.** Δ.

20. Α **21.** Γ **22.** Δ

23. Α **24.** Γ **25.** Δ

26. Α **27.** Δ

28. **i)** $x \le 2$ **ii)** $x < 0$ **iii)** $x > -\frac{1}{6}$

29. **i)** $x < \frac{3}{4}$ **ii)** $x \ge 0$ **iii)** $x > 4$

30. Αληθεύουν για κάθε x οι i), iii).
Αδύνατες οι ii), iv), v), vi).

31. Αληθεύουν για κάθε x οι ii), iii), iv), v).
Αδύνατες οι i), vi).

32. Αληθεύουν για κάθε x οι ii), iv), v).
Αδύνατες οι i), iii), vi).

33. **i)** Αδύνατη **ii)** $x > \frac{7}{10}$

34. **i)** $y < 14$ **ii)** $\omega \le -2$

35. **i)** Αδύνατη **ii)** $x \le 7$ **iii)** $x > 2$

36. **i)** $x < 21$ **ii)** $x < 2$ **iii)** $x \ge 4$

37. **i)** $x \ge 3$ **ii)** $x < 7$

38. Αδύνατες οι i), iv).
Αληθεύουν για κάθε x οι ii), iii).

39. **i)** $x \ge 4$ **ii)** $x \le 1$ **iii)** $x \le 2$
iv) $x \ge 6$ **v)** $x > -2$ **vi)** $x \le 5$
vii) $-1 < x < 6$

40. **i)** $x \le -1$ **ii)** $x \ge -2$ **iii)** $x < 1$
iv) $x \ge 2$ **v)** $x \le -4$ **vi)** $x \ge -3$
vii) $-6 < x < 3$

42. **i)** $x = 0, x = 1, x = 2$
ii) $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$

43. **i)** $\kappa = -8$ **ii)** $\kappa = -52$ **iii)** $\kappa = -122$

44. $\nu = 37$

45. **i)** $x = 3$ **ii)** $x = 3$ **iii)** $x = 0$

46. **i)** $x = -3$ **ii)** $x = -4$

47. $\nu = 5$

48. $x = \frac{5\pi}{6}$

49. $x = \frac{9\pi}{5}$

50. $x = \frac{3\pi}{4}$ ή $x = \frac{7\pi}{4}$

51. $x = \frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{7\pi}{6}$

52. $x = \frac{2\pi}{3}$ ή $x = \frac{8\pi}{3}$

53. **i)** Δεν υπάρχουν **ii)** $x > \frac{27}{51}$

54. **i)** $-1 \le x < \frac{9}{2}$ **ii)** $x < 12$

55. **i)** $-\frac{5}{6} \le x \le 0$ **ii)** Αδύνατο

56. **i)** $-1 \le x < 4$
ii) $x = -1$ ή $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$
iii) $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = 3$

57. $-3, -2, -1, 0, 1, 2$

58. Λύνουμε τη «διπλή» ανίσωση $\alpha < \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta < \beta$ ως προς λ.

59. **i)**
- Αν $\alpha > 0$, τότε $x < \frac{2}{\alpha}$.
- Αν $\alpha < 0$, τότε $x > \frac{2}{\alpha}$.
- Αν $\alpha = 0$, είναι ταυτότητα.

ii)
- Αν $\lambda > 2$, τότε $x \le \frac{5}{\lambda - 2}$.
- Αν $\lambda < 2$, τότε $x \ge \frac{5}{\lambda - 2}$.
- Αν $\lambda = 2$, τότε είναι ταυτότητα.

iii)
- Αν $\mu < 3$, τότε $x > 2$.
- Αν $\mu > 3$, τότε $x < 2$.
- Αν $\mu = 3$, είναι αδύνατη.

60. **i)**
- Αν $\mu > 3$, τότε $x > \frac{1}{\mu - 3}$.
- Αν $\mu < 3$, τότε $x < \frac{1}{\mu - 3}$.
- Αν $\mu = 3$, είναι αδύνατη.

ii)
- Αν $\mu > \frac{9}{8}$, τότε $x \ge \frac{2\mu - 15}{8\mu - 9}$.
- Αν $\mu < \frac{9}{8}$, τότε $x \le \frac{2\mu - 15}{8\mu - 9}$.
- Αν $\mu = \frac{9}{8}$, αληθεύει για κάθε x.

