



Mickaël Launay

η μεγάλη
περιπέτεια των
μαθηματικών

ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΑ ΜΕΧΡΙ ΤΙΣ ΜΕΡΕΣ ΜΑΣ



ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ ΑΝΔΡΕΑΣ ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ

MICKAËL LAUNAY

Η ΜΕΓΑΛΗ ΠΕΡΙΠΕΤΕΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Από την προϊστορία μέχρι τις μέρες μας

ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ



Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως άνευ γραπτής αδείας του εκδότη η κατά οποιονδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Εκδόσεις Πατάκη – Θετικές Επιστήμες

Mickaël Launay, *Η μεγάλη περιπέτεια των μαθηματικών*

Τίτλος πρωτοτύπου: *Le grand roman des maths*

Μετάφραση: Ανδρέας Μιχαηλίδης

Υπεύθυνος έκδοσης: Κώστας Γιαννόπουλος

Διορθώσεις: Στέλλα Τσάλα

Σελιδοποίηση: Κωνσταντίνος Καπένης

Φιλμ, μοντάζ: Μαρία Ποινού-Ρένεση

Εικονογράφηση από τον συγγραφέα, εκτός από σελ. 15 (Maurice Bourlon),

σελ. 156, σελ. 290, σελ. 308 (Stefan Zachow)

Copyright© Flammarion, 2016

Copyright© για την ελληνική γλώσσα, Σ. Πατάκης Α.Ε.Ε.Δ.Ε.

(Εκδόσεις Πατάκη), 2016

Πρώτη έκδοση στα γαλλικά από τις εκδόσεις Flammarion,

Παρίσι, 2016

Πρώτη έκδοση στην ελληνική γλώσσα από τις Εκδόσεις Πατάκη,

Αθήνα, Δεκέμβριος 2019

Κ.Ε.Τ. Α811 Κ.Ε.Π. 746/19 ISBN 978-960-16-7589-3



ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,

ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 801.100.2665, 210.52.05.600, ΦΑΞ: 210.36.50.069

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078

ΥΠΟΚ/ΜΑ: ΚΟΡΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ - ΠΕΡΙΟΧΗ Β' ΚΤΕΟ), 57009 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ,

ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, 2310.75.51.75, ΦΑΞ: 2310.70.63.55

Web site: <http://www.patakis.gr> • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Μαθηματικοί παρά τη θέλησή τους	13
2. Και εγένετο... ο αριθμός	31
3. Μηδείς άγεωμέτρητος εισίτω	47
4. Η εποχή των θεωρημάτων	63
5. Περί μεθόδου	87
6. Στο π και φι	105
7. Τίποτα και πιο λίγο κι απ' το τίποτα	123
8. Η δύναμη των τριγώνων	139
9. Προς τον άγνωστο	161
10. Ακολουθεί...	175
11. Φανταστικοί κόσμοι	187
12. Μια γλώσσα για τα μαθηματικά	205
13. Το αλφάβητο του κόσμου	227
14. Το απειροστό	245
15. Μετρώντας το μέλλον	261
16. Η έλευση των μηχανών	283
17. Τα μαθηματικά αύριο	305
Επίλογος	327
Για να προχωρήσετε πιο πέρα	331
Βιβλιογραφία	337

—Α, ΚΑΛΑ. Εγώ ήμουν πάντα πάτος στα μαθηματικά!

Παραμένω μάλλον ασυγκίνητος. Θα είναι η δέκατη φορά που ακούω σήμερα την ίδια φράση.

Κι όμως, εδώ κι ένα τέταρτο της ώρας αυτή η κυρία έχει στηθεί μπροστά στον πάγκο μου, μαζί με άλλους περαστικούς, και με ακούει με προσοχή να παρουσιάζω διάφορες γεωμετρικές παραξενιές. Έτσι προέκυψε η δήλωση.

—Κι εκτός από αυτό τι άλλο κάνετε στη ζωή σας; με ρώτησε.

—Είμαι μαθηματικός.

—Α, καλά. Εγώ ήμουν πάντα πάτος στα μαθηματικά!

—Αλήθεια; Κι όμως, αυτά που λέω μοιάζουν να σας ενδιαφέρουν.

—Ναι... αλλά αυτά δεν είναι στ' αλήθεια μαθηματικά... είναι κατανοητά.

Όπα, αυτό δε μου το είχαν ξαναπεί. Συνεπώς τα μαθηματικά είναι εξ ορισμού ένας κλάδος τον οποίο δεν μπορεί κανείς να κατανοήσει;

*

Αρχές Αυγούστου, στον πεζόδρομο Φελίξ Φορ της λουτρόπολης Φλοτ αν Ρε,¹ σ' ένα μικρό καλοκαιρινό παζάρι. Στα δεξιά μου έχω έναν πάγκο για τατουάζ με χένα και αφρικανικές κοτσίδες, αριστερά μου έναν πωλητή αξεσουάρ για κινητά τηλέφωνα και απέναντί μου μια προθήκη με κοσμήματα και διαφόρων ειδών μπιγλιμπίδια. Ανάμεσα σ' όλα αυτά έστησα κι εγώ την προθήκη μου των μαθηματικών. Μέσα στη βραδινή δροσιά οι παραθεριστές σεργιανίζουν ειρηνικά. Μου αρέσει πολύ να κάνω μαθηματικά σε μέρη απρόσμενα, εκεί όπου οι άνθρωποι δεν το περιμένουν, εκεί όπου είναι λιγότερο δύσπιστοι...

—Όταν θα πω στους γονείς μου ότι έκανα μαθηματικά στις διακοπές! μου λέει ένας μαθητής λυκείου που περνά από μπροστά μου επιστρέφοντας από την πλαζ.

