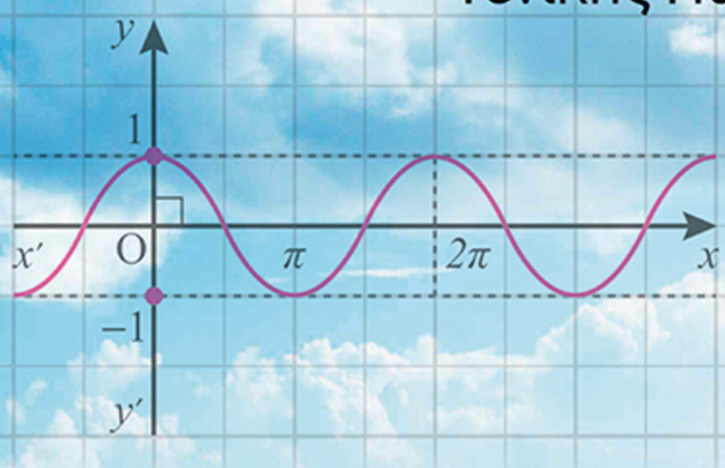
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΠΑΤΑΚΗΣ

Θανάσης Τσιούμας

Άλγεβρα

Α΄ Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr
ΒΙΒΛΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Θ. ΤΣΙΟΥΜΑΣ

Άλγεβρα

Α΄ Γενικού Λυκείου

Γενικής παιδείας

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Θέση υπογραφής δικαιούχου/ων δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας,
εφόσον η υπογραφή προβλέπεται από τη σύμβαση.

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής αδείας του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Εκδόσεις Πατάκη – Βιβλία για την εκπαίδευση / Μαθηματικά Λυκείου
Θανάσης Τσιούμας, *Άλγεβρα Α΄ Γενικού Λυκείου Γενικής παιδείας*
Υπεύθυνος έκδοσης: Νίκος Κύρος
Διορθώσεις: Μάγδα Τικοπούλου
Σελιδοποίηση: Γιώργος Χατζησπύρος
Copyright© Σ. Πατάκης Α.Ε.Ε.Δ.Ε. (Εκδόσεις Πατάκη), Θανάσης Τσιούμας, 2019
Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Φεβρουάριος 2019
Κ.Ε.Τ. Β544 – Κ.Ε.Π. 3/19
ISBN 978-960-16-5907-7

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665 - FAX: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ: ΝΕΑ ΜΟΝΑΣΤΗΡΙΟΥ 122, 563 34 ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ,
ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15 - FAX: 2310.70.63.55
Web site: http://www.patakis.gr • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

Στη γυναίκα μου
Αρετή

Στον γιο μου
Βαγγέλη

Περιεχομενα

Προλογος

Η καλή γνώση της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου είναι προαπαιτούμενο για μια σημαντική πορεία στις επόμενες τάξεις του λυκείου.
Το βιβλίο αυτό είναι δομημένο με βάση το σχολικό βιβλίο και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα και περιέχει:

- Συνοπτική θεωρία και εφαρμογές της
- Μεθοδολογία, σχόλια και παρατηρήσεις για τη λύση ασκήσεων
- Λυμένες ασκήσεις, ως υπόδειγμα τρόπου λύσεων
- Ερωτήσεις κατανόησης για αυτοαξιολόγηση του μαθητή
- Ασκήσεις για λύση και επιλεγμένες ασκήσεις από την **Τράπεζα Θεμάτων** και τους διαγωνισμούς ΘΑΛΗ της ΕΜΕ
- Κριτήρια αξιολόγησης ανά ενότητα και διαγωνίσματα στο τέλος κάθε κεφαλαίου, αλλά και ενδιάμεσα σε βασικές ενότητες
- Επαναληπτικά θέματα και επαναληπτικά διαγωνίσματα σε όλη την ύλη

Στο τέλος του βιβλίου υπάρχουν οι απαντήσεις και οι υποδείξεις όλων των ασκήσεων για λύση, των ερωτήσεων κατανόησης και όλων των διαγωνισμάτων.
Επίσης υπάρχουν **αναλυτικές λύσεις** των ασκήσεων του **σχολικού βιβλίου**.

Θανάσης Τσιούμας
Μαθηματικός

Θανάσης Τσιούμας
Άνδρου 2Α και Υμηττού, 166 72, Βάρη Αττικής
Τηλ.: 210 9653459 και 6977219223

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Εισαγωγικές έννοιες

1. Το λεξιλόγιο της λογικής

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Πρόταση ή ισχυρισμός

Πρόταση στα Μαθηματικά ή ισχυρισμός ονομάζεται κάθε έκφραση η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί **αποκλειστικά** ως αληθής (Α) ή ψευδής (Ψ).
Για παράδειγμα:

- Ο αριθμός 12 είναι άρτιος → Αληθής πρόταση
- Η Γη είναι επίπεδη → Ψευδής πρόταση
- Αύριο μπορεί να βρέχει → Δεν είναι πρόταση ή ισχυρισμός για τα Μαθηματικά

Συνεπαγωγή

Αν ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός «$\alpha\gamma = \beta\gamma$» θα είναι αληθής.
Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός «$\alpha = \beta$» **συνεπάγεται** τον ισχυρισμό «$\alpha\gamma = \beta\gamma$» και γράφουμε:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$$

Γενικά:

> Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P (υπόθεση), να αληθεύει και ο Q (συμπέρασμα), τότε λέμε ότι ο **P συνεπάγεται τον Q** και γράφουμε $P \Rightarrow Q$.

Για παράδειγμα: $7 > 2$ και $2 > 1 \Rightarrow 7 > 1$.

Ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Για τη συνεπαγωγή $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$ δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha\gamma = \beta\gamma \Rightarrow \alpha = \beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, αφού για παράδειγμα είναι $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$, ενώ $2 \neq 3$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Το παραπάνω το λέμε **αντιπαράδειγμα**. Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν αληθεύει πάντοτε, αρκεί να δείξουμε ότι δεν αληθεύει σε μία ειδική περίπτωση.

Αν όμως υποθέσουμε ότι είναι $\gamma \neq 0$, τότε ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή, δηλαδή $\alpha\gamma = \beta\gamma \Rightarrow \alpha = \beta$.
Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι **ισοδύναμοι** και γράφουμε:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma, \text{ με } \gamma \neq 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P, να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q, να αληθεύει και ο P, τότε λέμε ότι ο P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως ή αλλιώς ότι ο P είναι ισοδύναμος με τον Q και γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$.

Για παράδειγμα: $x > 5 \Leftrightarrow 3x > 15$.

Άρνηση μιας πρότασης

Έστω μία πρόταση P. Ονομάζουμε άρνηση της P μία πρόταση P΄ που είναι αληθής (Α) όταν η P είναι ψευδής (Ψ) και αντιστρόφως.
Για παράδειγμα:
P: «2 < 5» Α
P΄: «$2 \geq 5$» Ψ

Σημειωση

Απόδειξη μιας πρότασης είναι μία σειρά ορθών συλλογισμών με τους οποίους διαπιστώνουμε την αλήθεια της πρότασης.
Απόδειξη απαιτείται στα θεωρήματα και τα πορίσματα και όχι στα αξιώματα (που είναι προτάσεις που δεχόμαστε ότι αληθεύουν χωρίς να μπορούν να αποδειχθούν).
Για παράδειγμα η πρόταση «για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha + \beta = \beta + \alpha$» αποτελεί αξίωμα της Άλγεβρας.
Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι απόδειξης, ορισμένες από τις οποίες θα δούμε παρακάτω, όπως η ευθεία απόδειξη, η μέθοδος με ισοδυναμίες, η απαγωγή σε άτοπο και η μέθοδος με αντιπαράδειγμα, που είδαμε παραπάνω.

Ο σύνδεσμος «ή» (διάζευξη)

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία:

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P ή Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που **ένας τουλάχιστον** από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός «P ή Q» λέγεται διάζευξη των P και Q.
Για παράδειγμα η εξίσωση:

$$(x^2-2x)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \text{ ή } x^2-4=0$$

Παρατηρηση

- Για x = 2 αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις.
- Για x = 0 αληθεύει μόνο η πρώτη και για x = –2 αληθεύει μόνο η δεύτερη.

Ο σύνδεσμος «και» (σύζευξη)

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P και Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που **και οι δύο** ισχυρισμοί αληθεύουν.

Για παράδειγμα ο ισχυρισμός $x^2-x=0$ και $x^2-1=0$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για x = 1.

Ερωτησεις Κατανοησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ (Σ) Ή ΛΑΘΟΣ (Λ)

Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) ή το Λανθασμένο (Λ) των παρακάτω ισχυρισμών:

(Ο ισχυρισμός είναι Σωστός αν είναι αληθής για όλους τους α, β, x και y. Διαφορετικά είναι Λάθος.)

1.1. $\alpha=2 \Rightarrow \alpha^2=4$. Σ Λ

1.2. $\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=1$. Σ Λ

1.3. $\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 0$. Σ Λ

1.4. $x^2=3x \Rightarrow x=3$. Σ Λ

1.5. $x>1 \Rightarrow x^2>1$. Σ Λ

1.6. $x<1 \Rightarrow x^2<1$. Σ Λ

1.7. $x^2<1 \Rightarrow x<1$. Σ Λ

1.8. $x<1$ και $y<1 \Rightarrow xy<1$. Σ Λ

1.9. $x<-2$ και $y<-3 \Rightarrow xy>6$. Σ Λ

1.10. $\alpha^2>9 \Rightarrow \alpha>3$. Σ Λ

1.11. $0<\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha^2<1$. **Σ Λ**

1.12. $\alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$ ή $\alpha=-2$. **Σ Λ**

1.13. $x(x-1)=0$ και $x(x-3)=0 \Rightarrow x=0$. **Σ Λ**

1.14. $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2$. **Σ Λ**

1.15. $(\alpha-2)(\alpha-3)\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 2$ ή $\alpha\neq 3$. **Σ Λ**

1.16. $\alpha\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$. **Σ Λ**

1.17. $x^3=x \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$ ή $x=1$. **Σ Λ**

1.18. $x^3+x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$. **Σ Λ**

1.19. $0<\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^2<\beta^2$. **Σ Λ**

1.20. $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$. **Σ Λ**

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ο αριθμός των ερωτήσεων κατανόησης τύπου Σωστό ή Λάθος σχεδόν σε όλες τις ενότητες του παρόντος βιβλίου είναι 20, επομένως κάθε μαθητής μπορεί να κάνει αυτοαξιολόγηση ελέγχοντας τις απαντήσεις στο τέλος του βιβλίου.

2. Σύνολα

Συνοπτικη Θεωρια

Ορισμός

Σύνολο κατά Cantor είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι **καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο**.

Συμβολισμοί

Το σύνολο συμβολίζεται με ένα από τα κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτου, δηλαδή Α, Β, Γ, Δ,...

Τα στοιχεία ενός συνόλου συμβολίζονται με τα μικρά γράμματα α, β, γ, δ,... ή με αριθμούς. Αν, π.χ., το x είναι στοιχείο του συνόλου Α, γράφουμε $\mathbf{x \in A}$ (διαβάζουμε: **το x ανήκει στο Α**). Αν όμως το x δεν είναι στοιχείο του Α, τότε γράφουμε $\mathbf{x \notin A}$ και διαβάζουμε: **το x δεν ανήκει στο Α**.

Το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομάζεται **κενό** σύνολο και συμβολίζεται με $\varnothing$.

Παράσταση συνόλου

Ένα σύνολο παριστάνεται:

- Με **αναγραφή** των στοιχείων του.

  Γράφουμε όλα τα στοιχεία του μεταξύ δύο αγκίστρων, π.χ.:

  α) Το σύνολο των φωνηέντων γράφεται: $A = \{α, ε, η, ι, ο, υ, ω\}$.

  β) Το σύνολο των ψηφίων του αριθμού 1031103 γράφεται: $B = \{1, 0, 3\}$.

  γ) Το σύνολο των δυνατών υπολοίπων της διαίρεσης ενός οποιουδήποτε φυσικού αριθμού κ με το 6 γράφεται: $Γ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

  δ) Το σύνολο των πρώτων φυσικών αριθμών γράφεται: $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$.