61. **i)**
- Αν $\lambda > 0$, τότε $x < \frac{5}{2}$.
- Αν $\lambda < 0$, τότε $x > \frac{5}{2}$.
- Αν $\lambda = 0$, είναι αδύνατη

ii)
- Αν $\lambda > \frac{1}{4}$, τότε $x \le 4\lambda + 1$.
- Αν $\lambda < \frac{1}{4}$, τότε $x \ge 4\lambda + 1$.
- Αν $\lambda = \frac{1}{4}$, αληθεύει για κάθε x.

iii)
- Αν $\lambda > -\frac{1}{4}$, τότε $x \le \frac{2\lambda - 1}{4\lambda + 1}$.
- Αν $\lambda < -\frac{1}{4}$, τότε $x \ge \frac{2\lambda - 1}{4\lambda + 1}$.
- Αν $\lambda = -\frac{1}{4}$, τότε είναι αδύνατη.

62. **i)**
- Αν $\lambda > -1$, τότε $x \le 1 - \lambda$.
- Αν $\lambda < -1$, τότε $x \ge 1 - \lambda$.
- Αν $\lambda = -1$, τότε αληθεύει για κάθε x.

ii)
- $x > \frac{1}{\lambda^2 + 1}$

iii)
- Αν $\alpha > -2$, τότε $x < \alpha + 2$.
- Αν $\alpha < -2$, τότε $x > \alpha + 2$.
- Αν $\alpha = -2$, τότε είναι αδύνατη.

63. **i)**
- Αν $\lambda > -3$, τότε $x > \frac{\mu + 5}{\lambda + 3}$.
- Αν $\lambda < -3$, τότε $x < \frac{\mu + 5}{\lambda + 3}$.
- Αν $\lambda = -3$, τότε, αν $\mu \ge -5$, είναι αδύνατη, ενώ, αν $\mu < -5$, αληθεύει για κάθε x.

ii)
- Αν $\lambda > 1$, τότε $x \le \frac{2(\mu - 1)}{\lambda - 1}$.
- Αν $\lambda < 1$, τότε $x \ge \frac{2(\mu - 1)}{\lambda - 1}$.
- Αν $\lambda = 1$, τότε, αν $\mu \ge 1$, αληθεύει για κάθε τιμή του x, ενώ, αν $\mu < 1$, είναι αδύνατη.

64. **i)** Γράφεται $(\lambda - \mu)x < (\lambda - \mu)(\lambda + \mu)$.
- Αν $\lambda > \mu$, τότε $x < \lambda + \mu$.
- Αν $\lambda < \mu$, τότε $x > \lambda + \mu$.
- Αν $\lambda = \mu$, τότε είναι αδύνατη.

ii), iii) Βλ. παρόμοια λυμένη άσκηση.

65. **i)** $\lambda \le 2$ **ii)** $\lambda \ge -1$ **iii)** $\lambda < 4$
iv) $\lambda < 0$ **v)** $\lambda = 1$ **vi)** $\lambda = -2$

66. **i)** $\alpha > 0$ **ii)** $\alpha < 1$ **iii)** $\alpha \ge -2$
iv) $\alpha \le 2$ **v)** $\alpha = 2$ **vi)** $\alpha = -1$

67. **Α.** **i)** $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta \le 2$ **ii)** $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta > 2$

Β. i) $\beta = -1, \alpha < -4$ **ii)** $\beta = -1, \alpha \geq -4$

68. i) Η ανίσωση γράφεται:
$2(\lambda - 2)x \leq 5\lambda + 8\mu - 6$, πρέπει:
$\lambda = 2$, οπότε προκύπτει $0x \leq 8\mu + 4$
και πρέπει $8\mu + 4 < 0$,
δηλαδή $\mu < -\dfrac{1}{2}$.

ii) Ομοίως για $\lambda = 2$ πρέπει $8\mu + 4 \geq 0$,
δηλαδή $\mu \geq -\dfrac{1}{2}$.

69. $\lambda = 1, \mu = -2$

70. Γράφεται $(\lambda + 4)x = 16 - \lambda^2$.
- Αν $\lambda = -4$, είναι ταυτότητα.
- Αν $\lambda \neq -4$, τότε έχει μοναδική λύση. την $x = 4 - \lambda$. Πρέπει ακόμη $x > 0$ $[\Leftrightarrow \lambda < 4]$.
- Τελικά $-4 \neq \lambda < 4$.

71. Όπως η προηγούμενη. Προκύπτει:
$-\dfrac{1}{2} \neq \lambda < \dfrac{1}{2}$.

72. i) $\lambda > 5$ **ii)** $5 \neq \lambda \leq 7$
iii) $4 \leq \lambda < 8$ με $\lambda \neq 5$

73. i) $\lambda \geq -2$ **ii)** $\lambda \leq -2$
iii) $-1 < \lambda \leq 2$

74. Αρχικά πρέπει $\lambda < 0$. Τότε $x \geq 4\lambda - 5$ και πρέπει $4\lambda - 5 = -9$, δηλαδή $\lambda = -1$.