Είναι αλήθεια ότι λιγάκι τους ξεγελάω. Όμως έτσι πρέπει να γίνει. Είναι μία από τις στιγμές που προτιμώ: να βλέπω την έκφραση στα πρόσωπα των ανθρώπων που θεωρούσαν ότι είναι αθεράπευτα οργισμένοι με τα μαθηματικά, όταν τους ενημερώνω ότι εδώ και ένα τέταρτο ασχολούνται με τα μαθηματικά. Και ο χώρος μπροστά στον πάγκο μου δεν αδειάζει ποτέ! Παρουσιάζω οριγκάμι,² ταχυδακτυλουργικά, παιχνίδια, αινίγματα... έχω για όλες τις ηλικίες και όλα τα γούστα.

Μπορεί να διασκεδάζω, κατά βάθος όμως απελπίζομαι.

1. Γαλλική λουτρόπολη στις όχθες του Ατλαντικού. (Σ.τ.Μ.)

2. Γιαπωνέζικη τέχνη κατασκευής τρισδιάστατων μορφών από διπλωμένο χαρτί. (Σ.τ.Μ.)

Πώς φτάσαμε στο σημείο να πρέπει να κρύβουμε από τους ανθρώπους ότι κάνουν μαθηματικά για να μπορέσουν να τα απολαύσουν; Γιατί η λέξη «μαθηματικά» προκαλεί τρόμο; Δε χωρά αμφιβολία πως αν είχα αναρτήσει πάνω από το τραπέζι μου μια ταμπέλα που να γράφει «Μαθηματικά» εμφανώς και ευανάγνωστα, όπως στις ταμπέλες «Μπιζού και κολιέ», «Τηλέφωνα» ή «Τατουάζ» που έχουν αναρτήσει τα περίπτερα γύρω μου, δε θα είχα ούτε το ένα τέταρτο των θεατών που είχα τώρα. Οι περαστικοί δε θα σταματούσαν καν. Ίσως μάλιστα και να έκαναν ένα βήμα στο πλάι αποστρέφοντας το βλέμμα.

Κι όμως η περιέργεια υπάρχει. Το διαπιστώνω καθημερινά. Τα μαθηματικά φοβίζουν, αλλά μαγεύουν ακόμα περισσότερο. Δεν τα αγαπούν, αλλά θα ήθελαν να τα αγαπήσουν. Ή τουλάχιστον να είναι σε θέση να ρίξουν μια αδιάκριτη ματιά μέσα στα σκοτεινά τους μυστήρια. Τα θεωρούν απρόσιτα. Δεν είναι αλήθεια. Μπορεί κανείς να αγαπά τη μουσική χωρίς να είναι μουσικός ή να απολαμβάνει ένα καλό γεύμα χωρίς να είναι μεγάλος μάγειρας. Γιατί λοιπόν θα έπρεπε να είναι κανείς μαθηματικός ή να διαθέτει μια εξαιρετική ευφυΐα για να αφήσει να του αφηγηθούν τα μαθηματικά, για να του αρέσει να του γαργαλά το μυαλό η άλγεβρα ή η γεωμετρία; Δεν είναι απαραίτητο να μπει κανείς στις τεχνικές λεπτομέρειες για να κατανοήσει τις μεγάλες ιδέες και να μπορέσει να μαγευτεί.

Από την αυγή της ανθρώπινης ύπαρξης πολλοί καλλιτέχνες, δημιουργοί, εφευρέτες, τεχνίτες αλλά και απλοί ονειροπόλοι ή περίεργοι ασχολούνταν με τα μαθηματικά

χωρίς καν να το γνωρίζουν. Ήταν μαθηματικοί παρά τη θέλησή τους. Ήταν οι πρώτοι που έθεσαν ερωτήματα, οι πρώτοι ερευνητές, οι πρώτοι που ανακάτεψαν τα θολά νερά. Αν θέλουμε να κατανοήσουμε το γιατί των μαθηματικών, πρέπει να αναζητήσουμε τα ίχνη τους, γιατί μ' αυτούς άρχισαν όλα.

Είναι καιρός λοιπόν ν' αρχίσουμε το ταξίδι. Αν δεν έχετε αντίρρηση, επιτρέψτε μου, για όσο θα διαρκέσουν αυτές οι σελίδες, να σας παρασύρω μαζί μου στους μαιάνδρους μιας από τις πιο συναρπαστικές και εντυπωσιακές δραστηριότητες που άσκησε ποτέ το ανθρώπινο είδος. Πάμε να συναντήσουμε εκείνες και εκείνους που έγραψαν την ιστορία τους μέσα από απρόσμενες ανακαλύψεις και μυθικές εμπνεύσεις.

Ας ξεφυλλίσουμε μαζί το μεγάλο παραμύθι των μαθηματικών.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑ ΤΗ ΘΕΛΗΣΗ ΤΟΥΣ

ΕΠΙΣΤΡΕΦΟΥΜΕ στο Παρίσι. Αποφάσισα να ξεκινήσω την έρευνά μας από το Μουσείο του Λούβρου, στην καρδιά της πρωτεύουσας. Μαθηματικά στο Λούβρο; Ίσως ακούγεται ανάρμοστο. Η παλιά βασιλική κατοικία που έχει μετατραπεί σε μουσείο μοιάζει σήμερα να είναι η επικράτεια των ζωγράφων, των γλυπτών, των αρχαιολόγων ή των ιστορικών πολύ περισσότερο απ' ό,τι των μαθηματικών. Εκεί, ωστόσο, θα μπορέσουμε να εντοπίσουμε τα πρώτα τους ίχνη.