  (**Πρώτος** ονομάζεται ο φυσικός αριθμός $ν > 1$ που έχει ως διαιρέτες τον εαυτό του και το 1.)

- Με **περιγραφή** χαρακτηριστικής ιδιότητας των στοιχείων του, π.χ.:
  α) Το σύνολο των γραμμάτων της αλφαβήτου γράφεται:
  $A = \{x | x$ γράμμα της αλφαβήτου$\}$.
  β) Το σύνολο των ακεραίων που είναι μεταξύ 10 και 101 γράφεται:
  $B = \{x \in \mathbb{Z} | 10 < x < 101\}$ (με $\mathbb{Z}$ συμβολίζονται οι ακέραιοι).
  γ) Το σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ μπορούμε να το γράψουμε με περιγραφή ως εξής: $A = \{x | x$ θετικός ακέραιος διαιρέτης του $12\}$.

Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα Α και Β λέγονται **ίσα** όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και γράφουμε: $A = B$, π.χ. $A = \{x | x$ θετικός ακέραιος μικρότερος του $5\}$, $B = \{x | x$ λύση της εξίσωσης $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0\}$.
Τα σύνολα Α, Β θα είναι ίσα όταν ισχύει η ισοδυναμία:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Υποσύνολα συνόλου

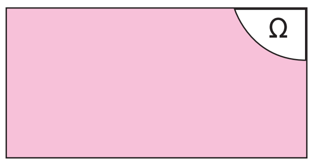
Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** του συνόλου Β όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β. Γράφουμε: $A \subseteq B$, δηλαδή, αν $x \in A$, τότε $x \in B$.
Άμεσα προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

- $A \subseteq A$ (αντιμεταθετική).
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική).
- Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$ (αντισυμμετρική).

Δεχόμαστε ότι το κενό είναι υποσύνολο κάθε συνόλου, δηλαδή $\varnothing \subseteq A$.

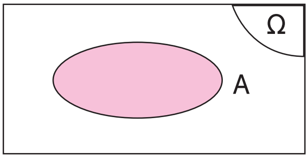
Διαγράμματα Venn

Τα σύνολα τα θεωρούμε υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω, που το λέμε σύνολο αναφοράς και συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου (Σχήμα 1).

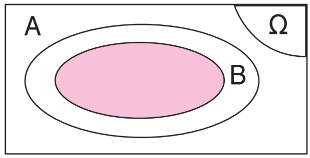


Σχήμα 1

Το υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης γραμμής $A \subseteq \Omega$ (Σχήμα 2).
Εάν $B \subseteq A$, τότε έχουμε το Σχήμα 3.



Σχήμα 2

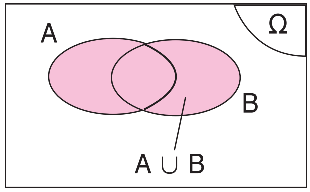


Σχήμα 3

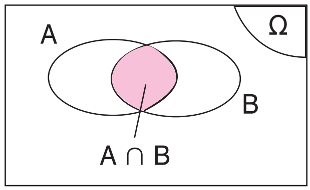
Πράξεις με σύνολα

Έστω Α, Β δύο υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω, τότε:

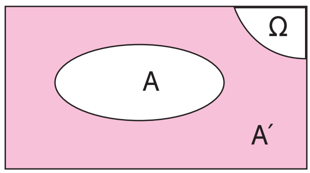
- **Ένωση $A \cup B$** δύο συνόλων λέμε το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα, δηλαδή:
  $A \cup B = \{x | x \in A$ ή $x \in B\}$, π.χ.:
  Αν $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, τότε:
  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



- **Τομή $A \cap B$** δύο συνόλων λέμε το σύνολο των στοιχείων του Ω που περιέχει τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων, δηλαδή:
  $A \cap B = \{x | x \in A$ και $x \in B\}$, π.χ.:
  Αν $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 6, 7\}$,
  τότε $A \cap B = \{3, 7\}$.

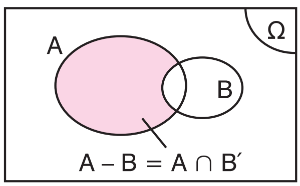


- **Συμπλήρωμα A'** ενός συνόλου Α ($A \subseteq \Omega$) λέμε το σύνολο που περιέχει τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α, π.χ.:
  Αν $\Omega = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$ και
  $A = \{\varepsilon, o\}$, τότε $A' = \{\alpha, \eta, \iota, \upsilon, \omega\}$.



  Είναι: $\Omega' = \varnothing$, $\varnothing' = \Omega$, $A \cap A' = \varnothing$ και $A \cup A' = \Omega$, $(A')' = A$.

- **Διαφορά $A - B$** δύο συνόλων λέμε το σύνολο των στοιχείων του Ω που περιέχει τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν στο Β, δηλαδή:
  $A - B = \{x | x \in A$ και $x \notin B\}$, π.χ.
  Αν $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, τότε:
  $A - B = \{1, 5, 7\}$
  Ισχύουν $A - B = A \cap B'$ και $A' - B' = A' \cap B =$
  $= B \cap A' = B - A$.



Ιδιότητες ένωσης – τομής

Ένωση	Τομή
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$	$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$
$A \subseteq A \cup B$	$A \cap B \subseteq A$

Επίσης, έχουμε τις εξής ιδιότητες:

- $\mathbf{A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)}$ [επιμεριστική της τομής ως προς την ένωση]
- $\mathbf{A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)}$ [επιμεριστική της ένωσης ως προς την τομή]

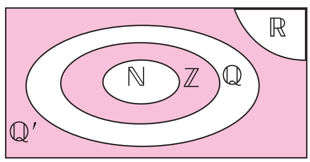
Απόδειξη της ιδιότητας $\mathbf{A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)}$

Έστω $x \in A \cap (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow [x \in A$ και $x \in (B \cup \Gamma)] \Leftrightarrow$
$[x \in A$ και $(x \in B$ ή $x \in \Gamma)] \Leftrightarrow [x \in A$ και $x \in B)$ ή $(x \in A$ και $x \in \Gamma)] \Leftrightarrow$
$x \in (A \cap B)$ ή $x \in (A \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$. Επομένως:
$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Τα σύνολα των αριθμών

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$ **φυσικοί** αριθμοί, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3,...\}$.
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2,...\}$ **ακέραιοι** αριθμοί, $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3,...\}$.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\mu}{\nu} \middle| \mu \in \mathbb{Z} \text{ και } \nu \in \mathbb{Z}^* \right\}$ **ρητοί** αριθμοί.

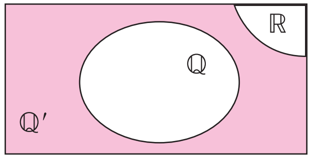
  Το $\mathbb{Q}$ δεν μπορεί να παρασταθεί με αναγραφή των στοιχείων του, αφού για παράδειγμα δεν μπορούμε να απαντήσουμε ποιος είναι ο επόμενος του ρητού αριθμού 3.
- $\mathbb{Q}' = \{x | x \text{ άρρητος}\}$ **άρρητοι** αριθμοί,
  π.χ.: $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $\sqrt{3} = 1{,}7321...$, δηλαδή στη δεκαδική τους μορφή είναι μη περιοδικοί, άρα δεν είναι ρητοί.



- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ **πραγματικοί** αριθμοί.
  Προφανώς ισχύει: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Παρατηρηση

Ο ισχυρισμός ότι ρητός είναι ο αριθμός που γράφεται σε μορφή κλάσματος είναι λανθασμένος, αφού για παράδειγμα ο αριθμός $\frac{\sqrt{2}}{3}$ δεν είναι ρητός.



Το σωστό είναι ότι ρητός είναι ο αριθμός που γράφεται σε μορφή κλάσματος με ακέραιους όρους και παρονομαστή διάφορο του μηδενός.

Λυμενες Ασκησεις

2.1. Να βρείτε τα στοιχεία του συνόλου $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -4\}$.

Λύση

Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2 = -4$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, άρα $A = \varnothing$ ή $\{\ \}$.

2.2. Δίνονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-3) = 0\}$. Να εξετάσετε αν $B \subseteq A$.

Λύση

Οι λύσεις της εξίσωσης $(x-1)(x-3) = 0$ είναι οι αριθμοί 1 και 3, άρα $B = \{1, 3\}$, επομένως $B \subseteq A$.

2.3. Α. Να γραφούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α) $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x^3 + 5x = 0\}$

β) $B = \{x \in \mathbb{Z} | -1 < x \leq 2\}$

γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} | -5 < 3x + 2 < 5\}$

δ) $\Delta = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}^*, \text{ και } 2x + y = 3\}$

Β. Να γραφούν με περιγραφή της χαρακτηριστικής τους ιδιότητας τα σύνολα:

α) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ β) $B = \{1, 2, 4, 8\}$

γ) $\Delta = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

Λύση

Α. Έχουμε:

α) $A = \{0\}$, γιατί $2x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0$ ή $2x^2 + 5 = 0$, που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

β) $B = \{0, 1, 2\}$.

γ) $\Gamma = \{-2, -1, 0\}$, γιατί $-5 < 3x + 2 < 5 \Leftrightarrow -7 < 3x < 3 \Leftrightarrow$
$-\dfrac{7}{3} < x < 1$ και x ακέραιος.

δ) $\Delta = \{(0, 3), (1, 1)\}$.

Β. **α)** $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 2\}$.

β) $B = \{x \in \mathbb{N} | x$ διαιρέτης του $8\}$.

γ) $\Delta = \{x \in \mathbb{N}^* | x$ πολλαπλάσιο του 3, μικρότερο του $16\}$.

2.4. Δίνονται τα σύνολα: $A = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | -4 < 2x - 7 < 4\}$. Να εξεταστεί αν είναι ίσα.

Λύση

Έχουμε $A = \{2, 3, 4, 5\}$.
Είναι $-4 < 2x - 7 < 4 \Leftrightarrow 3 < 2x < 11 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} < x < \dfrac{11}{2}$ και $x \in \mathbb{N}$.
Άρα $B = \{2, 3, 4, 5\}$, οπότε $A = B$.

2.5. Να γραφούν όλα τα υποσύνολα του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$.

Λύση

Τα υποσύνολα του A είναι:
$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{1,2\}$, $A_5 = \{1, 3\}$, $A_6 = \{2, 3\}$,
$A_7 = A$ και $A_8 = \varnothing$.

2.6. Έστω το σύνολο $A = \{1, 3, 5\}$. Να εξεταστεί ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι Σωστοί (Σ) ή Λάθος (Λ). Να γίνει αιτιολόγηση.

α) $\{3\} \subseteq A$ **β)** $\{1\} \subseteq A$ **γ)** $\{1, 3\} \in A$

δ) $5 \subseteq A$ **ε)** $\{\varnothing, 3, 5\} \subseteq A$ **στ)** $\varnothing \subseteq A$

Λύση

α) Σωστό, διότι το μονοσύνολο {3} περιέχεται στο A.

β) Σωστό, όπως το (α).

γ) Λάθος, διότι το {1, 3} δεν είναι στοιχείο του Α, αλλά υποσύνολό του.
δ) Λάθος, διότι το $5 \in A$.
ε) Λάθος, διότι το $\varnothing \notin A$.
στ) Σωστό, διότι το $\varnothing$ είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

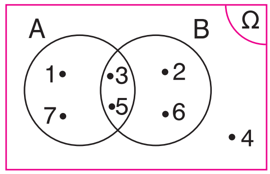
2.7. Δίνεται το σύνολο Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} και τα υποσύνολά του Α = {1, 3, 5, 7} και Β = {2, 3, 5, 6}. Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn με βασικό σύνολο το Ω τα σύνολα Α και Β. Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cap B$, $A \cup B$, A', B' και $A - B$.

Λύση

Έχουμε το διπλανό διάγραμμα Venn, οπότε είναι:

$A \cap B = \{3, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$,

$A' = \{2, 4, 6\}$, $B' = \{1, 4, 7\}$ και $A - B = \{1, 7\}$.



**2.8. Ω = {1, 2, 3, 4, 5}, Α = {3, 4}, Β = {2, 4, 5}.
Να βρεθούν τα σύνολα A', B', $(A \cap B)'$, $(A \cup B)'$, $A - B$, $\varnothing'$, $A \cap B'$ και Ω'.**

Λύση

Είναι $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$.