75. i) $x = \dfrac{17\lambda + 80}{56}$
ii) $\lambda = -1$ ή $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$ ή $\lambda = 3$

76. Πρέπει $\alpha + \beta - 3 = 0$, δηλαδή:
$\alpha + \beta = 3$ και τότε:
$5\alpha + 4\beta = 4\alpha + 4\beta + \alpha = 4(\alpha + \beta) + \alpha =$
$= 4 \cdot 3 + \alpha = \alpha + 12$ και η ανίσωση γράφεται $0x > \alpha + 12 - 17$,
δηλαδή $0x > \alpha - 5$.
Τελικά: $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

77. i) $x \geq -2$ και $x < 4$ **ii)** $x > 0$ και $x < 5$

78. i) $x < 3$ **ii)** $x > 5$ **iii)** $x < -2$

79. i) $0 < x < 4$ **ii)** $x < 0$ ή $x > \dfrac{1}{3}$
iii) $x > 0$ ή $x < -\dfrac{1}{2}$ **iv)** $-\dfrac{3}{2} < x < 0$

80. i) $x < 3$ **ii)** $x < 2$ ή $x \geq 5$
iii) $x \geq 2$ ή $x < -3$

81. Γράφεται: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq \dfrac{1}{2} - \lambda \end{cases}$

- Αν $\lambda = \dfrac{1}{2}$, τότε $x = 0$.
- Αν $\lambda < \dfrac{1}{2}$, το σύστημα αληθεύει μόνο όταν $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} - \lambda$.
- Αν $\lambda > \dfrac{1}{2}$, το σύστημα είναι αδύνατο.

82. Το σύστημα γράφεται: $\begin{cases} x < \lambda + 2 \\ \lambda x \leq 2\lambda(\lambda + 1) \end{cases}$

- Για $\lambda = 0$ το σύστημα γίνεται:
$\begin{cases} x < 2 \\ 0x \leq 0 \end{cases}$ δηλαδή $x < 2$.
- Για $\lambda > 0$ γίνεται:
$\begin{cases} x < \lambda + 2 \\ x \leq 2\lambda + 2 \end{cases}$ δηλαδή $x < \lambda + 2$.
- Για $\lambda < 0$ γίνεται:
$\begin{cases} x < \lambda + 2 \\ x \geq 2\lambda + 2 \end{cases}$ δηλαδή $2\lambda + 2 \leq x < \lambda + 2$

(αφού $2\lambda + 2 < \lambda + 2$).

83. i)
- Αν $\lambda < 0$, τότε $x < \dfrac{\lambda + 3}{\lambda - 2}$.
- Αν $0 < \lambda < 2$, τότε $x > \dfrac{\lambda + 3}{\lambda - 2}$.
- Αν $\lambda > 2$, τότε $x < \dfrac{\lambda + 3}{\lambda - 2}$.
- Αν $\lambda = 2$, είναι ταυτότητα.

ii) Γράφεται $\dfrac{3\mu + 2}{\mu} x > \dfrac{2\mu + 8}{\mu}$.
- Αν $\mu > 0$, τότε $x > \dfrac{2\mu + 8}{3\mu + 2}$.
- Αν $\mu < -\dfrac{2}{3}$, τότε $x > \dfrac{2\mu + 8}{3\mu + 2}$.

- Αν $-\frac{2}{3} < μ < 0$, τότε $x < \frac{2μ + 8}{3μ + 2}$.
- Αν $μ = -\frac{2}{3}$, είναι αδύνατη.

84. Αν x έτη είναι η ηλικία του, τότε:
$x < (x - 26) + (x - 50) \Leftrightarrow x > 76$.

24. Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

26. **i)** Σ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ, **vi)** Λ, **vii)** Σ, **viii)** Σ, **ix)** Λ, **x)** Σ, **xi)** Σ, **xii)** Σ, **xiii)** Σ, **xiv)** Λ.

27. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Λ, **v)** Σ, **vi)** Λ, **vii)** Λ, **viii)** Σ, **ix)** Λ, **x)** Λ, **xi)** Λ, **xii)** Σ, **xiii)** Σ, **xiv)** Σ, **xv)** Λ.

28. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Λ, **vi)** Σ, **vii)** Λ, **viii)** Σ, **ix)** Σ, **x)** Σ, **xi)** Σ, **xii)** Σ.

29. **i)** Σ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Λ, **vi)** Σ, **vii)** Σ.

30. Γ. **31.** Γ. **32.** Δ.

33. Δ. **34.** Β. **35.** Β.