Με το που φτάνω η μεγάλη γυάλινη πυραμίδα στην αυλή του Ναπολέοντα αποτελεί ήδη μια πρώτη γεωμετρική πρόκληση. Σήμερα ωστόσο έχω ραντεβού μ' ένα πολύ πιο αρχαίο παρελθόν. Μπαίνω στο μουσείο και η μηχανή του χρόνου τίθεται σε κίνηση. Περνώ μπροστά από τους βασιλιάδες της Γαλλίας, ανηφορίζω προς τα πίσω, στην Αναγέννηση και στον Μεσαίωνα, και φτάνω στην αρχαιότητα. Οι αίθουσες παρελαύνουν από μπροστά μου, διασταυρώνομαι με ρωμαϊκά αγάλματα, ελληνικά αγγεία και αιγυπτιακές σαρκοφάγους. Πηγαίνω ακόμα πιο μακριά. Να με που χώθηκα στην προϊστορία και, καταρρυλώντας πίσω

στους αιώνες, πρέπει σταδιακά να τα ξεχάσω όλα. Να ξεχάσω τους αριθμούς. Να ξεχάσω τη γεωμετρία. Να ξεχάσω τη γραφή. Στην αρχή κανένας δεν ήξερε τίποτα. Ούτε καν ότι υπήρχε κάτι να μάθει.

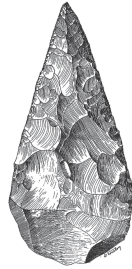
Πρώτος σταθμός η Μεσοποταμία. Φτάσαμε ήδη στα δέκα χιλιάδες χρόνια πίσω.

Αν το καλοσκεφτούμε, θα μπορούσα να είχα πάει ακόμα πιο πίσω. Να διασχίσω ακόμα ενάμισι εκατομμύριο χρόνια και να βρεθώ στην καρδιά της παλαιολιθικής εποχής. Εκείνο τον καιρό η φωτιά δεν είναι ακόμα υπό έλεγχο και ο Homo sapiens δεν είναι παρά ένα μακρινό σχέδιο της φύσης. Βρισκόμαστε στο βασίλειο του Homo erectus της Ασίας, του Homo ergaster της Αφρικής και, ενδεχομένως, κάποιων ακόμα εξαδέλφων τους που μένει να ανακαλυφθούν. Είναι η εποχή του σκαλίσματος της πέτρας. Ο δίδερος χειροπέλεκυς βρίσκεται στην ημερήσια διάταξη.

Σε μια γωνιά του καταυλισμού οι λιθοξόοι έχουν πιάσει δουλειά. Ένας από αυτούς κρατά ένα, ακατέργαστο ακόμα, κομμάτι από πυριτόλιθο που το μάζεψε πριν από λίγες ώρες. Κάθεται στο χώμα –κατά πάσα πιθανότητα οκλαδόν–, ακουμπά την πέτρα στο έδαφος, τη στηρίζει με το ένα χέρι και με το άλλο αρχίζει να την πελεκά στην άκρη με τη βοήθεια μιας άλλης βαριάς πέτρας. Το πρώτο θραύσμα αποσπάται. Ο τεχνίτης παρατηρεί το αποτέλεσμα, γυρίζει τον πυριτόλιθό του ανάποδα και αρχίζει να τον πελεκά από την άλλη. Τα δυο πρώτα θραύσματα που αποσπάστηκαν συμμετρικά με αυτό τον τρόπο άφησαν στην άκρη του πυριτόλιθου μια αιχμηρή ακμή. Ο τεχνίτης δεν

έχει παρά να επαναλάβει την ίδια διαδικασία γύρω γύρω. Σε κάποια σημεία ο πυριτόλιθος είναι πολύ χοντρός ή πολύ πλατύς και χρειάζεται να αφαιρεθούν μεγαλύτερα κομμάτια για να δημιουργηθεί η επιθυμητή μορφή.

Το σχήμα του χειροπέλεκου δεν αφήνεται στην τύχη ούτε είναι προϊόν στιγμιαίας έμπνευσης. Σχεδιάζεται, τροποποιείται, μεταβιβάζεται από τη μια γενιά στην επόμενη. Υπάρχουν διάφορα μοντέλα ανάλογα με την εποχή και τον τόπο κατασκευής. Ορισμένοι έχουν το σχήμα της σταγόνας του νερού, με μια αιχμηρή μύτη· άλλοι, πιο στρογγυλεμένοι, θυμίζουν αυγό, ενώ άλλοι προσεγγίζουν το σχήμα του ισοσκελούς τριγώνου με τις πλευρές ελάχιστα καμπυλωμένες.



Χειροπέλεκυς της κατώτερης παλαιολιθικής περιόδου.

Ωστόσο, όλοι οι χειροπέλεκεις έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: διαθέτουν άξονα συμμετρίας. Έχει, άραγε, κάποια πρακτική σημασία αυτή η γεωμετρική ιδιότητα ή οι πρόγονοί μας υιοθέτησαν αυτή τη μορφή για αισθητικούς λόγους; Δύσκολο να το μάθουμε. Το βέβαιο είναι ότι αυτή η συμμετρία αποκλείεται να οφείλεται στην τύχη. Ο λιθοξόος όφειλε να προσχεδιάζει τα χτυπήματά του. Να σκέφτεται

τη μορφή πριν τη δημιουργήσει. Να δημιουργεί μια νοητή αφηρημένη εικόνα του αντικειμένου που κατασκευάζει. Με άλλα λόγια, να κάνει μαθηματικά.