$A' = \{1, 2, 5\}$, $B' = \{1, 3\}$,

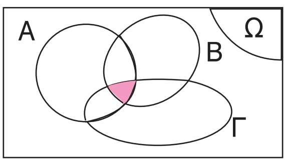
$A \cap B = \{4\}$, $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 5\}$,

$A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, $(A \cup B)' = \{1\}$, $A - B = \{3\}$,

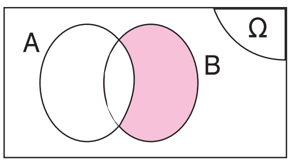
$\varnothing' = \Omega$, $A \cap B' = \{3\}$, $\Omega' = \varnothing$.

2.9. Στα παρακάτω διαγράμματα Venn να βρεθεί το σύνολο που παριστάνει το γραμμοσκιασμένο τμήμα.

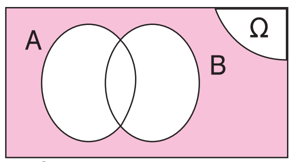
α)



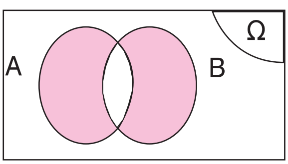
β)



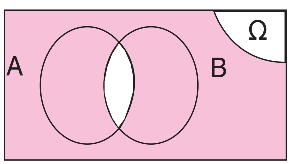
γ)



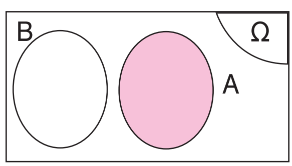
δ)



ε)



στ)



Λύση

α) $(A \cap B) \cap \Gamma$ **β)** $B \cap A' = B - A$ **γ)** $(A \cup B)'$

δ) $(A' \cap B) \cup (B' \cap A)$ **ε)** $(A \cap B)'$ **στ)** $(B' \cap A)$

2.10. Να αποδειχθούν οι ισότητες:

α) $A \cap (A \cup B) = A$ και $A \cup (A \cap B) = A$

β) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ και $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (τύποι De Morgan)

γ) $(A \cap B') \cap B = \varnothing$

δ) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ (με διάγραμμα Venn)

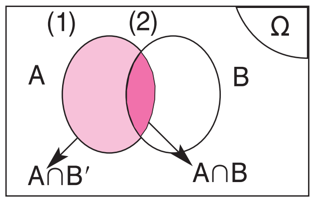
Λύση

α) Έχουμε $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$, γιατί $A \cap B \subseteq A$. Ομοίως αποδεικνύεται και η ισότητα $A \cup (A \cap B) = A$.

β) Έστω $x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A)$ ή $(x \notin B) \Leftrightarrow$ $(x \notin A')$ ή $(x \notin B') \Leftrightarrow x \in (A' \cup B')$, άρα $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
Ομοίως και $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

γ) Έχουμε $(A \cap B') \cap B = A \cap (B' \cap B) = A \cap \varnothing = \varnothing$ (διότι $B' \cap B = \varnothing$).

δ) Το διάγραμμα (1) παριστάνει το σύνολο $A \cap B'$ και το διάγραμμα (2) το $A \cap B$. Άρα $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$.



Ερωτησεις Κατανοησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ (Σ) Ή ΛΑΘΟΣ (Λ)

Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) ή το Λανθασμένο (Λ) των παρακάτω ισχυρισμών:

2.11. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. **Σ Λ**

2.12. $1, 2 \notin \mathbb{Q}$. **Σ Λ**

2.13. $-\sqrt{9} \in \mathbb{N}$. **Σ Λ**

2.14. $\pi \in \mathbb{Q}$. **Σ Λ**

2.15. $0 \in \{0\}$. **Σ Λ**

2.16. $\varnothing = \{0\}$. Σ Λ

2.17. $A \cup \varnothing = A$. Σ Λ

2.18. $A \subseteq (A \cup B)$. Σ Λ

2.19. $5,\overline{7} \notin \mathbb{R}$. Σ Λ

2.20. Αν $A = \{0, 3, 5\}$ και $B = \{5, 3\}$, τότε $A \subseteq B$. Σ Λ

2.21. Η τομή των συνόλων $A = \{α, β, γ\}$ και $B = \{β, δ\}$ είναι το σύνολο $Γ = \{α, β, γ, δ\}$. Σ Λ

2.22. $(A')' = A$. Σ Λ

2.23. $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ (Α, Β υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω). Σ Λ

2.24. Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = B$ (Α, Β υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω). Σ Λ

2.25. $(A \cap \varnothing)' = Ω$ (Ω βασικό σύνολο και $A \subseteq Ω$). Σ Λ

2.26. $0 \notin \mathbb{Q}^*$. Σ Λ

2.27. $-3 \in \mathbb{Z}$. Σ Λ

2.28. $\frac{\sqrt{3}}{7} \in \mathbb{Q}$. Σ Λ

2.29. $\frac{-3}{5} \in \mathbb{R}$. Σ Λ

2.30. $-5 \in \mathbb{Q}$. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

2.31. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α) $A = \{x | x$ γράμμα της λέξης «θάλασσα»$\}$ **β)** $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - 4 = 0\}$

γ) $Γ = \{x \in \mathbb{Z} | -2 < x < 2\}$ **δ)** $Δ = \{(x, y) | x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}^*$ και $x + y = 3\}$

2.32. Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

α) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ **β)** $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

γ) $\{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$

2.33. Να γράψετε το σύνολο των ψηφίων των αριθμών:

α) 257 **β)** 1010 **γ)** 100^{100} **δ)** 0,1221

2.34. Να εξετάσετε αν είναι $A = \varnothing$, όταν:

α) $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 + 3x = 0\}$ **β)** $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 1 = 0\}$

γ) $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 - 2 = 0\}$

2.35. Να βρείτε το σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$(x+1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)(x^2+3)=0$ στο σύνολο:

α) $\Omega = \mathbb{N}$ **β)** $\Omega = \mathbb{Z}$ **γ)** $\Omega = \mathbb{Q}$

2.36. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε ίσα σύνολα;

α) $A = \{\alpha, \beta\}$ $B = \{\beta, \alpha\}$

β) $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 6x + 9 = 0\}$ $B = \{-3\}$

γ) $A = \{1, 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} | -1 \leq x \leq 2\}$

2.37. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις έχουμε $A \subseteq B$;

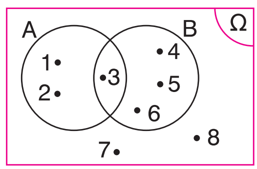
α) $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x \leq 2\}$

β) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 0\}$ $B = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

γ) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} | x$ διαιρέτης του $4\}$

2.38. Έστω $A = \{1, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$ και $\Gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cup \Gamma$ και $B - A$.

2.39. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το διάγραμμα Venn για τα υποσύνολα Α και Β ενός βασικού συνόλου Ω. Να βρείτε τα σύνολα:



α) Ω **β)** A **γ)** B **δ)** $A' \cup B$ **ε)** $A \cap B'$

2.40. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ και $\Gamma = \{2, 5, 10\}$, να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $(A \cap B)'$, Ω', $A' \cap B$, $A' \cup B'$.
Τι παρατηρείτε για τα σύνολα $(A \cap B)'$ και $A' \cup B'$;

2.41. Αν $A \subseteq B$, να αποδείξετε με διάγραμμα Venn ότι $A \cap B = A$ και $A \cup B = B$.

2.42. Δίνονται τα σύνολα:

$\Omega = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4\right\}$, $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| (4x^2 - 1)(x - 3) = 0\right\}$,

$B = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x \text{ υπόλοιπο της διαίρεσης } κ : 4, \text{ όπου } κ \text{ ακέραιος}\right\}$. Να βρείτε τα σύνολα:

α) Α και Β **β)** $(A \cup B)'$ και $A \cap B'$

2.43. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε τα σύνολα $A = \{2, 4\}$ και $B = \{x + 1, 5 - x\}$ να είναι ίσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

Οι πραγματικοί αριθμοί

1. Πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς – Αναλογίες

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Το σύνολο $\mathbb{R}$

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών αποτελείται από το σύνολο των ρητών και των άρρητων αριθμών. Οι πραγματικοί αριθμοί παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.

Ρητοί είναι τα κλάσματα με αριθμητή ακέραιο και παρονομαστή ακέραιο διάφορο του μηδενός, οι δεκαδικοί και οι δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά στοιχεία που έχουν περιοδικότητα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $x = 0{,}555... = 0{,}\overline{5} \Rightarrow 10x = 5{,}555...$ οπότε $9x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{9}$, δηλαδή είναι ρητός.

Παράδειγμα: $\frac{2}{3}$, $\frac{-9}{4}$, 1,4, –2,67, 3,222..., $45{,}6\overline{52}$.

Άρρητοι είναι οι αριθμοί που δε γράφονται με μορφή ρητού.

Παράδειγμα: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{11}$, π, ...

Οι βασικές πράξεις στο $\mathbb{R}$ είναι η πρόσθεση (+) και ο πολλαπλασιασμός (·).

Ιδιότητες		
Ιδιότητα / Πράξη	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
επιμεριστική	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	
ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
συμμετρικό στοιχείο	$\alpha + (-\alpha) = 0$ *(αντίθετος)*	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1,\ \alpha \neq 0$ *(αντίστροφος)*

- **Αφαίρεση**

  Είναι η αντίθετη πράξη της πρόσθεσης, αφού $\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$.

- **Διαίρεση**

  Είναι η αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, αφού $\boldsymbol{\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}}$ $(\beta \neq 0)$.

Άλλες ιδιότητες

α) Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

β) Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$, τότε $\alpha\gamma = \beta\delta$.

γ) Αν $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

δ) Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$.

Σημειωση

Για να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της διαγραφής, θα πρέπει να ισχύει $\gamma \neq 0$, γιατί, αν είχαμε $3 \cdot 0 = 5 \cdot 0$, τότε $3 = 5$, που είναι αδύνατο.

ε) $\alpha \cdot 0 = 0$.

στ) $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

Παράδειγμα: $(2x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ ή $x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$x = \frac{3}{2}$ ή $x = 1$.

ζ) $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

Παράδειγμα: $(3x - 1)(x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}$ και $x \neq -2$.

Προσοχη

Το σύμβολο της ισοδυναμίας «$\Leftrightarrow$» χρησιμοποιείται μόνο όταν έχουμε σύνδεση δύο ισχυρισμών και ο δεύτερος είναι συμπέρασμα του πρώτου και αντίστροφα.

Παράδειγμα: $x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

η) Κανόνας προσήμων

- $(-1)\alpha = -\alpha$
- $(-\alpha)\beta = -\alpha\beta$
- $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$

θ) Κανόνας απαλοιφής παρενθέσεων

- $-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$
- $\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}$, $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

ι) Πράξεις με κλασματικές παραστάσεις

Αν $\beta\gamma\delta \neq 0$, τότε έχουμε:

- $\frac{α}{γ} \pm \frac{β}{γ} = \frac{α \pm β}{γ}$
- $\frac{α}{β} \cdot \frac{γ}{δ} = \frac{αγ}{βδ}$
- $\frac{α}{β} \pm \frac{γ}{δ} = \frac{αδ \pm βγ}{βδ}$
- $\frac{α}{β} : \frac{γ}{δ} = \frac{α}{β} \cdot \frac{δ}{γ} = \frac{αδ}{βγ}$

ια) **Αναλογία** είναι η ισότητα δύο λόγων, δηλαδή $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$. Οι αριθμοί α, δ λέγονται άκροι, ενώ οι β, γ λέγονται μέσοι. Αν $γ = β$, τότε $\frac{α}{β} = \frac{β}{δ}$ και ο β ονομάζεται μέσος ανάλογος των α, δ.