36. Α. **37.** Α. **38.** Γ.

39. Δ. **40.** Γ. **41.** Δ.

42. Γ.

43.
- $|x| < 2 \Leftrightarrow d(x, 0) < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$
- $d(x, 5) < 2 \Leftrightarrow |x - 5| < 2 \Leftrightarrow 3 < x < 7$
- $2 < x < 10 \Leftrightarrow 2 - 6 < x - 6 < 10 - 6 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow -4 < x - 6 < 4 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow |x - 6| < 4 \Leftrightarrow d(x, 6) < 4$
- $|x + 4| < 5 \Leftrightarrow d(x, -4) < 5 \Leftrightarrow -9 < x < 1$
- $d(x, -2) < 1 \Leftrightarrow |x + 2| < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1$
- $-6 < x < 2 \Leftrightarrow -6 + 2 < x + 2 < 2 + 2$
  $\Leftrightarrow -4 < x + 2 < 4 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow |x + 2| < 4 \Leftrightarrow d(x, -2) < 4$

44.
- $|x - 1| > 2 \Leftrightarrow d(x, 1) > 2 \Leftrightarrow x > 3$ ή $x < -1$
- $d(x, 8) > 2 \Leftrightarrow |x - 8| > 2 \Leftrightarrow x > 10$ ή $x < 6$
- $(x > 5$ ή $x < -1) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x - 2 > 3$ ή $x - 2 < -3) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow |x - 2| > 3 \Leftrightarrow d(x, 2) > 3$
- $|x + 1| > 3 \Leftrightarrow d(x, -1) > 3 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x > 2$ ή $x < -4$
- $d(x, -4) > 1 \Leftrightarrow |x + 4| > 1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x > -3$ ή $x < -5$
- $(x > 1$ ή $x < -5) \Leftrightarrow (x + 2 > 3$
  ή $x + 2 < -3) \Leftrightarrow |x + 2| > 3 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow d(x, -2) > 3$

45. **i)** $-2 < x < 12$, **ii)** $3 \le x \le 4$,
iii) $x > 0$ ή $x < -4$, **iv)** $x \ge 3$ ή $x \le -2$.

46. **i)** Για κάθε πραγματικό αριθμό x.
ii) $x \ne 0$, **iii)** Αδύνατη, **iv)** $x = 0$.

47. **i)**, **iii)** Αδύνατες,
ii), **iv)** Αληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x.

48. **i)**, **iv)** Αδύνατες,
ii), **iii)** Αληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x.

49. **i)** $x = -2$, **ii)** $x \ne -2$, **iii)** $x = 4$, **iv)** $x \ne 3$.

50. **i)** $\frac{6}{5} \le x \le 2$, **ii)** $0 < x < 4$, **iii)** $-2 < x < 3$,
iv) $x \le \frac{1}{3}$ ή $x \ge 1$, **v)** $= -\frac{2}{3}$, **vi)** $x \ne \frac{2}{5}$,
vii) $x \ne -2$, **viii)** $x = 2$.

51. **i)** Αδύνατη, **ii)** $1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} - 1$,
iii) $x > \sqrt{5} - 2$ ή $x < 2 - \sqrt{5}$,
iv) Αληθεύει για κάθε x.

52. **i)** $x = -4$, **ii)** $x \ne 2$.

53. **i)** $3 - π < x < π - 3$,
ii) $x > π$ ή $x < 6 - π$,
iii) $6 - π < x < π$,
iv) Αδύνατη,
v) Αληθεύει για κάθε x,
vi) $π < x < 8 - π$.

54. **i)** $-3 < x < 3$, **ii)** $x \le 1$ ή $x \ge 3$.

55. **i)** $x \ne -4$, **ii)** $x \ne -1$ και $x \ne 5$,
iii) $x \ne -5$, **iv)** $x \ne -8$, **v)** $x = -5$.

57. **i)** $-5 < x < -2$ ή $2 < x < 5$,
ii) $-2 < x \le 0$ ή $1 \le x < 3$,
iii) $-4 \le x \le 6$,
iv) $-3 \le x \le -1$,
v) $-6 < x < 0$ ή $0 < x < 2$,
vi) $x = -2$.

58. **i)** $4 \le x \le 8$, **ii)** $x = -2$, **iii)** $x \ne 3$,
iv) $x < 1$ ή $x > 9$, **v)** $x \le -19$ ή $x \ge 15$,
vi) $x \le -5$ ή $x \ge 10$.

59. **i)** $-\frac{3}{2} \le x \le 1$, **ii)** $x < 1$ ή $x > 5$, **iii)** $x = -4$, **iv)** $x \ne 5$.

60. **i)** $x \le 4$ ή $x \ge 6$, **ii)** $-1 < x < 7$, **iii)** $x = 4$, **iv)** $x < -6$ ή $x > 10$.

61. **i)** $1 < x < 5$, **ii)** $x \ne \frac{2}{3}$, **iii)** $x = 2$.

62. **i)** $-\frac{1}{5} < x < 1$, **ii)** $x \ne \frac{3}{2}$, **iii)** $x = \frac{3}{10}$.

63. **i)** $x = 0$ ή 1 ή 2 ή 3 ή 4,
ii) $x = 3$ ή -3 ή 4 ή -4,
iii) $x = -1$ ή 0 ή 2 ή 3.

64. 7

65. **i)** -5, **ii)** -3.

66. **i)** $x < -2$ ή $x > 2$,
ii) $1 \le x \le 3$,
iii) $-2 < x < 2$,
iv) $x < 2$ ή $x > 6$,
v) $0 < x < 1$ ή $1 < x < 2$,
vi) $-3 \le x < 0$ ή $2 < x \le 5$.

67. **i)** $-1 < x < 1$, **ii)** $x < -2$ ή $x > 2$,
iii) $-1 \le x \le 1$, **iv)** $x \le 0$ ή $x \ge 4$,
v) $-2 < x < 2$, **vi)** $-6 \le x \le 4$,
vii) $x < 4$ ή $x > 8$,
viii) $-5 < x < -3$ ή $3 < x < 5$,
ix) $-1 < x < 0$ ή $0 < x < 1$,
x) $-3 < x < -1$ ή $3 < x < 5$,
xi) $3 < x < 5$ ή $5 < x < 7$,
xii) $x \le -2$ ή $x = 0$ ή $x \ge 2$.

68. **i)** $x > -1$, **ii)** $x \le -\frac{1}{4}$, **iii)** $x \le 0$, **iv)** $x > -\frac{4}{3}$,
v) $-\frac{3}{4} < x \ne \frac{1}{2}$, **vi)** $x > -\frac{1}{4}$.

69. $x > \frac{\alpha + \beta}{2}$.

70. **i)** $x < -2$, **ii)** $-4 \le x \le 0$, **iii)** $x > 3$ ή $x < -3$,
iv) $x > 1$.

71. **i)** $-5 \le x \le 4$ ή $x \ge 5$, **ii)** $x < -4$ ή $-2 < x < 4$,
iii) $2 < x < 4$ ή $x < -4$, **iv)** $x < -2$ ή $-2 < x < 2$,
v) $-3 < x < 3$ ή $x > 3$, **vi)** $x \le -4$ ή $x = 4$.

72. **i)** $x < -4$ ή $2 < x < 4$, **ii)** $x \le -3$ ή $3 \le x < 5$.

73. **i)** $x \le -3$ ή $x = 1$, **ii)** $x \ge 5$ ή $x = 4$,
iii) $-2 < x \ne 3$

74. **i)** $0 < x \ne 2$, **ii)** $x = -2$ ή $x \ge 0$,
iii) $-2 < x < 0$ ή $0 < x < 5$ ή $x > 5$,
iv) $x \ge 5$ ή $x = 0$ ή $x = 4$.

75. **i)** $x \le -3$, **ii)** $x < 1$, **iii)** $x > 3$,
iv) $x \le 3$, **v)** $x > 4$, **vi)** $x > \frac{49}{8}$.

76. **i)** $0 < x < 4$, **ii)** $x < 0$ ή $x > 8$, **iii)** $x = 2$.

77. **i)** $1 < x < 3$, **ii)** $x \le -4$ ή $x \ge 4$, **iii)** $x = -3$,
iv) $x < 3$ ή $x > 7$, **v)** $1 < x < 3$,
vi) $-4 < x < 4$, **vii)** $x \ne -1$.

78. **i)** $x < -\frac{1}{2}$, **ii)** $x \le 5$, **iii)** $x > 4$ ή $x < -4$,
iv) $-6 < x < 6$.

79. **i)** $x < -2$ ή $x > \frac{4}{3}$, **ii)** $\frac{5}{3} < x < 3$,
iii) $x < -2$ ή $x > 2$.

80. **i)** $x \le 0$ ή $x \ge 2$, **ii)** $x > 1$, **iii)** Για κάθε πραγματικό αριθμό x.

81. **i)** $x \ge 0$, **ii)** $x > 0$, **iii)** $x \le -1$ ή $x \ge 0$,
iv) $x \ge 0$, **v)** $x \le 1$.

82. $x \ge 0$.