Αφού τελειώσει το σκάλισμα, ο λιθοξόος παρατηρεί το νέο του εργαλείο, το απομακρύνει από τα μάτια του για να το εξετάσει κάτω από το φως, ώστε να μελετήσει προσεκτικά το περίγραμμο, διορθώνει κάποιες ατέλειες με συμπληρωματικά χτυπήματα και, τέλος, το θαυμάζει ικανοποιημένος. Πώς να αισθάνεται εκείνη τη στιγμή; Άραγε νιώθει ήδη την υπερδιέγερση της επιστημονικής δημιουργίας; Την αίσθηση ότι κατάφερε μέσω μιας αφηρημένης σκέψης να σχεδιάσει και να τροποποιήσει κάτι στον εξωτερικό του κόσμο; Δεν έχει ιδιαίτερη σημασία, οι μεγάλες ώρες της αφαίρεσης δεν έχουν ακόμα σημάνει. Κυριαρχεί ο πραγματισμός. Ο χειροπέλεκυς θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να σκαλιστεί το ξύλο, να κοπεί το κρέας, να τρυπηθούν τα δέρματα ή να σκαφτεί η γη.

Όμως, όχι, δε θα πάμε τόσο μακριά. Ας αφήσουμε αυτούς τους πανάρχαιους καιρούς να κοιμούνται, ας εγκαταλείψουμε αυτές τις επισφαλείς ερμηνείες και ας επιστρέψουμε στο πραγματικό σημείο εκκίνησης της περιπέτειάς μας: την περιοχή της Μεσοποταμίας κατά την 8η χιλιετία π.Χ.

Κατά μήκος της εύφορης ημισελήνου, σε μια ζώνη που καλύπτει περίπου την περιοχή που κάποτε θα ονομασθεί Ιράκ, η νεολιθική επανάσταση βρίσκεται σε εξέλιξη. Εδώ και λίγο καιρό οι άνθρωποι έχουν αρχίσει να εγκαθίστα-

νται. Στα οροπέδια του Βορρά η μόνιμη εγκατάσταση έχει συντελεστεί με επιτυχία. Η περιοχή έχει μετατραπεί σε εργαστήριο όλων των τελευταίων επινοήσεων. Κατοικίες με τούβλα από άψητο χώμα σχηματίζουν τα πρώτα χωριά και οι πιο θαρραλέοι οικοδόμοι έχουν αρχίσει να προσθέτουν και έναν όροφο. Η γεωργία αποτελεί την τεχνολογία αιχμής. Οι ευνοϊκές κλιματολογικές συνθήκες επιτρέπουν την καλλιέργεια της γης χωρίς τεχνητή άρδευση. Ζώα και φυτά σταδιακά εξημερώνονται. Η αγγειοπλαστική ετοιμάζεται να κάνει την εμφάνισή της.

Ας μιλήσουμε λοιπόν για αγγειοπλαστική! Πράγματι, αν και πολλά τεκμήρια αυτής της εποχής έχουν εξαφανιστεί, οριστικά χαμένα μέσα στους μαιάνδρους του χρόνου, υπάρχουν άλλα που οι αρχαιολόγοι μαζεύουν κατά χιλιάδες: στάμνες, πιθάρια, κούπες, πιάτα, λεκάνες... Γύρω μου οι βιτρίνες είναι γεμάτες. Τα πρώτα αγγεία έχουν ηλικία πάνω από εννιά χιλιάδες χρόνια και, από αίθουσα σε αίθουσα, σαν τα χαλίκια του Κοντορεβιθούλη, μας οδηγούν διά μέσου των αιώνων. Αγγεία σε όλα τα μεγέθη και σχήματα, ποικίλα διακοσμημένα, σκαλισμένα, ζωγραφισμένα ή χαραγμένα. Μερικά έχουν πόδια, άλλα έχουν χερούλια. Άλλα άθικτα, άλλα ραγισμένα, σπασμένα ή ανακατασκευασμένα. Από κάποια δεν έχουν απομείνει παρά μόνο σκόρπια θραύσματα.

Η κεραμική είναι η πρώτη τέχνη της φωτιάς, πολύ πριν από την τέχνη του χαλκού, του σιδήρου ή του γυαλιού. Από τον άργιλο, αυτή την εύπλαστη ζύμη που υπάρχει σε αφθο-

νία σ' αυτές τις υγρές ζώνες, οι κεραμείς είναι σε θέση να κατασκευάσουν ό,τι αντικείμενο θέλουν. Όταν δώσουν στον πηλό το σχήμα που επιθυμούν, δεν έχουν παρά να τον αφήσουν λίγες μέρες να στεγνώσει κι ύστερα να τον ψήσουν σε δυνατή φωτιά για να στερεοποιηθεί. Αυτή η τεχνική είναι γνωστή εδώ και πολύ καιρό. Πριν από είκοσι χιλιάδες χρόνια οι άνθρωποι ήδη κατασκεύαζαν αγαλματίδια. Μόνο πρόσφατα όμως, την περίοδο της δημιουργίας των οικισμών, σκέφτηκαν να δημιουργήσουν αντικείμενα καθημερινής χρήσης. Ο νέος τρόπος ζωής απαιτεί μέσα αποθήκευσης, κι έτσι αρχίζει η μαζική παραγωγή αγγείων!

Αυτά τα δοχεία από ψημένο πηλό δεν άργησαν να επιβληθούν ως απαραίτητα αντικείμενα για την καθημερινή ρουτίνα, πολύτιμα για την οργάνωση της συλλογικής ζωής στο χωριό. Αφού λοιπόν πρέπει να κατασκευάζουμε πιατικά για μόνιμη χρήση, ας φροντίσουμε να είναι όμορφα. Έτσι σύντομα τα κεραμικά άρχισαν να διακοσμούνται. Κι εδώ δημιουργήθηκαν πολλές σχολές. Κάποιοι χαράζουν τα μοτίβα τους στον άργιλο όσο είναι ακόμα νωπός με τη βοήθεια ενός οστράκου ή ενός μικρού κλαδιού και στη συνέχεια ψήνουν το δοχείο. Άλλοι πρώτα το ψήνουν κι ύστερα χαράζουν τα διακοσμητικά μοτίβα τους χρησιμοποιώντας αιχμηρές πέτρες. Άλλοι πάλι προτιμούν να βάφουν τις επιφάνειες των αγγείων χρησιμοποιώντας φυσικά χρώματα.