ιβ) **Ιδιότητες αναλογιών**

Αν $α, β, γ, δ \neq 0$, τότε έχουμε:

- $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow αδ = βγ$
- $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{α}{γ} = \frac{β}{δ}$
- $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{β}{α} = \frac{δ}{γ}$
- $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{δ}{β} = \frac{γ}{α}$
- $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} \Leftrightarrow \frac{α \pm β}{β} = \frac{γ \pm δ}{δ}$
- $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} = \frac{α + γ}{β + δ}$ (επιπλέον $β + δ \neq 0$) και γενικά:
- $\frac{α_1}{β_1} = \frac{α_2}{β_2} = \ldots = \frac{α_κ}{β_κ} = \frac{α_1 + α_2 + \ldots + α_κ}{β_1 + β_2 + \ldots + β_κ}$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Συνήθως, όταν μας δίνεται αναλογία, π.χ. $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, θέτουμε τον κοινό λόγο ίσο με λ, δηλαδή $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} = λ$, οπότε $α = βλ$ και $γ = δλ$.

Παράδειγμα

Αν $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$, τότε $\frac{κα + λβ}{κα - λβ} = \frac{κγ + λδ}{κγ - λδ}$ $(β \neq 0, δ \neq 0, κα - λβ \neq 0$ και $κγ - λδ \neq 0)$.

Λύση

Θέτουμε $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ} = μ$, οπότε $α = βμ$ και $γ = δμ$, επομένως το 1ο μέλος γίνεται:

$$\frac{κα + λβ}{κα - λβ} = \frac{κβμ + λβ}{κβμ - λβ} = \frac{β(κμ + λ)}{β(κμ - λ)} = \frac{κμ + λ}{κμ - λ} \quad (1).$$

Το 2ο μέλος γίνεται: $\frac{κγ + λδ}{κγ - λδ} = \frac{κδμ + λδ}{κδμ - λδ} = \frac{δ(κμ + λ)}{δ(κμ - λ)} = \frac{κμ + λ}{κμ - λ}$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει το ζητούμενο.

Άρτιοι	Περιττοί
Οι **άρτιοι** ακέραιοι (..., –2, 0, 2, 4,...) συμβολίζονται με **2κ**, όπου **κ** ακέραιος.	Οι **περιττοί** ακέραιοι (..., –3, –1, 1, 3, 5,...) συμβολίζονται με **2κ + 1**, όπου **κ** ακέραιος.

Σημειωση

Αν οι αριθμοί α, β, γ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί ακέραιοι, τότε γράφονται:

$$β = α + 1,\ γ = α + 2 \text{ ή } β - α = γ - β = 1$$

Λυμενες Ασκησεις

1.1. **Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, ώστε να ισχύει $\frac{2α + 3β}{α + 2β} = 3$.**

α) Να αποδείξετε ότι α = –3β.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $Α = \frac{3α^2 + 6β^2 + αβ}{αβ}$.

Λύση

α) Έχουμε $\frac{2α + 3β}{α + 2β} = 3 \Leftrightarrow 2α + 3β = 3(α + 2β) \Leftrightarrow$

$2α + 3β = 3α + 6β \Leftrightarrow α = -3β$.

β) Είναι $A = \dfrac{3\alpha^2 + 6\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha\beta} \overset{(\alpha=-3\beta)}{=\!=} \dfrac{3\cdot(-3\beta)^2 + 6\beta^2 + (-3\beta)\beta}{(-3\beta)\beta} =$

$$= \frac{3\cdot 9\beta^2 + 6\beta^2 - 3\beta^2}{-3\beta^2} = \frac{27\beta^2 + 6\beta^2 - 3\beta^2}{-3\beta^2} = \frac{30\beta^2}{-3\beta^2} = -10.$$

1.2. Δίνονται οι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, δ.

Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\dfrac{5\alpha + \delta + 13}{5\gamma - 2\beta}$ είναι ακέραιος.

Λύση

Αρκεί το κλάσμα να μετασχηματισθεί σε έναν ακέραιο αριθμό ή σε άθροισμα ακέραιων αριθμών.

Επειδή οι α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί ακέραιοι, θα είναι:

$\beta = \alpha + 1,\ \ \gamma = \alpha + 2,\ \ \delta = \alpha + 3$. Έτσι, θα έχουμε:

$$\frac{5\alpha + \delta + 13}{5\gamma - 2\beta} = \frac{5\alpha + \alpha + 3 + 13}{5(\alpha + 2) - 2(\alpha + 1)} = \frac{2(3\alpha + 8)}{3\alpha + 8} = 2,$$

που είναι ακέραιος.

1.3. Να εξεταστεί για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση:

$A = 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x-2}}$. Στη συνέχεια να απλοποιηθεί.

Λύση

Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι οι παρονομαστές δε μηδενίζονται.

Η παράσταση ορίζεται μόνο όταν οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός, δηλαδή όταν:

$\left(x - 2 \neq 0 \text{ και } 1 - \dfrac{1}{x-2} \neq 0\right) \Leftrightarrow \left(x \neq 2 \text{ και } 1 \neq \dfrac{1}{x-2}\right) \Leftrightarrow$

$(x \neq 2 \ \text{ και } x - 2 \neq 1) \Leftrightarrow (x \neq 2 \ \text{ και } x \neq 3)$. Έχουμε:

$$A = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x-2}} = 1 - \frac{1}{\frac{x-2-1}{x-2}} = 1 - \frac{1}{\frac{x-3}{x-2}} = \frac{1}{1} - \frac{x-2}{x-3} =$$

$$= \frac{(x-3)-(x-2)}{x-3} = \frac{x-3-x+2}{x-3} = \frac{-1}{x-3}.$$

1.4. **Να υπολογίσετε την παράσταση** $A = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4}}}}$.

Λύση

Αρκεί διαδοχικά το κλάσμα να γραφτεί στη μορφή $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$.

$$A = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{\frac{13}{4}}}} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-\frac{12}{13}}} = \cfrac{3}{4-\cfrac{3}{\frac{40}{13}}} = \cfrac{3}{4-\frac{3\cdot 13}{40}} = \cfrac{3}{\frac{160-39}{40}} = \cfrac{\frac{3}{1}}{\frac{121}{140}} = \frac{120}{121}.$$

1.5. **Να γίνουν οι πράξεις:**

α) $3[2(1-5x)+2(3-x)]-7[-1+2(2-5x)]$

β) $6(1-x)-y[-x-(2-3x)+2]$

Λύση

Αρκεί να εκτελέσουμε τις επιμεριστικές και τις αναγωγές όμοιων όρων.

α) Έχουμε $3[2(1-5x)+2(3-x)]-7[-1+2(2-5x)] =$

$= 3(2-10x+6-2x)-7(-1+4-10x) =$

$= 3(8-12x)-7(3-10x) = 24-36x-21+70x =$

$= 34x+3.$

β) $6(1-x) - y\left[-x-(2-3x)+2\right] = 6-6x-y(-x-2+3x+2) =$
$= 6-6x-y\cdot 2x = 6-6x-2xy$.

1.6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
$A = \alpha(\alpha+2)+\beta(\beta-2)-2\alpha\beta$, αν $\alpha-\beta=2$

Λύση

Αρκεί να εμφανίσουμε στην παράσταση τη σχέση που δόθηκε.

1ος τρόπος

Ισχύει: $A = \alpha^2+2\alpha+\beta^2-2\beta-2\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2+2(\alpha-\beta) = 2^2+2\cdot 2 = 8$,
διότι $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$.

2ος τρόπος

Επειδή $\alpha-\beta=2$, προκύπτει ότι $\alpha = 2+\beta$, οπότε θέτουμε στην παράσταση Α όπου α το $2+\beta$ και εκτελούμε τις πράξεις.

1.7. Να βρεθούν οι αριθμοί x, y, ω, αν ισχύουν οι σχέσεις $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{5}$ και $3x-2y+7\omega=350$.

Λύση

Αρκεί να εκφράσουμε όλους τους αριθμούς με τη βοήθεια μιας μόνο μεταβλητής.

Θέτουμε $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{5}=\lambda$, οπότε $x=2\lambda$, $y=3\lambda$ και $\omega=5\lambda$, άρα η ισότητα
$3x-2y+7\omega=350$ γίνεται:
$3\cdot 2\lambda-2\cdot 3\lambda+7\cdot 5\lambda=350 \Leftrightarrow 6\lambda-6\lambda+35\lambda=350 \Leftrightarrow \lambda=\frac{350}{35} \Leftrightarrow \lambda=10$.
Επομένως $x=20$, $y=30$ και $\omega=50$.

1.8. Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι:
α) $\alpha+3\beta-4\gamma=-5$ β) $3\alpha\gamma+2\beta\gamma-5\alpha\beta+3$ = πολλαπλάσιο του 7
γ) $\alpha\beta+3\gamma-\alpha^2$ άρτιος, αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4

Λύση

Αρκεί να προσέξουμε ότι οι αριθμοί έχουν συγκεκριμένη σχέση μεταξύ τους.

Επειδή α, β, γ είναι διαδοχικοί ακέραιοι, θα ισχύει:
$\beta = \alpha + 1$ και $\gamma = \alpha + 2$. Άρα:

α) $\alpha + 3\beta - 4\gamma = \alpha + 3(\alpha + 1) - 4(\alpha + 2) = \alpha + 3\alpha + 3 - 4\alpha - 8 = -5.$

β) $3\alpha\gamma + 2\beta\gamma - 5\alpha\beta + 3 = 3\alpha(\alpha + 2) + 2(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 5\alpha(\alpha + 1) + 3 =$
$= 3\alpha^2 + 6\alpha + 2(\alpha^2 + 2\alpha + \alpha + 2) - 5\alpha^2 - 5\alpha + 3 =$
$= 3\alpha^2 + 6\alpha + 2\alpha^2 + 4\alpha + 2\alpha + 4 - 5\alpha^2 - 5\alpha + 3 =$
$= 7\alpha + 7 = 7(\alpha + 1)$, που είναι πολλαπλάσιο του 7.

γ) $\alpha\beta + 3\gamma - \alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) + 3(\alpha + 2) - \alpha^2 = \alpha^2 + \alpha + 3\alpha + 6 - \alpha^2 = 4\alpha + 6$,
που είναι άρτιος, γιατί $4\alpha + 6 = 2(2\alpha + 3) = 2\kappa$, όπου κ ακέραιος.
Όμως το $4\alpha + 6$ δεν είναι πολλαπλάσιο του 4, γιατί, αν ήταν
$4\alpha + 6 = 4\lambda \Leftrightarrow 6 = 4(\lambda - \alpha) =$ πολλαπλάσιο του 4, άτοπο (*λ ακέραιος*).

1.9. Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε να ορίζεται η παράσταση:

$$A = \left[(x+1)^2\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) - 2\right]\cdot(x-1).$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η Α δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x.

Λύση

Αρκεί το αποτέλεσμα να μην περιέχει τη μεταβλητή x.

Τα κλάσματα $\frac{1}{x-1}$ και $\frac{1}{x+1}$ θα έχουν νόημα πραγματικού αριθμού,
όταν $x - 1 \neq 0$ και $x + 1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$ και $x \neq -1$.
Η παράσταση Α απλοποιείται ως εξής:

$$A = \left[(x+1)^2 \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)} - 2\right]\cdot(x-1) =$$

$$= \left[(x+1)^2 \cdot \frac{2}{(x-1)(x+1)} - 2\right]\cdot(x-1) = \left(\frac{2x+2}{x-1} - 2\right)(x-1) =$$

$$= \frac{2x + 2}{x - 1} \cdot (x - 1) - 2(x - 1) = (2x + 2) - 2(x - 1) =$$

$= 2x + 2 - 2x + 2 = 4$, που είναι ένας σταθερός αριθμός.

1.10. Αν ο φυσικός αριθμός ν είναι περιττός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\nu^2 + 1$ είναι άρτιος φυσικός.

Λύση

Αρκεί ο αριθμός να έχει τη μορφή 2κ, όπου κ φυσικός.