83. **i)** $x > 3$, **ii)** $x < 5$, **iii)** $-4 < x \ne -3$,
iv) $4 \ne x < 5$, **v)** $-6 < x < 3$ ή $x > 3$,
vi) $0 < x < 3$ ή $-1 < x < 0$.

84. **i)** Ναι, **ii)** Όχι.

85. **i)** $x \ge 0$, **ii)** $x < 0$, **iii)** Αδύνατη,
iv) Για κάθε (πραγματικό) x, **v)** $x \ge 0$.

86. **i)** $x \le 0$, **ii)** $x > 0$, **iii)** Αδύνατη,
iv) Για κάθε (πραγματικό) x, **v)** $x \le 0$.

87. **i)** $x \le -2$ ή $x \ge 2$, **ii)** $-5 \le x \le 5$,
iii) $-2 \le x \le 2$, **iv)** $x \le -1$ ή $x \ge 1$.

88. **i)** Για κάθε πραγματικό αριθμό x,
ii) Αδύνατη, **iii)** $x \ge -5$, **iv)** $x < \frac{1}{2}$.

89. **i)** Αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.
ii) Αδύνατη, **iii)** $x \le \frac{5}{2}$, **iv)** $x > -2$.

90. **i)** $x \le -4$ ή $x \ge 4$, **ii)** $-10 < x < 10$,
iii) $-2 \le x \le 2$, **iv)** Αδύνατη.

91. **i)** $1 \le x < 4$ ή $4 < x \le 7$, **ii)** $-1 \le x \ne 0$, **iii)** $-\frac{3}{2} < x < 0$ ή $0 < x < \frac{3}{2}$.

92. **i)** $-2 < x < -1$ ή $-1 < x < 1$ ή $1 < x < 2$, **ii)** $-4 < x < 4$ **iii)** $x < -10$ ή $x > 10$, **iv)** $x < -5$ ή $-5 < x < -1$ ή $-1 < x < 1$ ή $1 < x < 5$ ή $x > 5$.

93. **i)** $x < 4$, **ii)** $x > 2$.

94. Είναι όλες αδύνατες, διότι ισχύουν:

i) $|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|$,

ii) $\big||\alpha| - |\beta|\big| \le |\alpha + \beta|$,

iii) $|\alpha| - |\beta| \le |\alpha + \beta|$,

iv) $|\alpha| \ge \alpha$ [Άρα, για $\alpha = x^3 - x - 1$...],

v) $|\alpha| \ge -\alpha$ [Άρα, για $\alpha = x^3 - x - 1$...].

95. **i)**, **iii)** Αδύνατες, **ii)**, **iv)** Αληθεύουν για κάθε x.

96. **i)** $x < 0$ ή $x > 4$, **ii)** $x \le 8$, **iii)** $0 < x < 2$, **iv)** $x < 0$.

97. **i)** $x \le -3$ ή $x = 0$ ή $x \ge 3$, **ii)** $x \le -5$ ή $x = 0$ ή $x \ge 5$, **iii)** $-10 < x < 0$ ή $0 < x < 10$.

98. **i)** $x = -5$ ή $3 \le x \le 7$, **ii)** $x = -3$ ή $-2 \le x \le 2$, **iii)** $-3 < x < 2$ ή $2 < x < 3$, **iv)** $2 < x < 5$ ή $5 < x < 8$, **v)** $x < -1$ ή $1 < x < 2$ ή $x > 2$, **vi)** $x = 3$ ή $4 \le x \le 6$.

99. **i)** $-1 < x < 0$ ή $0 < x < 7$, **ii)** $x \le -4$ ή $x = 0$ ή $x \ge 6$, **iii)** $-4 < x < -3$ ή $-3 < x < 4$.

100. **i)** $-2 \le x \le 2$, **ii)** $-2 < x < 0$ ή $2 < x < 4$, **iii)** $-8 < x < 0$ ή $0 < x < 8$.

101. **i)** $x < -4$ ή $0 < x < 2$ ή $x > 6$, **ii)** $x < -6$ ή $x > 4$, **iii)** $x \le -4$ ή $x = 0$ ή $x \ge 4$.

102. **i)** $-6 < x < 0$ ή $0 < x < 6$, **ii)** $-6 \le x \le -4$ ή $x = 0$ ή $4 \le x \le 6$, **iii)** $-6 < x < -4$ ή $-2 < x < 0$ ή $0 < x < 2$ ή $4 < x < 6$.

103. **i)** $x \le -6$ ή $-4 \le x \le -2$ ή $x = 0$ ή $2 \le x \le 4$ ή $x \ge 6$, **ii)** $x \le -20$ ή $x = -10$ ή $x = 0$ ή $x = 10$ ή $x \ge 20$.