Περιδιαβαίνοντας τις αίθουσες των αρχαιοτήτων της Ανατολής εντυπωσιάζομαι από τον πλούτο των γεωμετρικών μοτίβων που δημιούργησαν οι λαοί της Μεσοποταμίας με τη φαντασία τους. Όπως και με τους δίδεδρους χειροπε-

λέξεις των αρχαίων λιθοξόων, υπάρχουν κάποιες συμμετρικές υπερβολικά εξεζητημένες για να μην είναι σχεδιασμένες με περίσκεψη. Οι φρίζες που κοσμούν τα χείλη αυτών των δοχείων προκαλούν ιδιαίτερα την προσοχή μου.

Οι φρίζες, διακοσμητικές λωρίδες που απεικονίζουν το ίδιο μοτίβο, το οποίο επαναλαμβάνεται σε όλη την περιφέρεια του δοχείου. Ανάμεσα στις πιο συχνές είναι και αυτές που απεικονίζουν τρίγωνα με τη μορφή δοντιών προιονιού. Υπάρχουν επίσης φρίζες που παριστάνουν δύο κορδόνια τα οποία περιελίσσονται το ένα γύρω από το άλλο. Αλλά και φρίζες διακοσμημένες με στάχυα, με τετράγωνα σε σχήμα πολεμίστρας, με μυτερούς ρόμβους, με σκιασμένα τρίγωνα ή ομόκεντρους κύκλους...

Περνώντας από τη μια ζώνη, δηλαδή από τη μια εποχή, στην άλλη αρχίζουν να γίνονται εμφανείς οι μόδες. Κάποια μοτίβα είναι πολύ δημοφιλή. Επαναλαμβάνονται διαρκώς, μετασχηματίζονται, βελτιώνονται, εμφανίζονται σε πολλές παραλλαγές. Ύστερα, μερικούς αιώνες αργότερα, εγκαταλείπονται, γίνονται παλιομοδίτικα, αντικαθίστανται από άλλα, στο νέο πνεύμα των καιρών.

Τα βλέπω να παρελαύνουν μπροστά μου και το μάτι του μαθηματικού παίρνει φωτιά. Διακρίνω συμμετρίες, περιστροφές, μετατοπίσεις. Νοερά αρχίζω να ξεδιαλέγω, να ταξινομώ. Κάποια θεωρήματα από την εποχή των σπουδών μου επιστρέφουν στη μνήμη μου. Η ταξινόμηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι αυτό που χρειάζομαι. Βγάζω ένα σημειωματάριο κι ένα μολύβι και αρχίζω να σημειώνω.

Πρώτα απ' όλα έχουμε τις περιστροφές. Έχω μπροστά μου μια φρίζα με μοτίβα σε σχήμα S, αραδιασμένα το ένα πίσω από το άλλο. Γυρίζω το κεφάλι μου για να βεβαιωθώ. Ναι, είναι βέβαιο, το σχήμα παραμένει αμετάβλητο αν κάνω μισή περιστροφή: αν έπαιρνα το δοχείο και το αναποδογύριζα, η μορφή της φρίζας θα παρέμενε ακριβώς η ίδια.



Στη συνέχεια έχουμε τις συμμετρίες. Πολλών τύπων συμμετρίες. Σιγά σιγά συμπληρώνω τον κατάλόγό μου, έχει αρχίσει ήδη το κυνήγι του θησαυρού. Για κάθε γεωμετρικό μετασχηματισμό αναζητώ τη φρίζα που του αντιστοιχεί. Πηγαινοέρχομαι από τη μια αίθουσα στην άλλη, γυρίζω ξανά πίσω. Κάποια εκθέματα είναι κατεστραμμένα, πρέπει να ζαρώσω τα μάτια μου στην προσπάθεια να αποκαταστήσω νοερά τα μοτίβα που διέτρεχαν αυτό τον άργιλο εδώ και χιλιάδες χρόνια. Μόλις εντοπίσω κάποια φρίζα που βασίζεται σε καινούριο μετασχηματισμό την τσεκάρω. Εξετάζω τις ημερομηνίες, στην προσπάθεια να δημιουργήσω ένα χρονολόγιο εμφάνισής τους.

Πόσες πρέπει να βρω συνολικά; Με λίγη σκέψη καταφέρνω να θυμηθώ το περίφημο θεώρημα. Υπάρχουν συνολικά επτά κατηγορίες από φρίζες. Επτά ομάδες διαφορετικών γεωμετρικών μετασχηματισμών που μπορούν να τις

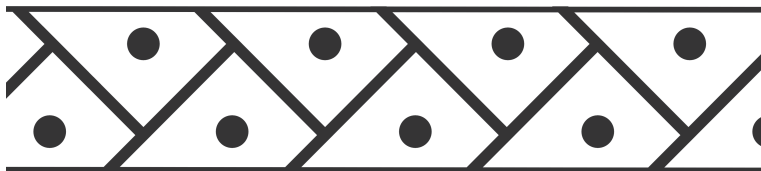
αφήσουν αμετάβλητες. Ούτε μία παραπάνω, ούτε μία παρακάτω.

Βέβαια, αυτό οι άνθρωποι εκείνης της εποχής δεν το γνώριζαν. Και δικαίως, η θεωρία στην οποία αναφερόμαστε δε θα αρχίσει να αναπτύσσεται πριν από την Αναγέννηση! Κι όμως, χωρίς να το υποπτεύονται, και χωρίς άλλο σκοπό πέρα από το να διακοσμήσουν τα αγγεία τους με αρμονικές, πρωτότυπες διακοσμήσεις, αυτοί οι προϊστορικοί αγγειοπλάστες είχαν αρχίσει να διαμορφώνουν τους πρώτους συλλογισμούς ενός φανταστικού κλάδου των μαθηματικών που έμελλε, μερικές χιλιάδες χρόνια αργότερα, να ενεργοποιήσει μεγάλο αριθμό ερευνητών.

Ρίχνω μια ματιά στις σημειώσεις μου· τις έχω σχεδόν όλες. Σχεδόν; Μία από τις επτά φρίζες εξακολουθεί να μου διαφεύγει. Το περίμενα, είναι σαφώς πιο περίπλοκη από τις άλλες. Αναζητώ μια φρίζα που αν την αναποδογυρίσουμε οριζοντίως θα έχει την ίδια μορφή, μετατοπισμένη όμως κατά το μισό μήκος του μοτίβου. Σήμερα ονομάζουμε αυτόν τον μετασχηματισμό «ολισθαίνουσα ανάκλαση». Πραγματική πρόκληση για τους Μεσοποτάμιους φίλους μας!

Όμως δεν έχω ακόμα διατρέξει όλες τις αίθουσες κι έτσι δε χάνω τις ελπίδες μου. Η αναζήτηση συνεχίζεται. Παρατηρώ και την παραμικρή λεπτομέρεια, και την παραμικρή ένδειξη. Οι υπόλοιπες έξι κατηγορίες, αυτές που έχω ήδη παρατηρήσει, επαναλαμβάνονται διαρκώς. Στο σημειωματάριό μου συνωστίζονται οι ημερομηνίες, τα σκίτσα κι ένα σωρό άλλες σημειώσεις. Παρ' όλα αυτά, ούτε το παραμικρό δείγμα της μυστηριώδους έβδομης φρίζας.

Ξαφνικά νιώθω ένα κύμα αδρεναλίνης να με διαπερνά ολόκληρο. Πίσω από μια βιτρίνα βλέπω ένα έκθεμα σε άθλια κατάσταση, ένα σκέτο θραύσμα. Όμως από πάνω μέχρι κάτω τέσσερις φρίζες –κομματάκια μόνο, αλλά ξεκάθαρα ορατές– τραβούν την προσοχή μου. Η τρίτη από πάνω αποτελείται από κάτι που μοιάζει με κομματάκια ορθογωνίων τοποθετημένων λοξά, συνδυασμένα σε μορφή σταχυού. Μισοκλείνω τα μάτια. Συγκεντρώνομαι, παρατηρώ με προσοχή κι ύστερα σχεδιάζω βιαστικά το μοτίβο στο σημειωματάριό μου, λες και φοβάμαι μη χαθεί από τα μάτια μου. Η γεωμετρία είναι αυτή που αναζητούσα. Πρόκειται ξεκάθαρα για ολισθαίνουσα ανάκλαση. Η έβδομη φρίζα αποκαλύφθηκε.



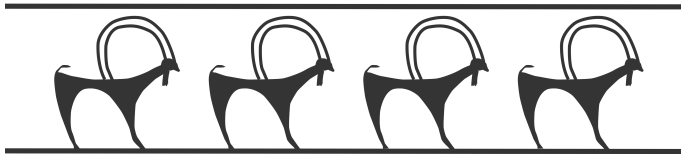
Δίπλα στο έκθεμα η καρτέλα γράφει: *Θραύσμα κυπέλλου με οριζόντια διακόσμηση σε λωρίδες και αιχμηρούς ρόμβους. Μέσα της 5ης χιλιετίας π.Χ.*

Τοποθετώ νοερά τη φρίζα στο χρονολόγιό μου. Μέσα της 5ης χιλιετίας π.Χ. Βρισκόμαστε ακόμη στην προϊστορία. Χίλια χρόνια πριν από την εφεύρεση της γραφής οι αγγειοπλάστες της Μεσοποταμίας είχαν ήδη καταγράψει, χωρίς να το γνωρίζουν, όλες τις περιπτώσεις ενός θεωρήματος που θα διατυπωνόταν και θα αποδεικνυόταν έξι χιλιάδες χρόνια αργότερα.

Μερικές αίθουσες πιο πέρα εντοπίζω μια λεκάνη με τρία χερούλια που εντάσσεται επίσης στην έβδομη κατηγορία: έστω και αν το μοτίβο μετασχηματίζεται σπειροειδώς, η γεωμετρική δομή παραμένει η ίδια. Λίγο πιο πέρα βρίσκω άλλη μία. Θέλω να συνεχίσω, αλλά ξαφνικά ο διάκοσμος αλλάζει: έχω φτάσει στο τέλος των συλλογών της Ανατολής. Παρακάτω εκτίθενται συλλογές από την Ελλάδα. Ρίχνω μια τελευταία ματιά στις σημειώσεις μου· οι φρίζες με ολισθαίνουσα ανάκλαση μετριούνται στα δάχτυλα του ενός χεριού. Παρά τριχα.

ΠΩΣ ΞΕΧΩΡΙΖΟΥΜΕ
ΤΙΣ 7 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΠΟ ΦΡΙΖΕΣ;

Η πρώτη κατηγορία είναι οι φρίζες που... δεν έχουν καμία ιδιαίτερη γεωμετρική ιδιότητα. Αποτελούνται από ένα απλό μοτίβο που επαναλαμβάνεται χωρίς συμμετρίες ή κέντρα περιστροφής. Αυτό ισχύει συνήθως στις φρίζες που δε βασίζονται σε γεωμετρικά σχήματα, αλλά σε ελεύθερα σχέδια, όπως, για παράδειγμα, σε σχέδια ζώων.



Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις φρίζες για τις οποίες η οριζόντια γραμμή που τις κόβει στα δύο είναι άξονας συμμετρίας.



Η τρίτη κατηγορία συγκεντρώνει τις φρίζες που διαθέτουν έναν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας. Αφού η φρίζα αποτελείται από ένα μοτίβο που επαναλαμβάνεται οριζόντια, οι κατακόρυφοι άξονες συμμετρίας επίσης επαναλαμβάνονται.

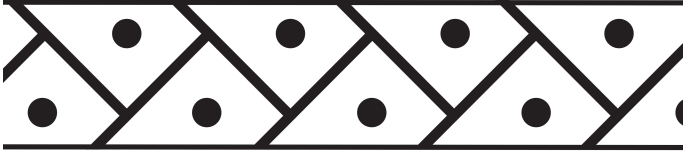


Η τέταρτη κατηγορία περιλαμβάνει τις φρίζες που παρμένουν αμετάβλητες σε μια περιστροφή ημικυκλίου (180°). Είτε κοιτάξετε αυτές τις φρίζες από πάνω είτε από κάτω θα δείτε το ίδιο πράγμα.

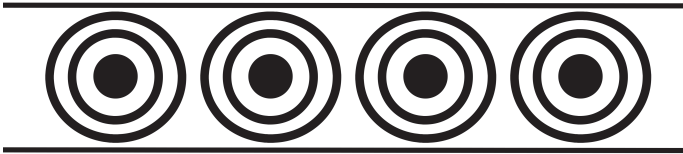


Η πέμπτη κατηγορία είναι αυτή της ολισθαίνουσας ανάκλασης. Πρόκειται γι' αυτή την περίφημη κατηγορία που ανακάλυψα τελευταία στα ευρήματα της Μεσοποταμίας. Αν εφαρμόσετε σε μια τέτοια φρίζα συμμετρία οριζόντιου

άξονα (όπως κάνατε και στη φρίζα της δεύτερης κατηγορίας), τότε θα προκύψει η ίδια φρίζα, μετατοπισμένη όμως κατά το μήκος του μισού βασικού μοτίβου.



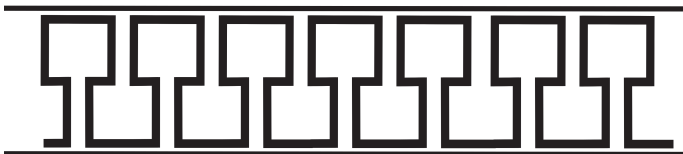
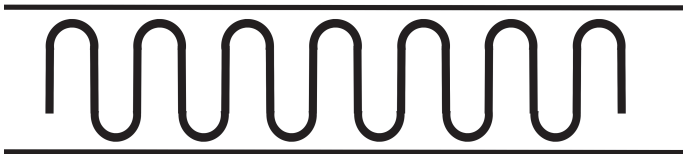
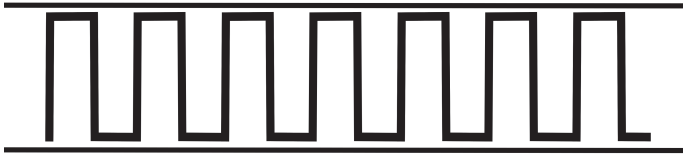
Η έκτη και η έβδομη κατηγορία δεν αντιστοιχούν σε καινούριους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, συνδυάζουν όμως περισσότερες από μία ιδιότητες σαν αυτές που παρατηρήσαμε στις προηγούμενες κατηγορίες. Έτσι, οι φρίζες της έκτης κατηγορίας είναι αυτές που διαθέτουν συγχρόνως οριζόντια και κατακόρυφη συμμετρία και περιστροφική συμμετρία 180° .



Όσο για την έβδομη κατηγορία, οι φρίζες της διαθέτουν κατακόρυφη συμμετρία, κέντρο περιστροφής και ολισθαίνουσα ανάκλαση.



Ας επισημάνουμε ότι αυτές οι κατηγορίες δεν αφορούν παρά μόνο τη γεωμετρική δομή και δεν απαγορεύουν στις φρίζες να διαθέτουν μια ποικιλία από μορφές και μοτίβα. Έτσι, οι φρίζες που ακολουθούν, αν και είναι διαφορετικές, ανήκουν όλες στην έβδομη κατηγορία.



Όποια φρίζα και αν φανταστούμε, θα ανήκει σε μία από τις παραπάνω επτά κατηγορίες. Οποιοσδήποτε άλλος γεωμετρικός συνδυασμός είναι γεωμετρικά αδύνατος. Περιέργως, οι δύο τελευταίες κατηγορίες είναι οι πιο συνηθισμένες. Αυθόρμητα είναι πιο εύκολο να σχεδιά-

σει κανείς σχήματα με πολλές συμμετρίες παρά σχήματα με λίγες ή καθόλου.

Φουσκωμένος σαν διάνος από τις μεσοποτάμιες επιτυχίες μου, επανέρχομαι την επομένη έτοιμος να κάνω έφοδο στην αρχαία Ελλάδα. Με το που έφτασα, δεν ήξερα πού να πρωτοκοιτάξω. Εδώ το κυνήγι της φρίζας είναι παιχνίδι για μικρά παιδιά. Αρκούν μερικά βήματα, μερικές βιτρίνες, λίγοι αμφορείς μαύροι με κόκκινες παραστάσεις για να βρω ξανά τη λίστα μου με τις επτά φρίζες.

Μπροστά σε τόση αφθονία γρήγορα παραιτούμαι από την ιδέα να τηρήσω στατιστικά δεδομένα όπως είχα κάνει στη Μεσοποταμία. Η δημιουργικότητα των καλλιτεχνών με αφήνει άναυδο. Νέα μοτίβα, όλο και πιο ιδιοφυή και περίπλοκα, κάνουν την εμφάνισή τους. Χρειάζεται να σταματήσω επανειλημμένως και να συγκεντρωθώ για να ξεμπλέξω νοερά αυτά τα περίπλοκα συμπλέγματα που διαδέχονται το ένα το άλλο στριφογυρίζοντας γύρω μου.