Αφού ν περιττός, έχουμε $\nu = 2\lambda + 1$, λ φυσικός αριθμός. Τότε:

$\nu^2 + 1 = (2\lambda + 1)^2 + 1 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + 1 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 2 =$

$= 2(2\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 2\kappa$, όπου $\kappa = 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$ φυσικός αριθμός.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ (Σ) Ή ΛΑΘΟΣ (Λ)

Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) ή το Λανθασμένο (Λ) των παρακάτω ισχυρισμών:

1.11. Κάθε ακέραιος είναι και ρητός. Σ Λ

1.12. Η δεκαδική μορφή των άρρητων αριθμών είναι περιοδική. Σ Λ

1.13. Ο αριθμός 0 δεν έχει αντίστροφο. Σ Λ

1.14. Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι περιττός ακέραιος. Σ Λ

1.15. Ο αριθμός $-\alpha$ είναι αρνητικός. Σ Λ

1.16. Αν $\alpha \neq \beta$ και $\gamma \neq \delta$, τότε $\alpha + \gamma \neq \beta + \delta$. Σ Λ

1.17. Ισχύει $\dfrac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\beta}{\delta}$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς που έχουν νόημα τα κλάσματα. Σ Λ

1.18. Το άθροισμα δύο ακέραιων περιττών είναι περιττός ακέραιος. Σ Λ

1.19. Αν α περιττός ακέραιος, τότε ο αριθμός $\alpha(\alpha + 2)$ είναι άρτιος. Σ Λ

1.20. Η παράσταση $\dfrac{1}{x^2+x}$ ορίζεται όταν $x \neq 0$ ή $x \neq -1$. **Σ** **Λ**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α΄ Ομάδα

1.21. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $2x - 3(x - 5y) - 2x(3 - 7y) - 14xy$

β) $-x(7x - 3y) - [3x - 2(1 - 2x - y)] - 3xy$

1.22. Να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων, αν $\alpha = -1$ και $\beta = 9$:

$A = 3(\alpha - 2) - 2(-2\beta + 1) - \alpha$

$B = 3[\alpha(\beta - 2) - \beta(\alpha - 1)] - 3(\alpha - 2\beta)$

1.23. Αν $\alpha - \beta = 2$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$A = \alpha(\alpha + 2) - \beta(\beta + 4) - 2\beta$

1.24. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} \quad \text{και} \quad B = \frac{2 - \dfrac{1}{x}}{3 + \dfrac{1}{x-2}}$$

1.25. Αν $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$, να υπολογιστούν οι λόγοι:

$$A = \frac{x}{x+y}, \quad B = \frac{x+2}{y+3}, \quad \Gamma = \frac{x+y}{x-y}$$

1.26. Αν $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{\omega}{2}$ και $x - 2y + 3\omega = 10$, να βρεθούν οι x, y, ω.

1.27. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta}$, με $\beta \neq 0$ και $5\beta \neq -7\delta$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{5\alpha + 7\gamma}{5\beta + 7\delta} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

1.28. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$, ώστε να ισχύουν $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta} = 4$ και $\dfrac{\gamma}{\delta-\gamma} = \dfrac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$.

(2ο Θέμα Τράπεζας Θεμάτων)

Β΄ Ομάδα

1.29. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε το κλάσμα $\dfrac{\alpha+3}{\alpha+2}$, όπου α ακέραιος, να είναι ακέραιος αριθμός διάφορος του μηδενός.

1.30. Αν α, β, γ διαδοχικοί περιττοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + 3\beta - 4\gamma = -10$ **β)** $\beta\gamma + 3\alpha\gamma - 10\alpha\beta =$ πολλαπλάσιο του 4

1.31. Έστω α άρτιος ακέραιος και β περιττός ακέραιος. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \beta$ περιττός **β)** $\alpha\beta$ άρτιος

1.32. Να αποδείξετε ότι:

α) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

β) Το κλάσμα $\dfrac{\kappa^2+\kappa+2}{2}$, όπου κ ακέραιος αριθμός, παριστάνει ακέραιο αριθμό.

1.33. Αν ισχύει $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{\gamma}{\omega}$, να αποδείξετε ότι:

$(x^2 + y^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = (\alpha x + \beta y + \gamma\omega)^2$, όπου $xy\omega \neq 0$

1.34. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ $(\alpha, \beta, \gamma \neq 0)$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma$.

2. Δυνάμεις – Ταυτότητες – Παραγοντοποίηση – Μέθοδοι απόδειξης προτάσεων

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Δυνάμεις

Ορισμοί	Ιδιότητες δυνάμεων
• $\alpha^{\nu} = \begin{cases} \underbrace{\alpha\alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, & \nu \geq 2 \\ \alpha, & \nu = 1 \end{cases}$ (όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$) • $\alpha^0 = 1$, $(\alpha \neq 0)$ • $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$, $(\alpha \neq 0)$ Άρα $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\kappa} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\kappa}$, $(\alpha, \beta \neq 0)$	Έστω $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$, τότε έχουμε: • $\alpha^{\kappa}\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$ • $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}} = \alpha^{\kappa-\lambda}$, $(\alpha \neq 0)$ • $\alpha^{\kappa}\beta^{\kappa} = (\alpha\beta)^{\kappa}$ • $\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$, $(\beta \neq 0)$ • $(\alpha^{\kappa})^{\lambda} = \alpha^{\kappa\lambda}$

ΣΧΟΛΙΟ

Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha, \beta \neq 0$.

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^{\kappa} = \beta^{\kappa}$.

Όμως, αν $\alpha^{\kappa} = \beta^{\kappa}$, τότε $\begin{cases} \alpha = \beta, \text{ όταν } \boldsymbol{\kappa} \text{ περιττός ακέραιος} \\ \alpha = \pm\beta, \text{ όταν } \boldsymbol{\kappa} \text{ άρτιος ακέραιος} \end{cases}$.

Για παράδειγμα έχουμε:

- $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^3 = \beta^3$.
- Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^2 = \beta^2$.

Όμως, αν $\alpha^2 = \beta^2$, δε σημαίνει απαραίτητα ότι $\alpha = \beta$, αφού $(-5)^2 = 5^2$, ενώ $-5 \neq 5$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Είναι $(-\alpha)^{\nu} = \alpha^{\nu}$, όταν ν άρτιος, άρα $(-1)^8 = 1$ και $(-\alpha)^{\nu} = -\alpha^{\nu}$, όταν ν περιττός, οπότε $(-1)^7 = -1$.

Ταυτότητες

Ταυτότητα είναι κάθε ισότητα που περιέχει **μεταβλητές (γράμματα)** και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών (γραμμάτων) της.

Βασικές ταυτότητες

Αν **α, β, γ, x** πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες:

1. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

2. $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

3. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

4. $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

5. $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

6. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

7. $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

8. $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$ (*ταυτότητα Newton*)

9. $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

10. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

11. $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

12. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$ (*ταυτότητα Euler*)

13. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\cdot[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

14. $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$ (*ταυτότητα Lagrange*)

15. $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$, ν θετικός ακέραιος

16. $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\ldots+\beta^{\nu-1})$, ν περιττός φυσικός

17. $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2=$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$ (*ταυτότητα De Moivre*)

Παραγοντοποίηση

Είναι η μετατροπή μιας παράστασης σε γινόμενο παραγόντων.

Μέθοδοι παραγοντοποίησης

α) Κοινός παράγοντας

Παράδειγμα

$2x^2 - 4xy + 6x^3 = 2x(x - 2y + 3x^2)$.

β) Ομαδοποίηση

Παράδειγμα

$\alpha x + \beta y - \alpha y - \beta x = (\alpha x - \alpha y) + (\beta y - \beta x) =$

$= \alpha(x - y) - \beta(x - y) = (x - y)(\alpha - \beta)$.

γ) Ταυτότητες

Παράδειγμα

α) $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$.

β) $(\alpha + x)^2 - 1 = (\alpha + x - 1)(\alpha + x + 1)$.

γ) $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$.

δ) Τριώνυμο

Παράδειγμα

$x^2 - 5x + 4 = x^2 + (-4 - 1)x + (-4)(-1) =$

$= (x - 4)(x - 1)$ (ταυτότητα Newton).

ε) Τεχνάσματα με τους συντελεστές

Παράδειγμα

$x^3 - 5x + 4 = x^3 - x - 4x + 4 =$

$= (x^3 - x) + (-4x + 4) = x(x^2 - 1) - 4(x - 1) =$

$= x(x - 1)(x + 1) - 4(x - 1) =$

$= (x - 1)[x(x + 1) - 4] = (x - 1)(x^2 + x - 4)$.

Μέθοδοι απόδειξης προτάσεων

Απόδειξη λέμε τη διαδικασία κατά την οποία, με:

- τα αξιώματα της θεωρίας,
- τους κανόνες της μαθηματικής λογικής,
- τα θεωρήματα και
- τις πράξεις,

συμπεραίνουμε την αλήθεια μιας πρότασης.

Ευθεία απόδειξη

Για την απόδειξη των **ταυτοτήτων** ξεκινάμε από το ένα μέλος (υπόθεση) και με διαδοχικούς συλλογισμούς καταλήγουμε στο άλλο μέλος (συμπέρασμα). Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **ευθεία απόδειξη.**

Παράδειγμα: Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.
Πραγματικά, το 2ο μέλος της ταυτότητας Euler θα γίνει μηδέν, άρα και το 1ο μέλος της. Έτσι, έχουμε:
$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$.

Εφαρμογή 1

Με βάση την ταυτότητα Euler μπορεί να λυθεί η εξίσωση:
$(2 - 3x)^3 + (x - 3)^3 + (1 + 2x)^3 = 0$.
Παρατηρούμε ότι:
$(2 - 3x) + (x - 3) + (1 + 2x) = 0$, οπότε:
$(2 - 3x)^3 + (x - 3)^3 + (1 + 2x)^3 = 0 \Leftrightarrow 3(2 - 3x)(x - 3)(1 + 2x) = 0 \Leftrightarrow$
$x = \frac{2}{3}$ ή $x = 3$ ή $x = \frac{-1}{2}$.

Απαγωγή σε άτοπο

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, όταν ζητάμε να αποδείξουμε ότι μία πρόταση είναι αληθής:

α) Υποθέτουμε ότι αληθεύει η άρνησή της.

β) Με διαδοχικά βήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα που είναι λάθος **(άτοπο)**, σύμφωνα με αυτά που ξέρουμε ότι αληθεύουν.
Άρα η παραδοχή μας ήταν λανθασμένη, οπότε η πρόταση ισχύει.

Εφαρμογή 2

Αν ο α^2 είναι περιττός (α ακέραιος), τότε και ο α είναι περιττός.

Λύση

Υποθέτουμε ότι ο α δεν είναι περιττός, άρα θα είναι άρτιος, δηλαδή
$\alpha = 2\kappa$, κ ακέραιος. Τότε $\alpha^2 = 4\kappa^2 = 2(2\kappa^2)$, που είναι άρτιος (ως πολλαπλάσιο του 2), που είναι **άτοπο.** Άρα ο α είναι περιττός ακέραιος.

Εφαρμογή 3

Αν ο α είναι άρρητος και ο ρ ρητός, τότε ο $\alpha + \kappa\rho$ είναι άρρητος (κ ακέραιος).

Λύση

Έστω α + κρ = ρ′ (ρητός). Τότε α = ρ′ – κρ, που είναι **άτοπο,** διότι ο α είναι άρρητος και ο ρ′ – κρ είναι ρητός. Επομένως ο α + κρ είναι άρρητος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να υπολογιστούν τα γινόμενα:

α) $(-3)^6 \cdot 3^{-6}$ **β)** $4^{-11} \cdot 12^{21} \cdot 6^{-22}$ **γ)** $(0,5)^{16} \cdot 32^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$

Λύση

α) Ισχύει $(-3)^6 \cdot 3^{-6} = 3^6 \cdot 3^{-6} = 3^{6-6} = 3^0 = 1$.

β) Είναι $4^{-11} \cdot 12^{21} \cdot 6^{-22} = (2^2)^{-11}(2^2 \cdot 3)^{21}(2 \cdot 3)^{-22} =$

$= 2^{-22} \cdot (2^2)^{21} \cdot 3^{21} \cdot 2^{-22} \cdot 3^{-22} = 2^{-22} \cdot 2^{42} \cdot 2^{-22} \cdot 3^{21} \cdot 3^{-22} =$

$= 2^{-22+42-22} \cdot 3^{21-22} = 2^{-2} \cdot 3^{-1} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

γ) Έχουμε $(0,5)^{16} \cdot 32^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{16} \cdot (2^5)^2 \cdot 2^6 = 2^{-16} \cdot 2^{10} \cdot 2^6 = 2^0 = 1$.