104. **i)** $-2 \le x \le 2$, **ii)** $x \ne 0$, **iii)** $x < \frac{3}{8}$.

105. **i)** $x > 5$ ή $x < -5$, **ii)** $-2 < x < 2$. **iii)** $-3 < x < 3$.

106. **i)** $x \ge 2$ ή $x \le -2$, **ii)** $x > \sqrt{2}$ ή $x < -\sqrt{2}$, **iii)** $-1 < x < 1$.

107. **i)** $x > 2$ ή $x < -2$, **ii)** $-2 \le x \le 2$, **iii)** Αδύνατη, **iv)** Αληθεύει για κάθε x.

108. **i)** $x = 0$, **ii)** $-3 < x < 3$.

109. **i)** $x \le -2$ ή $x \ge 2$, **ii)** $-5 < x < 1$, **iii)** $x < -3$ ή $x > 3$.

110. **i)** $0 < x < 2$, **ii)** $-2 < x < 0$.

111. **i)** $x < -1$ ή $x > 1$, **ii)** $-7 \le x \le -1$ ή $1 \le x \le 7$, **iii)** $x < -11$ ή $-1 < x < 1$ ή $x > 11$.

112. **i)** $-1 < x < 1$, **ii)** $x > 4$ ή $x < -4$, **iii)** $-5 \le x \le 5$.

113. **i)** $x < 2$, **ii)** $x \le -1$, **iii)** $x < -1$.

114. $-4 < x < 4$.

115. $0 < x \ne 1$.

116. **i)** $-2 < x \ne -1$, **ii)** $-2 < x < -1$.

117. **i)** $-2 < x < 0$ ή $0 < x < 2$, **ii)** $-14 < x < -2$ ή $2 < x < 14$.

118. **i)** $-2 \ne x < -1$ ή $x > 5$, **ii)** $-2 < x < -1$ ή $-1 < x < 2$.

119. **i)** $-4 < x < -3$ ή $-3 < x < 6$. **ii)** $-5 < x < 1$ ή $1 < x < 3$.

120. **i)** $-5 < x < -2$ ή $-2 < x < 15$, **ii)** $-4 < x < -3$ ή $-3 < x < 4$.

121. **i)** $-5 < x < -3$ ή $-3 < x < 3$ ή $3 < x < 5$, **ii)** $-3 \ne x < -2$ ή $2 < x \ne 3$, **iii)** $-1 \ne x \le -\frac{1}{2}$ ή $\frac{1}{2} \le x \ne 1$.

122. **i)** $-5 < x < -4$ ή $-4 < x < 4$ ή $4 < x < 5$, **ii)** $-5 \ne x < -3$ ή $3 < x \ne 5$, **iii)** $-2 < x < 2$.

123. **i)** $x > 1$, **ii)** $x > 5$ ή $x < -5$, **iii)** $x \le 2$, **iv)** $x < 0$.

124. **i)** Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x > 3$

και $x < 3$. Τελικά προκύπτει $-6 \leq x < 3$.
ii) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x > -1$ και $x < -1$. Τελικά προκύπτει $-2 \neq x < -1$ ή $x > 0$.

125. **i)** $x < -2$ ή $x > 5$, **ii)** $x \geq 1$, **iii)** $-\frac{2}{3} < x < 7$. **iv)** $x \leq 9$.

126. $x < 1$.

127. **i)** $x < -\frac{3}{2}$, **ii)** Λόγω και του i) προκύπτει $x \geq -\frac{3}{2}$.

128. $-1 \leq x \leq 1$.

129. **i)** Ότι $x = 0$ και $y = 0$,
ii) Ότι $x \neq 0$ ή $y \neq 0$ (δηλαδή ότι ένας τουλάχιστον από τους x, y είναι μη μηδενικός).

130. Αληθεύουν για κάθε x.

131. **i)** $x = -5$ ή $x = 6$, **ii)** $x = -2$, **iii)** $x = -6$, $y = 2$.

132. **i)** $x = 8$, **ii)** $x = -1$, **iii)** $x \leq 0$ και ($y = 4$ ή $y = -4$), **iv)** $x = -3$ και $y \geq 0$.

133. **i)** $x \neq -2$, **ii)** $x \neq -5$, **iii)** $x \neq 3$, **iv)** $(x, y) \neq (-4, 8)$.

134. **i)** $x \neq -2$,
ii) $x \neq -3$ ή $y \neq 2$ [πράγμα που γράφεται και στη μορφή $(x, y) \neq (-3, 2)$].

135. **i)** $x \leq 0$ και $y \geq 0$, **ii)** $x > 0$ ή $y < 0$.

136. $x \neq -\frac{1}{2}$.

137. $x < -2$ ή $x > -\frac{7}{5}$

138. **i)** $3 < \beta < 5$, $2 < \alpha < 4$,
ii) $1 < \beta < 9$ και $\alpha > 1$,
iii) $-7 < \beta < -3$ και $\frac{8}{3} < \alpha < 8$,
iv) $-5 < \beta < -1$ και $\alpha < -2$.

139. **i)** $\alpha \leq 0$, **ii)** $\alpha < 0$, **iii)** $\alpha \leq 0$, **iv)** $\alpha < 0$.

140. **i)**
- Αν $\lambda \leq -5$, είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda > -5$, τότε $-\lambda - 2 < x < \lambda + 8$.

ii)
- Αν $\lambda < 3$, είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = 3$, τότε $x = -1$.
- Αν $\lambda > 3$, τότε $-\lambda + 2 \leq x \leq \lambda - 4$.

iii)
- Αν $\lambda < 2$, αληθεύει για κάθε x.
- Αν $\lambda = 2$, τότε $x \neq 5$.
- Αν $\lambda > 2$, τότε $x > \lambda + 3$ ή $x < -\lambda + 7$.

iv)
- Αν $\lambda \leq -2$, αληθεύει για κάθε x.
- Αν $\lambda > -2$, τότε $x \geq \lambda + 1$ ή $x \leq -\lambda - 3$.

141. **i)**
- Αν $\lambda \leq 2$, αδύνατη.
- Αν $\lambda > 2$, τότε $2 - \lambda < x < \lambda - 2$.

ii)
- Αν $\lambda < 2$, αδύνατη.
- Αν $\lambda = 2$, τότε $x = 0$ (μια λύση).
- Αν $\lambda > 2$, τότε $2 - \lambda \leq x \leq \lambda - 2$ (άπειρο πλήθος λύσεων).

iii)
- Αν $\lambda \leq 5$, τότε αληθεύει για κάθε x.
- Αν $\lambda > 5$, τότε $x \geq \lambda - 5$ ή $x \leq 5 - \lambda$.

iv)
- Αν $\lambda < 5$, τότε αληθεύει για κάθε x.
- Αν $\lambda = 5$, τότε $x \neq 0$.
- Αν $\lambda > 5$, τότε $x > \lambda - 5$ ή $x < 5 - \lambda$.

142. **Α.** **i)** Με άτοπο.
Β.
- $(|\alpha| - |\beta|)x < \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow (|\alpha| - |\beta|)x < |\alpha|^2 - |\beta|^2 \Leftrightarrow x > |\alpha| + |\beta|$
- $x_0 > |\alpha| + |\beta| > 0$

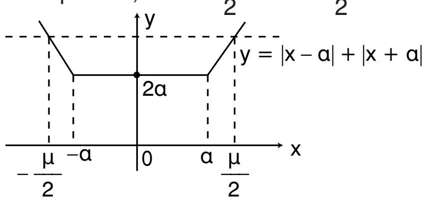
143. **i)** **α)**
- $2|\alpha| \leq 2|\alpha| + 3|\beta| < 6$. Αφού $2|\alpha| < 6$, θα είναι $|\alpha| < 3$.
- $3|\beta| \leq 2|\alpha| + 3|\beta| < 6$...

ii) **α)** $x < 4$, **β)** $x > 2$ ή $x < -2$.

144. **i)** **α)** $|\alpha| \leq |\alpha| + |\beta| < 1$.
Στα i) β) και ii) μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος και παραγοντοποιούμε [στο ii) α) προκύπτει $x > 1$ και στο **ii)** **β)** $-1 < x < 1$].

145. **i)** Αληθεύει για κάθε x, **ii)** Αληθεύει για κάθε x, **iii)** Αδύνατη, **iv)** $-1 \leq x \leq 1$, **v)** Αδύνατη, **vi)** $x < 1$ ή $x > 2$, **vii)** $x < -4$ ή $x > 2$, **viii)** $-2 \leq x \leq -1$, **ix)** $x < 3$ ή $x > 7$.

146.
- Αν $\mu \leq 2\alpha$, είναι αδύνατη.
- Αν $\mu > 2\alpha$, τότε $-\frac{\mu}{2} < x < \frac{\mu}{2}$.



147. Είναι αδύνατες.

148. **i)** $x \geq 3$, **ii)** $x \leq -4$, **iii)** $x < 1$, **iv)** $x \in \mathbb{R}$.

149. **i)** $x \leq 1$, **ii)** $x \geq 0$, **iii)** $x > 8$, **iv)** $x < -2$.