Στην άκρη μιας αίθουσας μια ερυθρόμορφη λουτροφόρος με αφήνει άφωνο.

Η λουτροφόρος είναι ένα μακρύ δοχείο με δυο χερούλια που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά του νερού για το λουτρό· τούτη εδώ έχει ύψος κοντά στο ένα μέτρο. Οι φρίζες συνωστίζονται, αρχίζω να τις ταξινομώ ανά κατηγορία. Μία. Δύο. Τρεις. Τέσσερις. Πέντε. Μέσα σε μερικά δευτερόλεπτα εντοπίζω πέντε από τις επτά γεωμετρικές δομές. Το αγγείο βρίσκεται με την πλάτη στον τοίχο, σκύβοντας όμως καταφέρνω να διαπιστώσω ότι μια έκτη κα-

τηγορία βρίσκεται στην πλευρά που δε φαίνεται. Μου λείπει μόνο μία. Θα ήταν πολύ ωραίο. Περιέργως, η κατηγορία που λείπει δεν είναι η ίδια με χθες. Οι καιροί έχουν αλλάξει, το ίδιο και οι μόδες, κι έτσι δεν είναι η ολισθαίνουσα ανάκλαση που λείπει, αλλά ο συνδυασμός κατακόρυφης συμμετρίας, περιστροφής και ολισθαίνουσας ανάκλασης.

Την αναζητώ μανιωδώς, εξετάζω και την τελευταία γωνιά του αντικειμένου. Δεν τη βρίσκω. Κάπως απογοητευμένος ετοιμάζομαι να τα παρατήσω, όταν το βλέμμα μου πέφτει πάνω σε μια λεπτομέρεια. Στο κέντρο του αγγείου υπάρχει μια σκηνή με δύο άτομα. Με την πρώτη ματιά δε φαίνεται να υπάρχει φρίζα εκεί γύρω. Ωστόσο, δεξιά στο κάτω μέρος της παράστασης υπάρχει ένα αντικείμενο που τραβά την προσοχή μου: ένα αγγείο, πάνω στο οποίο ακουμπά το κεντρικό πρόσωπο. Ένα αγγείο ζωγραφισμένο πάνω σ' ένα αγγείο! Αυτό από μόνο του με κάνει να χαμογελάσω. Μισοκλείνω τα μάτια, η εικόνα είναι αρκετά καταστραμμένη, όμως δε χωρά αμφιβολία: αυτό το ζωγραφισμένο αγγείο έχει επίσης μια φρίζα. Και –ω του θαύματος– είναι αυτή που λείπει!

Παρά τις επανειλημμένες μου προσπάθειες δε βρήκα κανένα άλλο αντικείμενο που να έχει αυτή την ιδιομορφία. Αυτή η λουτροφόρος μοιάζει να είναι μοναδική στο είδος της στις συλλογές του Λούβρου. Είναι η μόνη που έχει φρίζες και από τις επτά κατηγορίες.

Λίγο πιο πέρα με περιμένει άλλη έκπληξη: τρισδιάστατες φρίζες! Κι εγώ που νόμιζα ότι η προοπτική ήταν μια επινόηση της Αναγέννησης. Σκοτεινές και φωτεινές ζώνες,

κατάλληλα τοποθετημένες από τον καλλιτέχνη, δημιουργούν ένα παιχνίδισμα σκιάς και φωτός που δίνει την αίσθηση του όγκου στα γεωμετρικά μοτίβα που διαδέχονται το ένα το άλλο πάνω στην περιφέρεια του γιγάντιου δοχείου.

Όσο προχωρώ νέα ερωτήματα προκύπτουν. Κάποια αγγεία δεν είναι καλυμμένα με φρίξες αλλά με πλακοστρώσεις. Με άλλα λόγια, τα γεωμετρικά μοτίβα δεν αρκούνται να γεμίζουν μια λεπτή λωρίδα που περιβάλλει το αγγείο, αλλά καλύπτουν ολόκληρη την επιφάνειά του, πολλαπλασιάζοντας έτσι τις δυνατότητες γεωμετρικών συνδυασμών.

Μετά τους Έλληνες ακολουθούν οι Αιγύπτιοι, οι Ετρούσκοι και οι Ρωμαίοι. Ανακαλύπτω οπτικές πλάνες με δαντέλες σκαλισμένες πάνω στον βράχο. Τα τμήματα της πέτρας συμπλέκονται, περνάνε διαδοχικά το ένα πάνω από το άλλο, δημιουργώντας ένα απολύτως κανονικό πλέγμα. Κι ύστερα, λες και δε μου έφταναν τα εκθέματα, συλλαμβάνω τον εαυτό μου να παρατηρεί το ίδιο το Λούβρο. Τα ταβάνια του, τα πατώματά του, οι πόρτες με τα πλαίσιά τους. Γυρίζοντας στο σπίτι έχω την εντύπωση ότι δεν μπορώ πια να σταματήσω. Στον δρόμο κοιτάζω τα μπαλκόνια των πολυκατοικιών, τα μοτίβα στα ρούχα των περαστικών, τους τοίχους, τους διαδρόμους του μετρό...

Αρκεί να αλλάξει κανείς τον τρόπο με τον οποίο κοιτάζει τον κόσμο για να δει τα μαθηματικά να εμφανίζονται. Η αναζήτησή τους είναι συναρπαστική και χωρίς τέλος.

Και η περιπέτεια μόλις τώρα αρχίζει.