2.2. Αν ν ακέραιος, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\mathbf{A = 2 \cdot (-1)^{\nu+2} + 3 \cdot (-1)^{5\nu+3}}$$

Λύση

Έχουμε $A = 2 \cdot (-1)^{\nu+2} + 3 \cdot (-1)^{5\nu+3} = 2 \cdot (-1)^{\nu}(-1)^2 + 3 \cdot (-1)^{5\nu}(-1)^3 =$

$= 2 \cdot (-1)^{\nu} \cdot 1 + 3 \cdot \left[(-1)^5\right]^{\nu} \cdot (-1) =$

$= 2 \cdot (-1)^{\nu} + 3 \cdot (-1)^{\nu}(-1) = 2 \cdot (-1)^{\nu} - 3 \cdot (-1)^{\nu} = -(-1)^{\nu}$.

- Αν ν άρτιος, τότε $(-1)^{\nu} = 1$, άρα $A = -1$.
- Αν ν περιττός, τότε $(-1)^{\nu} = -1$, άρα $A = -(-1) = 1$.

Επομένως $A = \begin{cases} -1, & \text{αν ν άρτιος} \\ 1, & \text{αν ν περιττός} \end{cases}$.

2.3. **Αν $\alpha \neq 0$, να αποδειχθεί ότι $A = \left(\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}\right)^{\mu+\nu}\left(\frac{\alpha^\nu}{\alpha^\lambda}\right)^{\nu+\lambda}\left(\frac{\alpha^\lambda}{\alpha^\mu}\right)^{\mu+\lambda} = 1$, όπου μ, ν, λ φυσικοί αριθμοί.**

Λύση

Αρκεί να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Έχουμε $A = (\alpha^{\mu-\nu})^{\mu+\nu}(\alpha^{\nu-\lambda})^{\nu+\lambda}(\alpha^{\lambda-\mu})^{\mu+\lambda} = \alpha^{\mu^2-\nu^2}\alpha^{\nu^2-\lambda^2}\alpha^{\lambda^2-\mu^2} =$
$= \alpha^{\mu^2-\nu^2+\nu^2-\lambda^2+\lambda^2-\mu^2} = \alpha^0 = 1.$

2.4. **Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \left(\frac{9\cdot 3^{\alpha-1} - 81\cdot 3^{\alpha-4}}{3\cdot 2^\alpha - 2\cdot 2^{\alpha-1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, όπου $\alpha \neq 0$ κάποιος φυσικός αριθμός.**

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{9\cdot 3^{\alpha-1} - 81\cdot 3^{\alpha-4}}{3\cdot 2^\alpha - 2\cdot 2^{\alpha-1}} = \frac{9\cdot\frac{3^\alpha}{3} - 81\cdot\frac{3^\alpha}{3^4}}{3\cdot 2^\alpha - 2\cdot\frac{2^\alpha}{2}} = \frac{3\cdot 3^\alpha - 3^\alpha}{3\cdot 2^\alpha - 2^\alpha} = \frac{3^\alpha(3-1)}{2^\alpha(3-1)} = \frac{3^\alpha}{2^\alpha} = \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha,$$

οπότε $A = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}.$

2.5. **Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς x, y ισχύει $xy = 2$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:**

$$B = \frac{32(x^2y^3)^{-1}(x^3y^2)^5 y^9}{(xy^2)^8 (xyx)^5}$$

Λύση

Είναι $B = \frac{32(4y)^{-1}(4x)^5 y^9}{(2y)^8(2x)^5} = \frac{32\cdot 4^5x^5y^9}{4y\cdot 2^8y^8\cdot 2^5x^5} = \frac{4^5}{4\cdot 2^8} = \frac{4^4}{2^8} = \frac{4^4}{(2^2)^4} = \frac{4^4}{4^4} = 1.$

2.6. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = \left[(x^{-3}y^2)^{-2}\,(x^3\,y^2)^3\right] : \frac{(x^3y)^2}{(x^{-1}y^{-10})^{-1}}\,,\ \text{αν } x = -2^{-2},\ \ y = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}.$$

Λύση

Έχουμε $\left[(x^{-3}y^2)^{-2}\,(x^3y^2)^3\right] : \dfrac{(x^3y)^2}{(x^{-1}y^{-10})^{-1}} = (x^6y^{-4}\,x^9\,y^6)\cdot\dfrac{xy^{10}}{x^6y^2} =$

$= \dfrac{x^{15}y^2\,xy^{10}}{x^6y^2} = \dfrac{x^{10}\,y^{12}}{y^2} = x^{10}y^{10} = (xy)^{10}.$

Όμως $x = -2^{-2} = -\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$ και $y = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$

Άρα $xy = -\dfrac{1}{4}\cdot 4 = -1$. Τελικά $A = (-1)^{10} = 1.$

2.7. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\dfrac{7^{2\nu+1} - 9\cdot 7^{2\nu-1}}{5\cdot 7^{2\nu-1}}$.

Λύση

Αρκεί να εκφράσουμε όλους τους αριθμούς με τη βοήθεια μιας δύναμης.

Έχουμε $\dfrac{7^{2\nu+1} - 9\cdot 7^{2\nu-1}}{5\cdot 7^{2\nu-1}} = \dfrac{7^{2\nu-1}\cdot 7^2 - 9\cdot 7^{2\nu-1}}{5\cdot 7^{2\nu-1}} = \dfrac{(7^2-9)\cdot 7^{2\nu-1}}{5\cdot 7^{2\nu-1}} =$

$= \dfrac{40\cdot 7^{2\nu-1}}{5\cdot 7^{2\nu-1}} = 8.$

2.8. Αν $\alpha = x^5 + y^{-5}$ και $\beta = x^5 - y^{-5}$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \beta^2 = 4\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^5$.

Λύση

Αρκεί να αντικαταστήσουμε τα α, β και να εκτελέσουμε τις πράξεις.

Είναι $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (x^5 + y^{-5} + x^5 - y^{-5})(x^5 + y^{-5} - x^5 + y^{-5}) =$

$= 2x^5\cdot 2y^{-5} = 4\cdot\dfrac{x^5}{y^5} = 4\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^5.$

2.9. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $(51,2)^2$ **β)** 997^2 **γ)** $1001 \cdot 999$

Λύση

Αρκεί να μετασχηματίσουμε τους αριθμούς στη μορφή μιας ταυτότητας.

Είναι:

α) $(51,2)^2 = (50 + 1,2)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1,2 + 1,2^2 =$
$= 2500 + 120 + 1,44 = 2621,44$.

β) $997^2 = (1000 - 3)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 3 + 3^2 =$
$= 1000000 - 6000 + 9 = 994009$.

γ) $1001 \cdot 999 = (1000 + 1)(1000 - 1) =$
$= 1000^2 - 1^2 = 1000000 - 1 = 999999$.

2.10. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\alpha\beta = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2$.

Λύση

Για να αποδείξουμε την ταυτότητα, θα πρέπει να ξεκινήσουμε από το 2ο μέλος.

Έχουμε $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{4} - \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{4} =$

$$= \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2}{4} = \frac{4\alpha\beta}{4} = \alpha\beta.$$

2.11. Αν $2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2$, **να αποδείξετε ότι** $\alpha = \beta$.

Λύση

Έχουμε $2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow$
$(\alpha - \beta)^2 = 0$, οπότε $\alpha - \beta = 0$ ή $\alpha = \beta$.

2.12. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\beta^2 - \alpha\gamma)$.

Λύση

Για να εμφανίσουμε το άθροισμα των τετραγώνων, υψώνουμε την ισότητα $\alpha + \beta + \gamma = 0$ στο τετράγωνο.

Έχουμε $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow$
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma \Leftrightarrow$
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2\beta(\alpha + \gamma) - 2\alpha\gamma = 0$,
όμως $\alpha + \gamma = -\beta$, οπότε είναι:
$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2\beta(-\beta) - 2\alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\beta^2 - \alpha\gamma)$.

2.13. Αν $\alpha^2 - 2\alpha + \beta^2 - 2\beta + 2 = 0$, να υπολογιστούν οι αριθμοί α, β.

Λύση

Έχουμε $\alpha^2 - 2\alpha + \beta^2 - 2\beta + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 + \beta^2 - 2\beta + 1 = 0 \Leftrightarrow$
$(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2 = 0$, επομένως $\alpha - 1 = 0$ και $\beta - 1 = 0$, δηλαδή:
$\alpha = \beta = 1$.

2.14. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $10x^3y^2\omega - 15x^4y^3\omega\beta^2$

β) $5\alpha^3 - 4\beta^3 + 10\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta$

γ) $25x^2 - 10xy + y^2$

δ) $x^2 - 5x + 4$

ε) $x^3 + 8$

στ) $16\alpha^4 - 1$

ζ) $x^4 + 4y^4$

Λύση

Αρκεί να εφαρμόσουμε τις μεθόδους παραγοντοποίησης.

Έχουμε:

α) $10x^3y^2\omega - 15x^4y^3\omega\beta^2 = 5x^3y^2\omega(2 - 3xy\beta^2)$.

β) $5\alpha^3 - 4\beta^3 + 10\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta = 5\alpha(\alpha^2 + 2\beta^2) - 2\beta(2\beta^2 + \alpha^2) =$
$= (\alpha^2 + 2\beta^2)(5\alpha - 2\beta)$.

γ) $25x^2 - 10xy + y^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5xy + y^2 = (5x - y)^2$.

δ) $x^2 - 5x + 4 = x^2 - x - 4x + 4 = x(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x-4)$.

ε) $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$.

στ) $16\alpha^4 - 1 = (4\alpha^2)^2 - 1 = (4\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 + 1) = (2\alpha - 1)(2\alpha + 1)(4\alpha^2 + 1)$.

ζ) $x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2x^2 \cdot 2y^2 - 2x^2 \cdot 2y^2 =$
$= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 =$
$= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$.

2.15. Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A = (2\tau - 3\alpha)^3 + (2\tau - 3\beta)^3 + (2\tau - 3\gamma)^3$, αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου και 2τ η περίμετρός του.

Λύση

Το άθροισμα των τριών κύβων μάς θυμίζει την ταυτότητα του Euler.

Θέτουμε $x = 2\tau - 3\alpha$, $y = 2\tau - 3\beta$ και $\omega = 2\tau - 3\gamma$.
Τότε $x + y + \omega = 6\tau - 3(\alpha + \beta + \gamma) = 6\tau - 3 \cdot 2\tau = 0$,
οπότε η παράσταση γίνεται $A = x^3 + y^3 + \omega^3 = 3xy\omega$, σύμφωνα με την ταυτότητα Euler.
Άρα $A = 3(2\tau - 3\alpha)(2\tau - 3\beta)(2\tau - 3\gamma)$.

2.16. Αφού βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις, στη συνέχεια να απλοποιηθούν.

α) $\dfrac{x^2 - 2x - 2\beta x + 4\beta}{x^2 - 4}$ **β)** $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}$

γ) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ **δ)** $\left(x - \dfrac{4}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{(x+2)^3}$

Λύση

Αρκεί να παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή.
Δεν ξεχνάμε τους περιορισμούς.

α) Θα πρέπει $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x - 2 \neq 0$ και $x + 2 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 2$ και $x \neq -2$.

Είναι $\dfrac{x^2 - 2x - 2\beta x + 4\beta}{x^2 - 4} = \dfrac{x(x-2) - 2\beta(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$

$= \dfrac{(x-2)(x-2\beta)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x - 2\beta}{x+2}$.

β) Πρέπει $x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 1$.

Είναι $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x} = \dfrac{x(x^2 - 2x + 1)}{x(x-1)} = \dfrac{x(x-1)^2}{x(x-1)} = x - 1$.

γ) Θα πρέπει $x + 1 \neq 0$ και $x^3 - 1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -1$ και $x^3 \neq 1$, δηλαδή $x \neq -1$ και $x \neq 1$.

Έχουμε $\dfrac{x^2 + x + 1}{x+1} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \dfrac{x^2 + x + 1}{x+1} \cdot \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = 1$.

δ) Πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -2$.

Έχουμε $\left(x - \dfrac{4}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{(x+2)^3} = \left(\dfrac{x^2 - 4}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{(x+2)^3} =$

$= \dfrac{[(x-2)(x+2)]^2}{x^2} \cdot \dfrac{x(x+2)}{(x+2)^3} = \dfrac{(x-2)^2(x+2)^2}{x^2} \cdot \dfrac{x(x+2)}{(x+2)^3} =$

$= \dfrac{(x-2)^2}{x}$.

2.17. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (1) και $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ (2), να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 1$ (3)

Λύση

Πρόκειται για ταυτότητα που εξαρτάται από άλλες συνθήκες.

Έχουμε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} 1(1 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = 1 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$, (ταυτότητα Euler).

Για να ισχύει η (3), αρκεί $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$.

Πραγματικά, από την (1) είναι:

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 1^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$1 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 1$ ή $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$.

2.18. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $999^5 + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 100.

β) Ο αριθμός 63 διαιρεί τον $8^{12} - 1$.

γ) Ο αριθμός $x^2 - 2x + 1$ διαιρεί τον $x^7 - x^6 - x + 1$.

Λύση

Αρκεί να θυμηθούμε ότι ο αριθμός α θα διαιρεί τον αριθμό β, όταν $\beta = \alpha\kappa$.

α) Έχουμε $999^5 + 1 = 999^5 + 1^5 = (999 + 1)(999^4 - 999^3 + 999^2 - 999 + 1) =$
$= 1000\kappa = 100 \cdot 10\kappa$, πολλαπλάσιο του 100.

β) Έχουμε $8^{12} - 1 = (8^2)^6 - 1 = 64^6 - 1^6 = (64 - 1)(64^5 + ... + 1) =$
$= 63\lambda$, πολλαπλάσιο του 63.

γ) Έχουμε $x^7 - x^6 - x + 1 = x^6(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^6 - 1) =$
$= (x - 1)(x - 1)(x^5 + x^4 + ... + 1) = (x - 1)^2(x^5 + ... + 1)$.
Άρα ο $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ διαιρεί τον $x^7 - x^6 - x + 1$.

2.19. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:

α) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

β) $(\alpha - \beta)^3 + 3(\alpha - \beta)^2(\alpha + \beta) + 3(\alpha + \beta)^2(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)^3 = 8\alpha^3$

γ) $(\alpha - \beta)^3 + (\beta - \gamma)^3 + (\gamma - \alpha)^3 = 3(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$

Λύση

α) Έχουμε $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \Leftrightarrow \alpha^3 - \beta^3 =$
$= (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$.

β) Θέτουμε $\alpha - \beta = x$, $\alpha + \beta = y$. Τότε το 1ο μέλος γράφεται:
$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3 = (\alpha - \beta + \alpha + \beta)^3 = (2\alpha)^3 = 8\alpha^3$.

γ) Επειδή $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) = 0$, από την ταυτότητα Euler έχουμε
$(\alpha - \beta)^3 + (\beta - \gamma)^3 + (\gamma - \alpha)^3 = 3(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$.

2.20. **Να γίνουν οι πράξεις:**

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

Λύση

Είναι $\dfrac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\dfrac{\beta}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}+\dfrac{\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=$

$$=\frac{\alpha(\beta-\gamma)-\beta(\alpha-\gamma)+\gamma(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=\frac{\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma-\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}=0.$$

2.21. **Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί, όπου $x, y \neq 0$, με $x+y=8$ και $xy=10$. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:**

α) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ **β)** $x^4+y^4+x^2y^2$ **γ)** $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}$

Λύση

Αρκεί μετά τις πράξεις να εμφανιστούν μόνο οι μορφές $x+y$ και xy.

α) Είναι $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\dfrac{8^2-2\cdot10}{10}=\dfrac{44}{10}=\dfrac{22}{5}$.

β) $x^4+y^4+x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+x^2y^2=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=[(x+y)^2-2xy]^2-(xy)^2=(8^2-2\cdot10)^2-10^2=$

$=44^2-10^2=1936-100=1836.$

γ) $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{x^3+y^3}{x^2y^2}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(xy)^2}=\dfrac{8^3-3\cdot10\cdot8}{10^2}=$

$=\dfrac{512-240}{100}=2{,}72.$

2.22. **Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:**

α) x^3-x^2+2

β) $x(x-2)-(y^2-1)$

γ) $xy(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(x^2+y^2)$

δ) $(\alpha-\beta)\alpha\beta+(\beta-\gamma)\beta\gamma+(\gamma-\alpha)\gamma\alpha$

Λύση

α) Είναι $x^3 - x^2 + 2 = x^3 - x^2 + 1 + 1 = (x^3 + 1) - (x^2 - 1) =$
$= (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x - 1) =$
$= (x + 1)(x^2 - x + 1 - x + 1) = (x + 1)(x^2 - 2x + 2).$

β) Έχουμε $x(x - 2) - (y^2 - 1) = x^2 - 2x - y^2 + 1 =$
$= (x^2 - 2x + 1) - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 - y)(x - 1 + y).$

γ) Είναι $xy\alpha^2 + xy\beta^2 + \alpha\beta x^2 + \alpha\beta y^2 = \alpha x(\alpha y + \beta x) + \beta y(\beta x + \alpha y) =$
$= (\alpha y + \beta x)(\alpha x + \beta y).$

δ) Έχουμε (κρατάμε συνήθως σταθερό τον 1ο όρο):
$(\alpha - \beta)\alpha\beta + \beta^2\gamma - \beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha - \alpha^2\gamma =$
$= (\alpha - \beta)\alpha\beta - \gamma(\alpha^2 - \beta^2) + \gamma^2(\alpha - \beta) =$
$= (\alpha - \beta)\alpha\beta - \gamma(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + \gamma^2(\alpha - \beta) =$
$= (\alpha - \beta)[\alpha\beta - \gamma(\alpha + \beta) + \gamma^2] = (\alpha - \beta)(\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma^2) =$
$= (\alpha - \beta)[\alpha(\beta - \gamma) - \gamma(\beta - \gamma)] = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma).$

2.23. Να αποδείξετε ότι $(2\alpha + \beta)^3 + (2\alpha - \beta)^3 = 4\alpha(4\alpha^2 + 3\beta^2)$.

Λύση

Παίρνουμε το 1ο μέλος, το οποίο μας θυμίζει την ταυτότητα:
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, *με* $x = 2\alpha + \beta$, $y = 2\alpha - \beta$.

Έχουμε $(2\alpha + \beta)^3 + (2\alpha - \beta)^3 =$
$= [(2\alpha + \beta) + (2\alpha - \beta)][(2\alpha + \beta)^2 - (2\alpha + \beta)(2\alpha - \beta) + (2\alpha - \beta)^2] =$
$= 4\alpha[4\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta - (4\alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha\beta] =$
$= 4\alpha(4\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha^2 + \beta^2) = 4\alpha(4\alpha^2 + 3\beta^2).$

Ερωτησεις Κατανοησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ (Σ) Ή ΛΑΘΟΣ (Λ)

Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) ή το Λανθασμένο (Λ) των παρακάτω ισχυρισμών:

2.24. Ισχύει $(-1)^2 - (-1)^3 + (-1)^5 = -1$. Σ Λ

2.25. $(-0{,}2)^{13} \cdot 5^{13} = -1$. Σ Λ

2.26. $\dfrac{x^6 - 1}{x^3} = x^3 - 1$, $(x \neq 1)$. Σ Λ

2.27. $-\dfrac{1}{2^{-2}} = -4$. Σ Λ

2.28. $-4^2 = (-4)^2$. Σ Λ

2.29. $\dfrac{\alpha^7 + \alpha^3}{\alpha^{10}} = 1$ για κάθε $\alpha \neq 0$. Σ Λ

2.30. $(-5)^3 : 5^{-3} = 1$. Σ Λ

2.31. $2^{2022} - 2^{2021} = 2$. Σ Λ

2.32. Αν $\alpha^\nu = 1$, $\alpha \neq 0$ και ν άρτιος, τότε $\alpha = -1$ ή $\alpha = 1$. Σ Λ

2.33. $\alpha^{3^5} = \alpha^{15}$. Σ Λ

2.34. $-(-1)^0 = -1$. Σ Λ

2.35. $(\beta - \alpha)^3 = (\alpha - \beta)^3$. Σ Λ

2.36. $(x + 3)^3 = x^3 + 3^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σ Λ

2.37. $(x - y)(y + x) = x^2 - y^2$. Σ Λ

2.38. $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$. Σ Λ

2.39. $(-3\alpha - 2\beta)^2 = (3\alpha + 2\beta)^2$. Σ Λ

2.40. Αν α άρρητος και ρ ρητός, τότε $\alpha - \rho$ άρρητος. Σ Λ

2.41. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$. Σ Λ

2.42. Αν $\alpha^2 = \alpha\beta$, τότε $\alpha = \beta$. Σ Λ

2.43. $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α΄ Ομάδα

2.44. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $5(3^2 - 2) - (-1)^3 \cdot [-5 - 2(-3 + 1)] - (-2)^2$

β) $\dfrac{-2x^3\psi^3\omega(-7)x^{-1}\psi^4\omega^2}{4x^5(\psi^2\omega)^2}$

2.45. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων:

α) $\dfrac{(0,3)^7 \cdot 3^{-8}}{10^{-6}}$ **β)** $[(-3)^{24}(1{,}5)^{-25}] : 8^8$

2.46. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$A = -\dfrac{\alpha^2\beta^2}{2} - 2\alpha^3\beta + \dfrac{2\beta^{-3}}{\alpha^2}$, όταν $\alpha = -2$ και $\beta = \dfrac{1}{2}$

2.47. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$A = [(\alpha^{-3}\beta)^2 : (\alpha^3\beta)^{-3}]^{-1}$, όταν $\alpha = 2$ και $\beta = -1$

2.48. Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$ και $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$, να υπολογίσετε τα:

α) $102 \cdot 98$ **β)** 1002^2 **γ)** 99^2

2.49. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha + 2\beta)^2$ **β)** $(\alpha + 3\beta^3)^2$ **γ)** $(3x - 2y)(2y + 3x)$

δ) $\left(3x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ **ε)** $(9x^2 - 1)(9x^2 + 1)$ **στ)** $\left(\alpha^2 - \dfrac{3}{4}\right)\left(\alpha^2 + \dfrac{3}{4}\right)$

2.50. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha - 2\beta)^3$ **β)** $(\alpha - 2\beta + \gamma)^2$ **γ)** $(\alpha + \beta)^4$

δ) $(3x + 2y)^3$ **ε)** $(x^2 + x + 1)$ **στ)** $(1 - 2x)^3$

2.51. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$

β) $\alpha(\alpha - 3\beta)^2 + \beta(\beta - 3\alpha)^2 - (\alpha + \beta)^3 = 0$

2.52. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $\left(\dfrac{\alpha^2 + 1}{2}\right)^2 = \alpha^2 + \left(\dfrac{\alpha^2 - 1}{2}\right)^2$

β) $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)+1=(\alpha^2-3\alpha+1)^2$

2.53. Να απλοποιήσετε την παράσταση $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2=4$.

2.54. **α)** Να αποδείξετε ότι $(x-1)(x+1)(x^2+1)=x^4-1$.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $A=99\cdot 101\cdot 10001$.

2.55. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

α) $12\alpha^2\beta+6\alpha^3\beta^2-18\alpha^3\beta^4$

β) $\alpha\beta-4\alpha-3\beta+12$

γ) $9\alpha^2-25\beta^2$

δ) $8\alpha^3-27\beta^3$

ε) x^6+y^6

στ) $\alpha^2+6\alpha\beta+9\beta^2$

ζ) x^2+x-12

η) $x^3+x^2\neq x$

2.56. Να αναλυθούν σε γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

α) x^4-16y^4

β) $\alpha^4+\alpha^3-\alpha^2-\alpha$

γ) $(\alpha^2-\beta^2)^2-(\alpha-\beta)^2$

δ) $x^2+6x+9-\omega^2$

ε) x^5-x

στ) $(\alpha^2-9)^2-\alpha^2-6\alpha-9$

2.57. Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{(2x+1)^2-1}{x^2-1}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται.

β) Να απλοποιηθεί.

γ) Να βρεθεί η τιμή της A για $x=2$.

2.58. Να απλοποιηθούν οι παρακάτω παραστάσεις, αφού βρείτε πρώτα τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται:

α) $\dfrac{x^2-3x}{36x-12x^2}$ **β)** $\dfrac{3x^2-12}{x^2+4x+4}$ **γ)** $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x}\cdot\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}$

2.59. Να γίνουν οι πράξεις: $\dfrac{\alpha-7\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\dfrac{2}{\alpha+\beta}+\dfrac{3}{\alpha-\beta}$.

2.60. Έστω ρ ρητός αριθμός και α άρρητος. Να αποδείξετε ότι ο $\alpha-\rho$ είναι άρρητος.

2.61. Αν $\alpha + \beta + \gamma = 2$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$ **β)** $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4$

2.62. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\frac{4x+5y}{x-5y}=-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $y = 2x$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(2ο Θέμα Τράπεζας Θεμάτων)

Β΄ Ομάδα

2.63. Αν οι αριθμοί x, y είναι αντίστροφοι, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \left[(x^2y^3)^{-2}(xy^3)^4\right] : (x^3 : y^{-1})^{-3}$.

2.64. Αν ν ακέραιος, να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:
$A = 5\cdot(-1)^{\nu+6} - 5\cdot(-1)^{\nu+10}$
$B = 3\cdot(-1)^{\nu+3} - 5\cdot(-1)^{3\nu+1}$

2.65. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός 9 διαιρεί ακριβώς τον αριθμό $4^{2\nu} - 7^{\nu}$.

β) Το 4 διαιρεί τον αριθμό $3^{\kappa} + 1$, όπου κ φυσικός αριθμός $\kappa \geq 1$.

2.66. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $(x-3)^3 + (1-2x)^3 + (2+x)^3 = 0$

β) $(2x-4)^3 + (3-x)^3 + (1-x)^3 = 2(2x-4)(3-x)(1-x)$

2.67. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ **β)** $x^3 + 4x^2 + x - 6$

γ) $(x-2)^3 + (2y+1)^3 + (4-\omega)^3$, όταν $x + 2y + 3 = \omega$

δ) $x^5 + x + 1$ **ε)** $x(y^2 + \omega^2 - x^2) + y(\omega^2 + x^2 - y^2)$

2.68. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\beta-\alpha},\ \text{όπου } \alpha \neq \pm\beta,\ \alpha \neq -\frac{\beta}{2}$$

2.69. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha^3+\alpha^2-9\alpha-9}{(\alpha^3-\alpha)(\alpha-3)}$ **β)** $\dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^2}\cdot\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

γ) $\dfrac{\alpha^2+4\alpha+4}{\alpha x-\alpha y}:\left(\dfrac{\alpha^2x-\alpha^2y}{\alpha^2+2\alpha}\right)^{-1}$ **δ)** $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}:\left(\dfrac{x^2}{x+y}+y\right)$

2.70. Αν α, $\beta\neq 0$ και $(\alpha+\beta)\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)=4$, να αποδείξετε ότι α = β.

2.71. Αν x + y = 3 και xy = 1, να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

α) x^2+y^2 **β)** x^3+y^3 **γ)** x^4+y^4

δ) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$ **ε)** $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}$

2.72. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$, με β, $\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

2.73. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2+9\beta^2-2\alpha+6\beta-6\alpha\beta$ **β)** $2x^2+3xy+y^2$

γ) $\alpha^4+4\beta^4-5\alpha^2\beta^2$ **δ)** $\alpha^3+5\alpha^2+3\alpha-9$

ε) x^3+2x-3 **στ)** $x^2+y^2+2xy-3x-3y+2$

2.74. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράγωνο ενός περιττού αριθμού είναι επίσης περιττός ακέραιος.

β) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο περιττών ακεραίων είναι άρτιος.

2.75. Αν α + β + γ =0 και $\alpha^3+\beta^3=\gamma^3$, με $\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι $\gamma^2=\dfrac{3\alpha\beta}{2}$.

2.76. Αν $\alpha=\kappa^2+\lambda^2$ και $\beta=\mu^2+\nu^2$, όπου κ, μ, λ, $\nu\in\mathbb{Z}$, να αποδείξετε ότι το γινόμενο αβ γράφεται ως άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων.

2.77. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta}=\alpha-\beta$,

$(\alpha+\beta\neq 0,\ \alpha+\beta\neq 1)$.

(Θέμα Διαγωνισμού ΘΑΛΗ ΕΜΕ)

2.78. **α)** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{(x+3)(x-2)(x+1)-3x^2+8x+3}{x^2+3}=x-1$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{2024\cdot 2019\cdot 2022-3\cdot 2021^2+8\cdot 2021+3}{2021^2+3}.$$

2.79. **α)** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^3-\alpha^2-\alpha-2}{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}=\dfrac{\alpha-2}{\alpha+2}$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{998^3-998^2-1000}{998^3+3\cdot 998^2+2\cdot 996}.$$

2.80. Αν $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1}+\dfrac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1}+\dfrac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1}=1$.

2.81. Αν α, β, γ διαφορετικοί ανά δύο και $\alpha\beta\gamma\neq 0$, με $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}+\dfrac{1}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}+\dfrac{1}{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}=0$

β) $\dfrac{\alpha^2}{2\alpha^2+\beta\gamma}+\dfrac{\beta^2}{2\beta^2+\gamma\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{2\gamma^2+\alpha\beta}=1$

2.82. **α)** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}=\dfrac{1}{\nu}-\dfrac{1}{\nu+1}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{2021\cdot 2022}$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Α. Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) ή το Λανθασμένο (Λ) των παρακάτω ισχυρισμών για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y:

α) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$. **Σ Λ**

β) $(-x+y)^3=-(x-y)^3$. **Σ Λ**

γ) $(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)=\alpha^2-\beta^2$. **Σ Λ**

δ) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}=\alpha^2+\beta^2$ $(\alpha\neq-\beta)$. **Σ Λ**

(Μονάδες 20)

Β. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(3+\ldots\ldots)^2=\ldots\ldots+\ldots\ldots+25x^2$.

β) $(3x-\ldots\ldots)(\ldots\ldots+3x)=\ldots\ldots-1$.

(Μονάδες 20)

Θέμα 2ο

Α. Να παραγοντοποιηθούν:

α) $x^2-6x+9=$

β) $4x^2-9y^2=$

γ) $(2x-1)^2-1=$

δ) $x^3-4x=$

(Μονάδες 40)

Β. Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^3+x=0$$

(Μονάδες 10)

Θέμα 3ο

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{3\alpha-3\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma}{\alpha^2-\alpha\beta}$$

(Μονάδες 10)

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Θέμα Α

Να σημειώσετε το Σωστό (Σ) ή το Λανθασμένο (Λ) των παρακάτω ισχυρισμών:

α) $(-1)^{2\nu} + (-1)^{2\nu+3} = 0,\ \nu \in \mathbb{N}$. **Σ Λ**

β) $-\dfrac{1}{3^{-2}} = 9$. **Σ Λ**

γ) $(\alpha - \beta)^4 = (\beta - \alpha)^4,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. **Σ Λ**

δ) $x^3 - 1 = (x - 1)^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **Σ Λ**

ε) $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} = \alpha + \beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq -\beta$. **Σ Λ**

(Μονάδες 10)

Θέμα Β

Αν x, y είναι αντίστροφοι αριθμοί, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

Β1. $A = x^{-5}y^{-5}$

Β2. $B = [(x^3y^2)^{-1}(xy^2)^3]x^4 - 2(x^{-1}y^2)^{-2} : y^{-6}$

(Μονάδες 15 + 15)

Θέμα Γ

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha^{-3}+1} + \frac{1}{\alpha^3+1} - \frac{1}{\alpha^{-6}+1} - \frac{1}{\alpha^6+1} = 0$$

Γ2. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{3\alpha}{\alpha^2-\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2+\alpha} - \frac{3\alpha-1}{\alpha^2-1}$$

(Μονάδες 15 + 15)

Θέμα Δ

Δ1. Να γίνει γινόμενο η παράσταση $\alpha^4 + 4\beta^4$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha^4+4\beta^4}{(\alpha-\beta)^2+\beta^2} - (\alpha+\beta)^2 = \beta^2$.

Δ3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{999^4+4}{998^2+1} - 1000^2$.

(Μονάδες 10 + 10 + 10)

3. Διάταξη πραγματικών αριθμών

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β. Τότε ορίζουμε:
$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$. Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\alpha \geq \beta$.

Άμεσα προκύπτουν:

- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, τότε $\alpha + \beta > 0$.
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, τότε $\alpha + \beta < 0$.
- Αν α, β ομόσημοι, τότε $\alpha\beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$.
- Αν α, β ετερόσημοι, τότε $\alpha\beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$.
- Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^2 \geq 0$.

Ακόμη ισχύουν οι ισοδυναμίες: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$,
$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

Ιδιότητες Ανισοτήτων	
Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$.	Αν $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$, τότε $\alpha < \gamma$.
$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.	$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$.
Αν $\gamma > 0$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$.	Αν $\gamma < 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$.
Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha + \gamma < \beta + \delta$.	

Για **θετικούς αριθμούς** α, β, γ ισχύουν:

- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$.
- Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha\gamma < \beta\delta$.
- Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$ και $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu < \beta^\nu$, ν φυσικός $\neq 0$.
- Αν $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$, ν φυσικός $\neq 0$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Δε διαιρούμε και δεν αφαιρούμε ομοιόστροφες ανισότητες κατά μέλη.

Παράδειγμα

Αν ισχύει $2 < x < 3$ και $1 < y < 2$, είναι **λάθος** να γράψουμε

$2 - 1 < x - y < 3 - 2$ και $\frac{2}{1} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}$.

Σε αυτή την περίπτωση εργαζόμαστε ως εξής:

$\left.\begin{array}{l} 2 < x < 3 \\ -2 < -y < -1 \end{array}\right\}$, οπότε $0 < x - y < 2$ (προσθέτουμε κατά μέλη).

$\left.\begin{array}{l} 2 < x < 3 \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{y} < 1 \end{array}\right\}$, άρα $2 \cdot \frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 3$ ή $1 < \frac{x}{y} < 3$ (πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη).

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να αποδείξουμε μία ανισότητα της μορφής $A \geq B$, αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά $A - B$ είναι **μη αρνητική**.

Παράδειγμα

Ισχύει $x^2 + 4 \geq 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού έχουμε:

$x^2 + 4 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Βασικές εφαρμογές

1. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$.

2. Αν α, β είναι ομόσημοι, τότε ισχύει $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

3. Άθροισμα αντιστρόφων

α) $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ (το ίσον ισχύει μόνο για $\alpha = 1$).

β) $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ (το ίσον ισχύει μόνο για $\alpha = -1$).

Απόδειξη

1. Είναι $\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.
2. Επειδή α, β ομόσημοι, άρα $\alpha\beta>0$. Επομένως είναι:

   $\alpha<\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha\beta}<\dfrac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta}<\dfrac{1}{\alpha}$.

3. **α)** Αφού α > 0, είναι $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geq 2 \Leftrightarrow \alpha\alpha+\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}\geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1-2\alpha\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2\geq 0$,

   που ισχύει. Είναι $(\alpha-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

   β) Έχουμε α < 0, άρα $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\leq -2 \Leftrightarrow \alpha\alpha+\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}\geq -2\alpha \Leftrightarrow$

   $\alpha^2+1+2\alpha\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\geq 0$, που ισχύει. Είναι $(\alpha+1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$.

Διαστήματα

- Οι πραγματικοί αριθμοί x, για τους οποίους ισχύει η ιδιότητα $\alpha \leq x \leq \beta$, είναι ένα σύνολο αριθμών που συμβολίζεται με $[\alpha, \beta]$ και λέγεται **κλειστό διάστημα** από το α μέχρι το β. Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία $\mathbf{x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha \leq x \leq \beta}$.

- Το σύνολο των αριθμών x, για τους οποίους ισχύει α < x < β, λέγεται **ανοικτό διάστημα** από το α μέχρι το β και συμβολίζεται με (α, β). Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία $\mathbf{x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha < x < \beta}$.

  Εκτός από τα δύο αυτά σύνολα, έχουμε και:

- το ανοικτό από δεξιά:
  $\mathbf{x \in [\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha \leq x < \beta}$
- το ανοικτό από αριστερά:
  $\mathbf{x \in (\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha < x \leq \beta}$

Σχηματική παράσταση των διαστημάτων

Τα προηγούμενα σύνολα μπορεί να παρουσιαστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών ως εξής: