

Ε Δημοτικού

ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ
ΠΑΤΑΚΗΣ

Β. Καραγιάννης
Γ. Καραγιάννης
Μ. Καραγιάννης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' τόμος



Περιλαμβάνει τις **λύσεις** των ασκήσεων των **ενοτήτων 5, 6, 7, 8** των σχολικών **Βιβλίων μαθητή** και **Τετραδίων εργασιών** τις οποίες συνέγραψε η Μαρία Πριοβόλου



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΑΤΑΚΗ
για το Δημοτικό

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ενότητα 5η

| | | |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------|----|
| Κεφάλαιο 25 | Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί | 9 |
| Κεφάλαιο 26 | Διάταξη δεκαδικών αριθμών – Αξία θέσης ψηφίου στους δεκαδικούς | 19 |
| Κεφάλαιο 27 | Η στρογγυλοποίηση στους δεκαδικούς αριθμούς | 27 |
| Κεφάλαιο 28 | Πρόσθεση και αφαίρεση με δεκαδικούς αριθμούς | 33 |
| Κεφάλαιο 29 | Ο πολλαπλασιασμός στους δεκαδικούς αριθμούς | 37 |
| Κεφάλαιο 30 | Η διαίρεση στους δεκαδικούς αριθμούς | 43 |
| Κεφάλαιο 31 | Η έννοια του ποσοστού | 52 |
| Κεφάλαιο 32 | Διαφορετικές εκφράσεις των αριθμών | 60 |
| 5ο Επαναληπτικό μάθημα | | 64 |
| 5ο Κριτήριο αξιολόγησης | | 72 |

Ενότητα 6η

| | | |
|-------------------------|----------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 33 | Οι αρνητικοί αριθμοί | 76 |
| Κεφάλαιο 34 | Γεωμετρικά και αριθμητικά μοτίβα | 84 |
| Κεφάλαιο 35 | Ισότητες και ανισότητες | 91 |
| 6ο Επαναληπτικό μάθημα | | 95 |
| 6ο Κριτήριο αξιολόγησης | | 100 |

Ενότητα 7η

| | | |
|-------------------------|-----------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 36 | Μετράω και σχεδιάζω σε κλίμακες | 103 |
| Κεφάλαιο 37 | Προσανατολισμός στον χώρο | 109 |
| Κεφάλαιο 38 | Είδη γωνιών | 114 |
| Κεφάλαιο 39 | Μέτρηση γωνιών | 119 |
| Κεφάλαιο 40 | Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες | 126 |
| Κεφάλαιο 41 | Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές | 133 |
| Κεφάλαιο 42 | Καθετότητα – Ύψη τριγώνου | 139 |
| Κεφάλαιο 43 | Συμμετρία | 145 |
| Κεφάλαιο 44 | Κύκλος – Μήκος κύκλου | 152 |
| 7ο Επαναληπτικό μάθημα | | 161 |
| 7ο Κριτήριο αξιολόγησης | | 169 |

Ενότητα 8η

| | | |
|-------------|-----------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 45 | Μονάδες μέτρησης του μήκους | 173 |
| Κεφάλαιο 46 | Γεωμετρικά σχήματα – Η περίμετρος | 179 |
| Κεφάλαιο 47 | Μονάδες μέτρησης της επιφάνειας | 187 |

| | | |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 48 | Εμβαδόν τετραγώνου, ορθογωνίου και ορθογώνιου τριγώνου..... | 196 |
| Κεφάλαιο 49 | Γεωμετρικά στερεά – Ο όγκος | 205 |
| Κεφάλαιο 50 | Μονάδες μέτρησης του όγκου και της χωρητικότητας..... | 210 |
| Κεφάλαιο 51 | Μονάδες μέτρησης της μάζας | 215 |
| Κεφάλαιο 52 | Μονάδες μέτρησης του χρόνου | 220 |
| 8ο Επαναληπτικό μάθημα | | 226 |
| 8ο Κριτήριο αξιολόγησης | | 232 |

Λύσεις των ασκήσεων και των προβλημάτων

| | | |
|------------|-------|-----|
| Ενότητα 5η | | 239 |
| Ενότητα 6η | | 265 |
| Ενότητα 7η | | 278 |
| Ενότητα 8η | | 298 |

Λύσεις των ασκήσεων των σχολικών βιβλίων

Ασκήσεις Βιβλίου μαθητή

Ενότητα 5η

| | |
|------------------------|-----------|
| Κεφάλαιο 25..... | 329 |
| Κεφάλαιο 26..... | 330 |
| Κεφάλαιο 27..... | 332 |
| Κεφάλαιο 28..... | 334 |
| Κεφάλαιο 29..... | 335 |
| Κεφάλαιο 30..... | 337 |
| Κεφάλαιο 31..... | 338 |
| Κεφάλαιο 32..... | 340 |
| 5ο Επαναληπτικό μάθημα | 342 |

Ενότητα 6η

| | |
|------------------------|-----------|
| Κεφάλαιο 33..... | 345 |
| Κεφάλαιο 34..... | 347 |
| Κεφάλαιο 35..... | 349 |
| 6ο Επαναληπτικό μάθημα | 350 |

Ενότητα 7η

| | |
|------------------|-----|
| Κεφάλαιο 36..... | 353 |
| Κεφάλαιο 37..... | 354 |
| Κεφάλαιο 38..... | 355 |
| Κεφάλαιο 39..... | 356 |
| Κεφάλαιο 40..... | 358 |
| Κεφάλαιο 41..... | 359 |

| | |
|------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 42..... | 360 |
| Κεφάλαιο 43..... | 362 |
| Κεφάλαιο 44..... | 363 |
| 7ο Επαναληπτικό μάθημα | 364 |

Ενότητα 8η

| | |
|------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 45..... | 366 |
| Κεφάλαιο 46..... | 367 |
| Κεφάλαιο 47..... | 369 |
| Κεφάλαιο 48..... | 370 |
| Κεφάλαιο 49..... | 372 |
| Κεφάλαιο 50..... | 373 |
| Κεφάλαιο 51..... | 375 |
| Κεφάλαιο 52..... | 376 |
| 8ο Επαναληπτικό μάθημα | 378 |

Ασκήσεις Τετραδίου εργασιών

Ενότητα 5η

| | |
|------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 25..... | 380 |
| Κεφάλαιο 26..... | 382 |
| Κεφάλαιο 27..... | 384 |
| Κεφάλαιο 28..... | 385 |
| Κεφάλαιο 29..... | 387 |
| Κεφάλαιο 30..... | 390 |
| Κεφάλαιο 31..... | 393 |
| Κεφάλαιο 32..... | 395 |
| 5ο Επαναληπτικό μάθημα | 397 |

Ενότητα 6η

| | |
|------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 33..... | 400 |
| Κεφάλαιο 34..... | 402 |
| Κεφάλαιο 35..... | 404 |
| 6ο Επαναληπτικό μάθημα | 406 |

Ενότητα 7η

| | |
|------------------|-----|
| Κεφάλαιο 36..... | 409 |
| Κεφάλαιο 37..... | 410 |
| Κεφάλαιο 38..... | 411 |
| Κεφάλαιο 39..... | 412 |
| Κεφάλαιο 40..... | 414 |
| Κεφάλαιο 41..... | 416 |
| Κεφάλαιο 42..... | 418 |

| | |
|------------------------------|-----|
| Κεφάλαιο 43..... | 420 |
| Κεφάλαιο 44..... | 422 |
| 7ο Επαναληπτικό μάθημα | 424 |
| Ενότητα 8η | |
| Κεφάλαιο 45..... | 426 |
| Κεφάλαιο 46..... | 428 |
| Κεφάλαιο 47..... | 430 |
| Κεφάλαιο 48..... | 433 |
| Κεφάλαιο 49..... | 436 |
| Κεφάλαιο 50..... | 439 |
| Κεφάλαιο 51..... | 441 |
| Κεφάλαιο 52..... | 443 |
| 8ο Επαναληπτικό μάθημα | 446 |
| Παράρτημα | 449 |

25.

Δεκαδικά κλάσματα – Δεκαδικοί αριθμοί

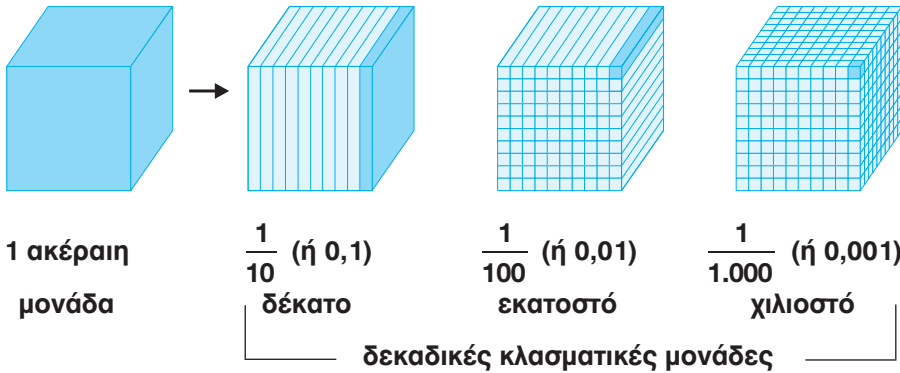


Βασικά σημεία θεωρίας



⇒ Δεκαδικά κλάσματα:

- Η **ακέραιη μονάδα** μπορεί να χωριστεί σε 10 ή 100 ή 1.000 κτλ. ίσα μέρη. Δηλαδή: $1 = 10 \text{ δέκ.} = 100 \text{ εκ.} = 1.000 \text{ χιλ.}$
- Οι **δεκαδικές κλασματικές μονάδες** είναι το ένα από τα δέκα ή εκατό ή χίλια κτλ. ίσα μέρη στα οποία χωρίζουμε την ακέραιη μονάδα. Π.χ.



- Για παράδειγμα, το μέτρο χωρίζεται σε 10 ίσα μέρη που λέγονται δεκατόμετρα, το ευρώ χωρίζεται σε 100 ίσα μέρη που λέγονται λεπτά, το κιλό χωρίζεται σε 1.000 ίσα μέρη που λέγονται γραμμάρια κτλ. Επομένως:

$$1 \text{ δέκ.} = \frac{1}{10} \text{ μ.}, 1 \text{ λ.} = \frac{1}{100} \text{ €}, 1 \text{ γραμμ.} = \frac{1}{1.000} \text{ κ.} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

- Οι δεκαδικές κλασματικές μονάδες έχουν παρονομαστή το 10 ή το 100 ή το 1.000 κτλ. και **από την επανάληψή τους** γίνονται τα **δεκαδικά κλάσματα**.

$$\text{Π.χ. } \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}, \quad \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} = 3 \times \frac{1}{100} = \frac{3}{100} \text{ κτλ.}$$

⇒ Δεκαδικοί αριθμοί:

- Οι δεκαδικοί αριθμοί αποτελούνται από **ένα ακέραιο** και **ένα δεκαδικό μέρος** που χωρίζονται μεταξύ τους με την **υποδιαστολή (,)**.
- Οι δεκαδικοί αριθμοί γίνονται από την **επανάληψη των δεκαδικών μονάδων** και εκφράζουν τις **δεκαδικές υποδιαιρέσεις της ακέραιης μονάδας**, δηλαδή

το ένα από τα δέκα ή εκατό ή χίλια κτλ. ίσα μέρη στα οποία χωρίζεται η ακέραιη μονάδα.

- Για παράδειγμα, ο δεκαδικός αριθμός **0,5** γίνεται από την επανάληψη της δεκαδικής μονάδας ένα δέκατο 5 φορές:

$$0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,5 \text{ ή } 5 \times 0,1 = 0,5$$

Κατά τον ίδιο τρόπο ο δεκαδικός αριθμός **0,05** γίνεται από την επανάληψη της δεκαδικής μονάδας ένα εκατοστό 5 φορές:

$$0,01 + 0,01 + 0,01 + 0,01 + 0,01 = 0,05 \text{ ή } 5 \times 0,01 = 0,05 \text{ κ.ο.κ.}$$

⇒ Όπως οι φυσικοί, έτσι και οι δεκαδικοί αριθμοί σχηματίζονται από **μονάδες διαφόρων τάξεων στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.**

- Σ' έναν δεκαδικό αριθμό **ένα ψηφίο, ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται μέσα στον αριθμό, έχει διαφορετική αξία.** Στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούμε τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος **κάθε τάξη είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την αμέσως επόμενη της** (προς τα δεξιά) και **10 φορές μικρότερη από την προηγούμενή της** (προς τα αριστερά).

Για παράδειγμα, στον δεκαδικό αριθμό **222,222** το ψηφίο **2** έχει **διαφορετική αξία**, λόγω της **διαφορετικής του θέσης** μέσα στον αριθμό, και διαβάζεται διαφορετικά.

| ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ | | | ΥΠΟΛΟΙΣΤΩΝ | ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ | | |
|---------------|------|-----|------------|------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| × 100 | × 10 | × 1 | | × $\frac{1}{10}$ ή 0,1 | × $\frac{1}{100}$ ή 0,01 | × $\frac{1}{1.000}$ ή 0,001 |
| Ε | Δ | Μ | , | δ | ε | χ |
| 2 | 2 | 2 | , | 2 | 2 | 2 |

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 222,222 &= 2E + 2\Delta + 2M + 2\delta + 2\varepsilon + 2\chi = \\
 &= 2 \times 100 + 2 \times 10 + 2 \times 1 + 2 \times 0,1 + 2 \times 0,01 + 2 \times 0,001 = \\
 &= 200 + 20 + 2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 = \\
 &= \underbrace{200 + 20 + 2}_{222 \text{ ακέραιες μονάδες}} + \underbrace{0,200 + 0,020 + 0,002}_{222 \text{ χιλιοστά}} =
 \end{aligned}$$



- ⇒ Για να διαβάσουμε έναν δεκαδικό αριθμό, διαβάζουμε πρώτα όλο το ακέραιο μέρος του αριθμού, λέμε τη λέξη «και» και μετά διαβάζουμε όλο το δεκαδικό μέρος με το όνομα του **τελευταίου δεκαδικού ψηφίου.**

- Π.χ. 2,35 \Rightarrow 2 ακέραιος και 35 εκατοστά
 12,125 \Rightarrow 12 ακέραιος και 125 χιλιοστά
 4,05 \Rightarrow 4 ακέραιος και 5 εκατοστά κ.ο.κ.
- Όταν το ακέραιο μέρος είναι 0, **δεν το διαβάζουμε**.
 Π.χ. 0,425 \Rightarrow 425 χιλιοστά



- ⇒ Για να **γράψουμε έναν δεκαδικό αριθμό**, προσέχουμε τα εξής:
 - Όταν ακούμε ότι ο δεκαδικός αριθμός έχει **δέκατα**, τότε το δεκαδικό του μέρος θα έχει **1 ψηφίο**, όταν ακούμε ότι έχει **εκατοστά**, τότε το δεκαδικό του μέρος θα έχει **2 ψηφία**, όταν ακούμε ότι έχει **χιλιοστά**, τότε το δεκαδικό του μέρος θα έχει **3 ψηφία** κ.ο.κ. Έτσι λοιπόν δε θα ξεχνάμε, όταν χρειάζεται, να **συμπληρώνουμε τα ανάλογα μηδενικά μετά την υποδιαστολή**.
 Π.χ. – Ο δεκαδικός αριθμός **πέντε και έξι χιλιοστά** γράφεται **5,006**.
 – Ο δεκαδικός αριθμός **πέντε και έξι εκατοστά** γράφεται **5,06**.
 - Όταν στον δεκαδικό αριθμό δεν υπάρχουν ακέραιες μονάδες, τότε βάζουμε υποχρεωτικά **το μηδέν**.
 Π.χ. ο δεκαδικός αριθμός **πέντε χιλιοστά** γράφεται **0,005** κ.ο.κ.
- ⇒ Η αξία ενός δεκαδικού αριθμού **δεν αλλάζει**, αν στο τέλος του **προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε** (αν έχει) όσα μηδενικά θέλουμε.
 Π.χ. 4,5 μ. = 4,50 μ. = 4,500 μ., και αντίστροφα:
 2,500 κ. = 2,50 κ. = 2,5 κ.
 - Κάθε φυσικό αριθμό μπορούμε να τον μετατρέψουμε σε δεκαδικό, αν βάλουμε στο **τέλος του υποδιαστολή** και προσθέσουμε κατόπιν όσα μηδενικά θέλουμε.
 Π.χ. 4 μ. \Rightarrow 4,0 μ. \Rightarrow 4,00 μ. \Rightarrow 4,000 μ. κ.ο.κ.
- ⇒ Τα **δεκαδικά κλάσματα** είναι δυνατόν να γραφτούν ως **δεκαδικοί αριθμοί** και οι **δεκαδικοί αριθμοί** ως **δεκαδικά κλάσματα**.
 - Για να **γράψουμε ένα δεκαδικό κλάσμα ως δεκαδικό αριθμό**, γράφουμε μόνο τον αριθμητή του και χωρίζουμε με υποδιαστολή τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής. (Αν δεν επαρκούν τα δεκαδικά ψηφία, συμπληρώνουμε με μηδενικά.)
 Π.χ. $\frac{8}{10} = 0,8$ | $\frac{8}{100} = 0,08$ | $\frac{8}{1.000} = 0,008$ | $\frac{48}{1.000} = 0,048$ | $\frac{18}{10} = 1,8$ κ.ο.κ.
 - Για να **γράψουμε έναν δεκαδικό αριθμό ως δεκαδικό κλάσμα**, γράφουμε όλο τον αριθμό, χωρίς την υποδιαστολή, στη θέση του αριθμητή και στη θέση του παρονομαστή γράφουμε τον αριθμό 1 με τόσα μηδενικά, όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

Π.χ. $0,5 = \frac{5}{10}$ | $0,05 = \frac{5}{100}$ | $0,005 = \frac{5}{1.000}$ | $0,25 = \frac{25}{100}$ | $1,5 = \frac{15}{10}$ κ.ο.κ.

- Ο δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή μεικτού αριθμού.

Π.χ. $1,5 = \frac{15}{10} = 1\frac{5}{10}$.

- Για τη μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό και αντίστροφα βλέπε Κεφάλαιο 15.

⇒ **Αντιστοιχία δεκαδικών κλασμάτων – δεκαδικών αριθμών:**

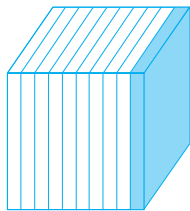


Αφού:

1 ακέραιη μονάδα = 10 δέκατα = 100 εκατοστά = 1.000 χιλιοστά
 1 δέκατο = 10 εκατοστά = 100 χιλιοστά
 1 εκατοστό = 10 χιλιοστά

τότε:

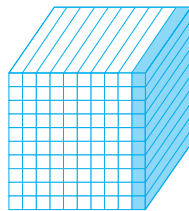
π.χ. τι μέρος του όλου (Ο) είναι χρωματισμένο (Χ) και τι αχρωμάτιστο (Α);



(Ο) $\frac{10}{10}$ ή 1,0

(Χ) $\frac{1}{10}$ ή 0,1

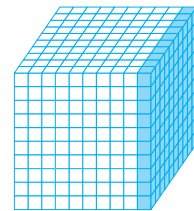
(Α) $\frac{9}{10}$ ή 0,9



(Ο) $\frac{100}{100}$ ή 1,00

(Χ) $\frac{10}{100}$ ή 0,10

(Α) $\frac{90}{100}$ ή 0,90



(Ο) $\frac{1.000}{1.000}$ ή 1,000

(Χ) $\frac{100}{1.000}$ ή 0,100

(Α) $\frac{900}{1.000}$ ή 0,900

Έτσι, με βάση τα σχήματα έχουμε τις ισότητες:

(Ο) $\frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \frac{1.000}{1.000}$

(Χ) $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1.000}$

(Α) $\frac{9}{10} = \frac{90}{100} = \frac{900}{1.000}$

ή $1,0 = 1,00 = 1,000$

ή $0,1 = 0,10 = 0,100$

ή $0,9 = 0,90 = 0,900$

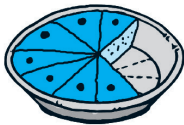
- Μελέτησε προσεκτικά την αριθμογραμμή της επόμενης σελίδας, στην οποία φαίνεται η αντιστοιχία δεκαδικών κλασμάτων και (ισοδύναμων) δεκαδικών αριθμών.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | $\frac{100}{1.000}$ | $\frac{200}{1.000}$ | $\frac{300}{1.000}$ | $\frac{400}{1.000}$ | $\frac{500}{1.000}$ | $\frac{600}{1.000}$ | $\frac{700}{1.000}$ | $\frac{800}{1.000}$ | $\frac{900}{1.000}$ | $\frac{1.000}{1.000}$ | $\frac{1.100}{1.000}$ | $\frac{1.200}{1.000}$ |
| | $\frac{10}{100}$ | $\frac{20}{100}$ | $\frac{30}{100}$ | $\frac{40}{100}$ | $\frac{50}{100}$ | $\frac{60}{100}$ | $\frac{70}{100}$ | $\frac{80}{100}$ | $\frac{90}{100}$ | $\frac{100}{100}$ | $\frac{110}{100}$ | $\frac{120}{100}$ |
| 0 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{8}{10}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{10}{10}$ | $\frac{11}{10}$ | $\frac{12}{10}$ |
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,2 |
| | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 1,00 | 1,10 | 1,20 |
| | 0,100 | 0,200 | 0,300 | 0,400 | 0,500 | 0,600 | 0,700 | 0,800 | 0,900 | 1,000 | 1,100 | 1,200 |

 **Ασκήσεις εμπέδωσης**

25.1 Γράφω με δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικό αριθμό τι μέρος της ακέрайης μονάδας πήραμε και τι μέρος έμεινε (σε κάθε περίπτωση):

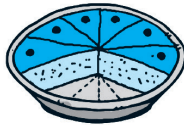
α.



Πήραμε: — ή

Έμεινε: — ή

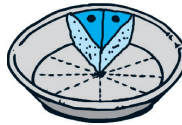
β.



— ή

— ή

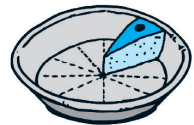
γ.



— ή

— ή

δ.

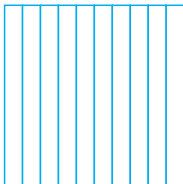


— ή

— ή

25.2 Χρωματίζω το μέρος που δηλώνει το αντίστοιχο δεκαδικό κλάσμα ή ο δεκαδικός αριθμός. Ύστερα γράφω με δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικό αριθμό τι μέρος έμεινε αχρωμάτιστο:

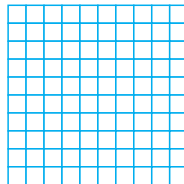
α.



0,5 ή $\frac{5}{10}$

..... ή —

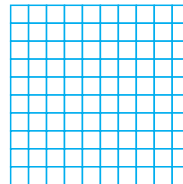
β.



0,50 ή $\frac{50}{100}$

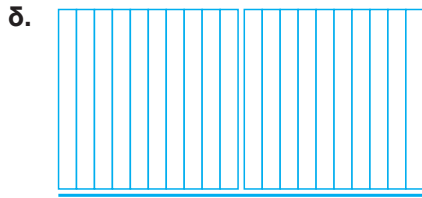
..... ή —

γ.



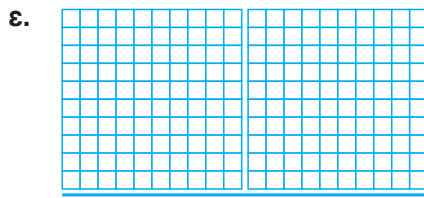
0,05 ή $\frac{5}{100}$

..... ή —



$$1,5 \text{ ή } \frac{15}{10}$$

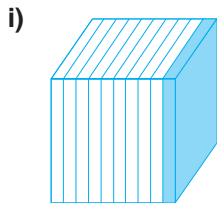
..... ή —



$$1,50 \text{ ή } \frac{150}{100}$$

..... ή —

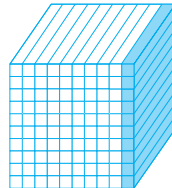
25.3 α. Γράφω με δεκαδικούς αριθμούς και δεκαδικά κλάσματα το μέρος που είναι χρωματισμένο (X), το μέρος που είναι αχρωμάτιστο (A) και το όλο (O) σε κάθε περίπτωση:



(X) ή —

(A) ή —

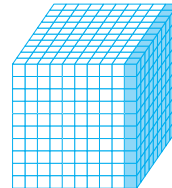
(O) ή —



(X) ή —

(A) ή —

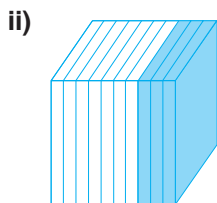
(O) ή —



(X) ή —

(A) ή —

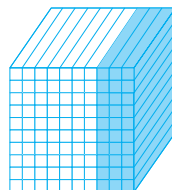
(O) ή —



(X) ή —

(A) ή —

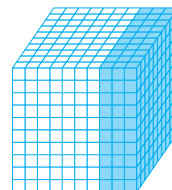
(O) ή —



(X) ή —

(A) ή —

(O) ή —



(X) ή —

(A) ή —

(O) ή —

β. Γράφω τις ισότητες με τα δεκαδικά κλάσματα και τους δεκαδικούς αριθμούς από το ερώτημα α που εκφράζουν τις ίδιες ποσότητες σε κάθε περίπτωση:

i) (X) $\frac{1}{10} = \text{---} = \text{---}$ ή
 $0,1 = \text{.....} = \text{.....}$,

(A) $\frac{9}{10} = \text{---} = \text{---}$ ή
 $\text{.....} = \text{.....} = \text{.....}$,

(O) $\frac{10}{10} = \text{---} = \text{---}$ ή
 $1,0 = \text{.....} = \text{.....}$, ή

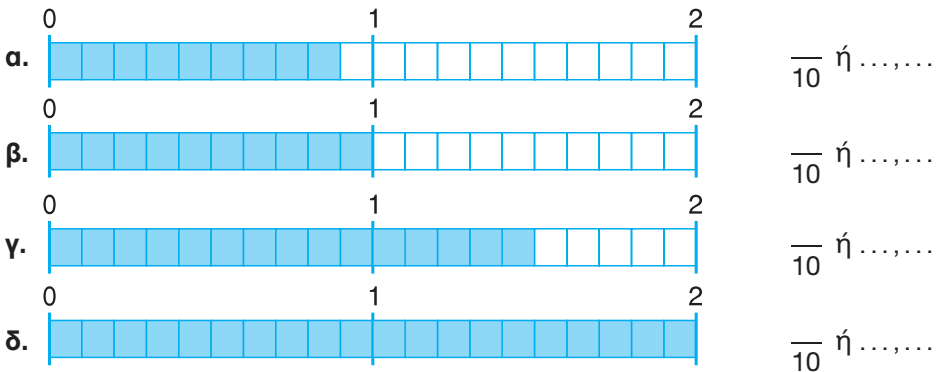


ii) (X) $\text{---} = \text{---} = \text{---}$ ή
 $\text{.....} = \text{.....} = \text{.....}$,

(A) $\text{---} = \text{---} = \text{---}$ ή
 $\text{.....} = \text{.....} = \text{.....}$,

(O) $\text{---} = \text{---} = \text{---}$ ή
 $\text{.....} = \text{.....} = \text{.....}$,

25.4 Γράφω με δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικό αριθμό τι μέρος της ακέραιης μονάδας είναι χρωματισμένο σε κάθε περίπτωση:



25.5 α. Σημειώνω την υποδιαστολή στην κατάλληλη θέση, ώστε:

- i) το 5 να δηλώνει δέκατα: 3523 3450 258 5 2005
 ii) το 3 να δηλώνει εκατοστά: 2638 583 93 2573 38
 iii) το 4 να δηλώνει χιλιοστά: 2384 32549 584 345 47

β. Ποια από τα ψηφία των παρακάτω δεκαδικών αριθμών μπορούμε να διαγράψουμε χωρίς να αλλάξει η αξία τους;

- | | | | | |
|-------|--------|--------|-------|--------|
| 0,5 | 0,30 | 4,05 | 5,80 | 0,070 |
| 0,040 | 15,300 | 40,080 | 0,500 | 0,007 |
| 0,025 | 15,003 | 48,000 | 0,508 | 20,700 |

25.6 α. Συμπληρώνω τον παρακάτω πίνακα:

| Με λέξεις | Με δεκαδικό κλάσμα | Με δεκαδικό αριθμό | Προσθέτω και δημιουργώ τις αμέσως επόμενες ακέραιες μονάδες |
|-------------|---------------------|--------------------|-------------------------------------------------------------|
| 25 εκατοστά | | | $\frac{25}{100} + \frac{\dots}{100} = \frac{100}{100}$ ή 1 |
| | $\frac{25}{100}$ | | |
| | | 2,05 | $\frac{205}{100} + \frac{\dots}{100} = \frac{300}{100}$ ή 3 |
| 205 δέκατα | | | |
| | $\frac{205}{1.000}$ | | |
| 25 χιλιοστά | | | |

β. Διατάσσω από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους προηγούμενους έξι:
 i) δεκαδικούς αριθμούς και ii) δεκαδικά κλάσματα:

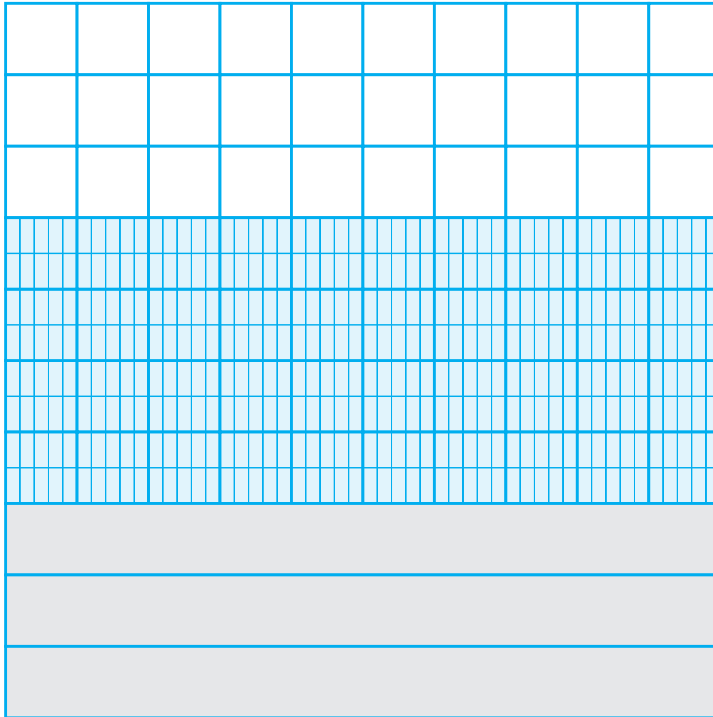
i) < < < < <

ii) _____ < _____ < _____ < _____ < _____ < _____

25.7 Αντιστοιχίζω το κατάλληλο δεκαδικό κλάσμα με τον κατάλληλο δεκαδικό αριθμό:

| α. | | β. | |
|---------------------|---------|---------------------|---------|
| $\frac{7}{10}$ | • | $\frac{35}{100}$ | • 0,035 |
| $\frac{7}{1.000}$ | • | $\frac{305}{100}$ | • 3,5 |
| $\frac{707}{100}$ | • | $\frac{35}{1.000}$ | • 0,35 |
| $\frac{7}{100}$ | • | $\frac{305}{1.000}$ | • 3,05 |
| $\frac{707}{1.000}$ | • | $\frac{35}{10}$ | • 0,305 |
| | • 7,07 | | |
| | • 0,07 | | |
| | • 0,7 | | |
| | • 0,707 | | |
| | • 0,007 | | |

25.8* α. Παρατηρώ προσεκτικά το παρακάτω τετράγωνο και γράφω με δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικό αριθμό τι μέρος του είναι:



• **Λευκό:**
Τα — ή

• **Μπλε:**
Τα — ή

• **Γκρι:**
Τα — ή

β. Γράφω με δεκαδικά κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς τη σχέση του λευκού και του γκρι μέρους: — = — ή,..... =,.....

25.9* Γράφω με δεκαδικό κλάσμα και δεκαδικό αριθμό:

α. Πόσα εκατοστά του € είναι:

β. Πόσα χιλιοστά του κιλού είναι:

- τα 5 λεπτά: $\frac{\quad}{100}$ € ή 0,..... €
- τα 50 λεπτά: — € ή,..... €
- τα 100 λεπτά: — € ή,..... €
- τα 105 λεπτά: — € ή,..... €
- τα 150 λεπτά: — € ή,..... €
- τα 200 λεπτά: — € ή,..... €
- τα 500 λεπτά: — € ή,..... €
- τα 5 γραμμ.: $\frac{\quad}{1.000}$ κ. ή 0,..... κ.
- τα 50 γραμμ.: — κ. ή,..... κ.
- τα 100 γραμμ.: — κ. ή,..... κ.
- τα 105 γραμμ.: — κ. ή,..... κ.
- τα 500 γραμμ.: — κ. ή,..... κ.
- τα 1.000 γραμμ.: — κ. ή,..... κ.
- τα 1.500 γραμμ.: — κ. ή,..... κ.

25.10* Λύνω τα παρακάτω προβλήματα:

α. Τρία παιδιά έχουν συνολικά 100 €.



Έχω τα $\frac{2}{10}$
και τα $\frac{2}{100}$
του ποσού.



Έχω τα $\frac{3}{10}$
και τα $\frac{13}{100}$
του ποσού.

Εγώ έχω τα
υπόλοιπα,
που είναι τα
περισσότερα.



- Συμφωνείς με την Άννα; Γιατί;
-
-

β. Το μεικτό βάρος της διπλανής συσκευασίας με αλάτι είναι 1.000 γραμμάρια. Πόσο είναι το βάρος του αλατιού, αν το απόβαρο (συσκευασία) είναι το $\frac{1}{100}$ και τα $\frac{100}{1.000}$ του μεικτού βάρους;



.....

.....

.....

.....

26.

Διάταξη δεκαδικών αριθμών – Αξία θέσης ψηφίου στους δεκαδικούς



Βασικά σημεία θεωρίας



⇒ Αξία θέσης ψηφίου:

Όπως οι φυσικοί, έτσι και οι δεκαδικοί αριθμοί σχηματίζονται από μονάδες διαφόρων τάξεων στο ακέραιο και στο δεκαδικό μέρος.

• Σ' έναν δεκαδικό αριθμό ένα ψηφίο, ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται μέσα στον αριθμό, έχει διαφορετική αξία. Στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιούμε τόσο στο ακέραιο όσο και στο δεκαδικό μέρος **κάθε τάξη είναι 10 φορές μεγαλύτερη από την αμέσως επόμενη της** (προς τα δεξιά) και **10 φορές μικρότερη από την προηγούμενή της** (προς τα αριστερά). Για παράδειγμα, στον δεκαδικό αριθμό **222,222** το ψηφίο **2** έχει **διαφορετική αξία**, λόγω της **διαφορετικής** του θέσης μέσα στον αριθμό, και **διαβάζεται διαφορετικά**.

| ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΕΡΟΣ | | | ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΟΝ | ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΜΕΡΟΣ | | |
|---------------|------|-----|-------------|------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| × 100 | × 10 | × 1 | | × $\frac{1}{10}$ ή 0,1 | × $\frac{1}{100}$ ή 0,01 | × $\frac{1}{1.000}$ ή 0,001 |
| E | Δ | M | , | δ | ε | χ |
| 2 | 2 | 2 | , | 2 | 2 | 2 |

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 222,222 &= 2E + 2\Delta + 2M + 2\delta + 2\varepsilon + 2\chi = \\
 &= 2 \times 100 + 2 \times 10 + 2 \times 1 + 2 \times 0,1 + 2 \times 0,01 + 2 \times 0,001 = \\
 &= 200 + 20 + 2 + 0,2 + 0,02 + 0,002 = \\
 &= \underbrace{200 + 20 + 2}_{222 \text{ ακέραιες μονάδες}} + \underbrace{0,200 + 0,020 + 0,002}_{222 \text{ χιλιοστά}} =
 \end{aligned}$$



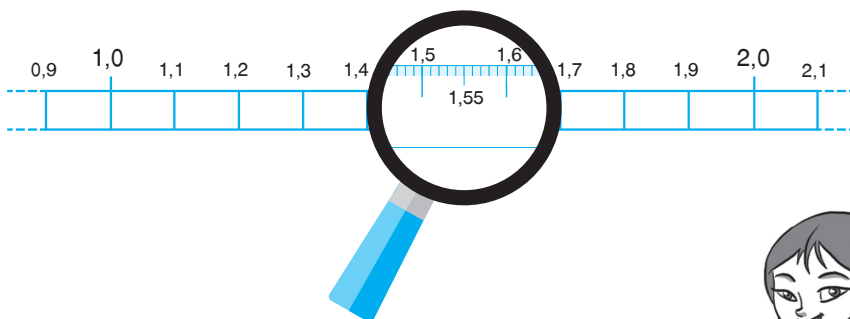
⇒ Σύγκριση δεκαδικών αριθμών:



• Για να **συγκρίνουμε δεκαδικούς αριθμούς**, συγκρίνουμε το ακέραιο μέρος τους. Μεγαλύτερος είναι ο δεκαδικός αριθμός με το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.

Π.χ. $7,5 > 2,95$, γιατί $7 > 2$.

- Αν τα **ακέραια μέρη των αριθμών είναι τα ίδια**, συγκρίνουμε τα δεκαδικά τους μέρη, ξεκινώντας από το ψηφίο των δεκάτων.
Π.χ. $7,501 > 7,499$, γιατί $5 > 4$.
- Αν και το ψηφίο των δεκάτων είναι το ίδιο, συγκρίνουμε το ψηφίο **των εκατοστών**. Π.χ. $7,560 > 7,549$, γιατί $6 > 4$.
- Αν και το ψηφίο των εκατοστών είναι το ίδιο, συγκρίνουμε το ψηφίο **των χιλιοστών**. Π.χ. $7,568 > 7,567$, γιατί $8 > 7$ κ.ο.κ.
- **Προσοχή!** Δεν πρέπει να παρασυρόμαστε και να θεωρούμε μεγαλύτερο δεκαδικό αριθμό αυτόν που έχει και τα περισσότερα δεκαδικά ψηφία.
Π.χ. $2,5 > 2,499$, γιατί το $2,5$ γράφεται και $2,500$.
- **Για να αποφεύγουμε λοιπόν τέτοια λάθη κατά τη σύγκριση και τη διάταξη των δεκαδικών αριθμών, αν τα δεκαδικά τους μέρη δεν είναι ισοψήφια, για ευκολία μπορούμε να συμπληρώνουμε (ή να διαγράφουμε) μηδενικά στο τέλος τους, για να γίνουν πρώτα ισοψήφια και στη συνέχεια να κάνουμε τη σύγκριση και τη διάταξη.**
Π.χ. $2,5 \dots 2,50 \Leftrightarrow 2,50 = 2,50$ ή $2,5 = 2,50$
 $2,5 \dots 2,499 \Leftrightarrow 2,500 > 2,499$ κ.ο.κ.
- **Ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς αριθμούς παρεμβάλλονται άπειροι άλλοι δεκαδικοί αριθμοί, μιας και η διαμέριση της ακέραιης μονάδας είναι συνεχής.**
- Η σύγκριση και η διάταξη των αριθμών μάς επιτρέπουν να παρεμβάλλουμε έναν ή περισσότερους αριθμούς ανάμεσα σε δύο άλλους. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε ποιοι αριθμοί παρεμβάλλονται ανάμεσα στο $1,5$ και στο $1,6$, προσθέτουμε στο τέλος τους από ένα ή περισσότερα μηδενικά, πράγμα που δεν αλλάζει την αξία τους, και γίνονται $1,50$ και $1,60$ ή $1,500$ και $1,600 \dots$ Άρα παρεμβάλλονται οι $1,51$, $1,52$, ..., $1,59$ ή οι $1,501$, $1,502$, ..., $1,599$ κ.ο.κ.



Δηλαδή: ... $1,4 < 1,5 < 1,51 < 1,52 < \dots < 1,55 < \dots < 1,59 < 1,6 \dots$



Αλλιώς (με διαίρεση δεκαδικών κλασμάτων):

$$\triangleright 351 : 19,5 = 351 : \frac{195}{10} = 351 \times \frac{10}{195} = \frac{3.510}{195} = 18.$$

$$\triangleright 295,75 : 3,5 = \frac{29.575}{100} : \frac{35}{10} = \frac{29.575}{100} \times \frac{10}{35} = \frac{295.750}{3.500} = \frac{2.957,50}{35} = 84,5.$$

$$\triangleright 397,5 : 0,05 = \frac{3.975}{10} : \frac{5}{100} = \frac{3.975}{10} \times \frac{100}{5} = \frac{397.500}{50} = \frac{39.750}{5} = 7.950.$$

⇒ **Διαίρεση φυσικού ή δεκαδικού αριθμού με το 10 ή το 100 ή το 1.000 κτλ. ή το 0,1 ή το 0,01 ή το 0,001 κτλ.:**

- Για να διαιρέσουμε σύντομα έναν **φυσικό** αριθμό με το **10** ή το **100** ή το **1.000** κτλ., χωρίζουμε αντίστοιχα από το τέλος του ένα ή δύο ή τρία κτλ. δεκαδικά ψηφία.

Π.χ. $425 : 10 = 42,5$ $425 : 100 = 4,25$ $425 : 1.000 = 0,425$

- Για να διαιρέσουμε σύντομα έναν **δεκαδικό** αριθμό με το **10** ή το **100** ή το **1.000** κτλ., μετακινούμε αντίστοιχα την **υποδιαστολή** του δεκαδικού μία ή δύο ή τρεις κτλ. θέσεις προς τα **αριστερά**. Και στις δύο περιπτώσεις, αν μας λείπουν ψηφία, συμπληρώνουμε με μηδενικά.

Π.χ. $23,5 : 10 = 2,35$ $23,5 : 100 = 0,235$ $23,5 : 1.000 = 0,0235$
 $2,5 : 10 = 0,25$ $2,5 : 100 = 0,025$ $2,5 : 1.000 = 0,0025$

- Για να διαιρέσουμε σύντομα έναν **φυσικό** αριθμό με το **0,1** ή το **0,01** ή το **0,001** κτλ., αρκεί να τον **πολλαπλασιάσουμε** αντίστοιχα επί **10** ή **100** ή **1.000** κτλ., δηλαδή προσθέτοντας αντίστοιχα στο τέλος του ένα ή δύο ή τρία κτλ. μηδενικά.

Π.χ. $5 : 0,1 = 50$ $5 : 0,01 = 500$ $5 : 0,001 = 5.000$

- Για να διαιρέσουμε σύντομα έναν **δεκαδικό** αριθμό με το **0,1** ή το **0,01** ή το **0,001** κτλ., μεταφέρουμε αντίστοιχα την **υποδιαστολή** μία ή δύο ή τρεις κτλ. θέσεις προς τα **δεξιά**. Αν δε μας φτάνουν τα δεκαδικά ψηφία που έχουμε, συμπληρώνουμε μηδενικά.

Π.χ. $4,25 : 0,1 = 42,5$ $4,25 : 0,01 = 425$ $4,25 : 0,001 = 4.250$

- Όταν διαιρούμε έναν αριθμό με δεκαδικό που είναι **μικρότερος** από τη μονάδα, το αποτέλεσμα είναι **μεγαλύτερο** από τον αριθμό. Π.χ. $2 : 0,5 = 4$



Ασκήσεις εμπέδωσης

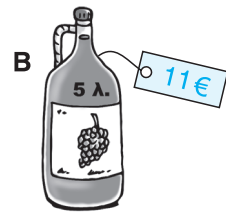
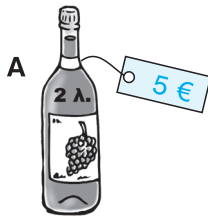
30.1 Εκτελώ τις παρακάτω διαιρέσεις με τις επαλήθευσεις τους:

| | | |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} 5 \overline{) 4} \end{array}$ | $\begin{array}{r} 18 \overline{) 5} \end{array}$ | $\begin{array}{r} 3 \overline{) 8} \end{array}$ |
| Επαλήθευση | Επαλήθευση | Επαλήθευση |
| | | |

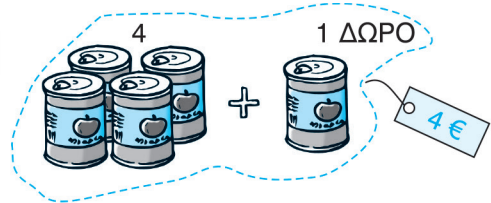
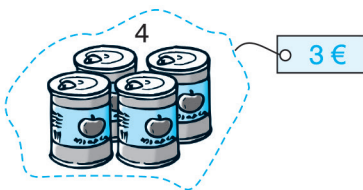
| | | |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\begin{array}{r} 235 \overline{) 8} \end{array}$ | $\begin{array}{r} 721 \overline{) 28} \end{array}$ | $\begin{array}{r} 1 \overline{) 125} \end{array}$ |
| Επαλήθευση | Επαλήθευση | Επαλήθευση |
| | | |

30.2 Λύνω τα παρακάτω προβλήματα:

- α. Η Μυρτώ κέρασε από μία τυρόπιτα τις 5 φίλες της και πλήρωσε 4 €. Πόσο κόστιζε η μία τυρόπιτα;
- β. Ένα κατάστημα προσφέρει το ίδιο κρασί σε δύο συσκευασίες, Α και Β. Ποια συσκευασία από τις δύο μας συμφέρει ν' αγοράσουμε;



- γ. Ένα κατάστημα διαθέτει κονσέρβες ντομάτας σε δύο προσφορές. Ποια συσκευασία από τις δύο μας συμφέρει ν' αγοράσουμε;



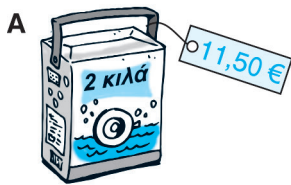
30.3 Εκτελώ τις παρακάτω διαιρέσεις με τις επαλήθευσεις τους:

| | | |
|------------------------|------------------------|-----------------------|
| $25,75 \overline{) 5}$ | $623,5 \overline{) 4}$ | $45,6 \overline{) 3}$ |
| Επαλήθευση | Επαλήθευση | Επαλήθευση |
| | | |

| | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| $2,75 \overline{) 5}$ | $2,52 \overline{) 12}$ | $2,45 \overline{) 35}$ |
| Επαλήθευση | Επαλήθευση | Επαλήθευση |
| | | |

30.4 Λύνω τα παρακάτω προβλήματα:

- α. Ο Μηνάς, ο Αντρέας και ο Πέτρος θέλουν ν' αγοράσουν μαζί μία μπάλα που κοστίζει 22,56 €. **i)** Πόσα ευρώ αντιστοιχούν στον καθένα; **ii)** Αν θελήσει να συμμετάσχει και ο Παύλος, πόσο μικρότερη θα είναι η συμμετοχή του κάθε παιδιού;
- β. Ένα κατάστημα προσφέρει το ίδιο απορρυπαντικό σε δύο συσκευασίες, Α και Β. Ποια συσκευασία από τις δύο είναι η φθηνότερη και κατά πόσο;



- γ. Η Μυρτώ, τρέχοντας 4 γύρους ολόγυρα από την τετράγωνη πλατεία της γειτονιάς της, έτρεξε συνολικά 600 μέτρα. Αν ο δήμος θέλει να φυτέψει 20 δέντρα περιμετρικά (γύρω γύρω) στην πλατεία, σε τι απόσταση πρέπει να φυτέψει το ένα δέντρο από το άλλο;

30.5 Συμπληρώνω τον αριθμό που λείπει για να ισχύουν οι ισότητες:

| | | |
|-----------------------------------|-------------------------|-----------------------|
| α. $352,8 : \dots = 35,28$ | $75,8 : \dots = 0,0758$ | $42 : \dots = 0,0042$ |
| $2.125 : \dots = 21,25$ | $9 : \dots = 0,9$ | $80 : \dots = 0,8$ |
| $25 : \dots = 0,025$ | $0,6 : \dots = 0,06$ | $5 : \dots = 0,0005$ |
| β. $24,85 : \dots = 248,5$ | $4,5 : \dots = 45$ | $3,5 : \dots = 350$ |
| $2 : \dots = 2.000$ | $5 : \dots = 500$ | $0,03 : \dots = 30$ |
| $25 : \dots = 2.500$ | $0,8 : \dots = 8.000$ | $4 : \dots = 40$ |

30.6* Λύνω τα παρακάτω προβλήματα:

- α.** Ένας μελισσοκόμος έχει να πουλήσει 60 κουτιά μέλι. Το μεικτό βάρος όλων των κουτιών είναι 112,2 κιλά και το απόβαρό τους 7,200 κιλά. Πόσο μέλι περιέχει το κάθε κουτί;
- β.** Ένα αυτοκίνητο διανύει την απόσταση Αθήνα-Λαμία σε 2,5 ώρες, όταν η μέση ταχύτητά του είναι 84 χμ. την ώρα. Αν θέλει να φτάσει μισή ώρα νωρίτερα, πόσο πρέπει να αυξήσει τη μέση ταχύτητά του;
- γ.** Ένα καφεκοπτείο παρέλαβε 100 κιλά ωμό καφέ. Στο καβούρδισμα και στο άλεσμα ο καφές είχε φύρα 6 κιλά. Το καφεκοπτείο συσκεύασε ομοιόμορφα τον καφέ σε 752 πακέτα. Πόσο είναι το βάρος του καφέ σε κάθε πακέτο;
- δ.** Ένα πλοίο εκτελεί το τακτικό του δρομολόγιο σε 12 ώρες με μέση ταχύτητα 18,5 μίλια την ώρα. Σ' ένα όμως ταξίδι του, 4 ώρες ύστερα από την αναχώρησή του, αναγκάστηκε από βλάβη να σταματήσει για 3 ώρες. Πόσο πρέπει ν' αυξήσει την ταχύτητά του, ώστε να φτάσει στον προορισμό του χωρίς καθυστέρηση;
- ε.** Η οικογένεια της Μυρτώς θέλει ν' αγοράσει ένα αυτοκίνητο το οποίο κοστίζει 25.495 €. Έδωσαν τα $\frac{40}{100}$ του ποσού προκαταβολή και τα υπόλοιπα σε 24 ισόποσες μηνιαίες δόσεις. Πόσο θα είναι η κάθε μηνιαία δόση;
- στ.** Ο Αντρέας, τρέχοντας 5 γύρους ολόγυρα από το οικόπεδό τους, σχήματος τετραγώνου, διάνυσε συνολικά 1.510 μ. Πόσο κοστίζει το οικόπεδο, αν πουληθεί με 100 € το τετραγωνικό μέτρο;

30.7* Εκτελώ τις παρακάτω διαιρέσεις και τις επαλήθευσεις τους:

| | | | | | | | | |
|------|-----|-------------------|-----|-----|-------------------|--------|------|-------------------|
| 6,75 | 4,5 | Επαλήθευση | 292 | 0,8 | Επαλήθευση | 12,075 | 0,25 | Επαλήθευση |
| | | | | | | | | |

30.8* Συμπληρώνω τον παρακάτω πίνακα:

| | | | | |
|------------|-------|------|---|------|
| Διαιρετέος | 1,725 | | 3 | |
| Διαιρέτης | 5 | 27 | | 0,01 |
| Πηλίκο | | 3,85 | 8 | 0,5 |

30.9* Συμπληρώνω τους παρακάτω πίνακες:

α.

| Αριθμοί | : 10 | : 100 | : 1.000 | : 10.000 | : 100.000 |
|---------|------|-------|---------|----------|-----------|
| 3.425 | | | | | |
| 48 | | | | | |
| 235,25 | | | | | |
| 15,3 | | | | | |

β.

| Αριθμοί | : 0,1 | : 0,01 | : 0,001 | : 0,0001 |
|---------|-------|--------|---------|----------|
| 4,25 | | | | |
| 5 | | | | |
| 0,125 | | | | |
| 12 | | | | |

30.10* Ένα κατάστημα προσφέρει τα παρακάτω είδη σε δύο συσκευασίες, Α και Β. Βρίσκω ποια συσκευασία από τις δύο, σε κάθε είδος, συμφέρει να αγοράσουμε.

α.



10,5 €



16,06 €

β.



2,25 €



4,8 €

30.11* Λύνω τα παρακάτω προβλήματα:

- α.** Ο Φοίβος, τρέχοντας 4,5 γύρους ολόγυρα από το οικόπεδο των γονιών του, σχήματος τετραγώνου, διάνυσε συνολικά 1.404 μ. Πόσο κοστίζει το οικόπεδο, αν πουληθεί με 100 € το τετραγωνικό μέτρο;
- β.** Η Σμαράγδα για 12 μολύβια και έναν διαβήτη πλήρωσε 14,60 €, ενώ ο Γιάννης για 6 μολύβια και 2 διαβήτες από το ίδιο βιβλιοπωλείο πλήρωσε 14,80 €. Πόσο κοστίζει το κάθε είδος;
- γ.** Το σκοινί από τον χαρταετό του Νίκου έχει πενταπλάσιο μήκος από το σκοινί του χαρταετού της Βάσιας. Μπορείς να βρεις το μήκος του σκοινιού από τον χαρταετό του κάθε παιδιού, αν γνωρίζεις ότι ο χαρταετός του Νίκου έχει 139,4 μ. περισσότερο σκοινί;
- δ.** Δύο δεκαδικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 20 και διαφορά 5,50. Ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί;
- ε.** Ένα καφεκοπτείο παρέλαβε 100 κιλά ωμό καφέ. Στο καβούρδισμα και στο άλεσμα ο καφές είχε φύρα 7,5 κιλά. Το καφεκοπτείο συσκεύασε ομοιόμορφα τον αλεσμένο καφέ σε πακέτα των 0,125 κιλών. Πόσα πακέτα συσκεύασε;
- στ.** Δύο τόπια ύφασμα έχουν συνολικό μήκος 85,5 μ. Το α΄ τόπι είναι 4,75 μ. μεγαλύτερο από το β΄. Ποιο είναι το μήκος του καθενός;
- ζ.** Η γιαγιά αγόρασε 0,75 κιλά τυρί φέτα και πλήρωσε 4,5 €. Πόσο πλήρωσε η μητέρα, που αγόρασε 2,25 κιλά από το ίδιο τυρί;
- η.** Αγόρασα από τη λαϊκή αγορά μήλα, αχλάδια και πορτοκάλια. Τα αχλάδια ζύγιζαν 2,25 κιλά. Τα πορτοκάλια ζύγιζαν διπλάσια κιλά από τα αχλάδια και τριπλάσια κιλά από τα μήλα. Πόσα ευρώ κόστισαν όλα τα φρούτα, αν τα πορτοκάλια κόστιζαν 0,78 € το κιλό, ενώ τα αχλάδια τριπλάσια ευρώ το κιλό απ' ό,τι τα πορτοκάλια και διπλάσια ευρώ το κιλό απ' ό,τι τα μήλα;



31.

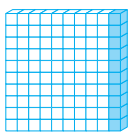
Η έννοια του ποσοστού



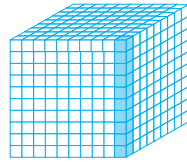
Βασικά σημεία θεωρίας



⇒ **Ποσοστό** ενός ποσού είναι **ένα μέρος του ποσού** αυτού. Το ποσοστό στα 100 (%) ή στα χίλια (‰) είναι ένα μέρος ενός ποσού που έχει τιμή 100 ή 1.000. Για παράδειγμα, χρωματισμένο είναι:



$$\frac{10}{100} = 0,10 \text{ ή } 10\%$$



$$\frac{10}{1.000} = 0,010 \text{ ή } 10\text{‰}$$

- Το ποσοστό % ή ‰ είναι μία συμβολική γραφή που μας επιτρέπει να συγκρίνουμε εύκολα διάφορες ποσότητες.

⇒ Ένα ποσοστό % ή ‰ μπορούμε να το εκφράσουμε επίσης και:

- ως **δεκαδικό κλάσμα**, που έχει αριθμητή το μέρος και παρονομαστή το 100 ή το 1.000, αλλά και
- ως **δεκαδικό αριθμό**, που δηλώνει εκατοστά ή χιλιοστά.

Π.χ. $25\% = \frac{25}{100} = 0,25$ ή $250\text{‰} = \frac{250}{1.000} = 0,250$.

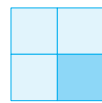
⇒ Τα **κλάσματα** μπορούμε να τα μετατρέψουμε σε ποσοτά % (ή ‰):

- αν τα μετατρέψουμε στα **ισοδύναμά τους εκατοστιαία** (ή χιλιοστιαία) ή
- αν κάνουμε **διαίρεση** ανάμεσα στους όρους τους.

Π.χ. $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 25}{4 \times 25} = \frac{25}{100} = 25\%$

ή $\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0,25 = 25\%$

} Δηλαδή:



$$\frac{1}{4}$$



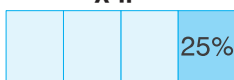
$$\frac{25}{100}$$

$$\text{ή } 25\%$$

⇒ Το ποσοστό ενός ποσού μπορεί:

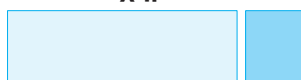
- να αποτελεί **μέρος του ποσού** στο οποίο αναφέρεται (**σχήμα 1**), αλλά και
- να **προστεθεί στο ποσό**, όταν δηλώνει **αύξηση** του ποσού (**σχήμα 2**) και
- να **αφαιρεθεί από το ποσό**, όταν δηλώνει **μείωση** του ποσού (**σχήμα 3**).

Σχήμα 1



$$100\%$$

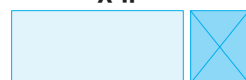
Σχήμα 2



$$100\% + 25\%$$

$$125\%$$

Σχήμα 3



$$100\% - 25\%$$

$$75\%$$

- **Αρχική τιμή** είναι η τιμή του αρχικού ποσού πάνω στην οποία υπολογίζεται το ποσοστό.
- **Τελική τιμή** είναι η τιμή που προκύπτει όταν από την αρχική τιμή προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε το συνολικό ποσοστό (αύξηση ή μείωση). Η σχέση που τα συνδέει φαίνεται συμβολικά στα προηγούμενα σχήματα 2, 3. Δηλαδή:

$$\boxed{\text{Αρχική τιμή}} \pm \boxed{\text{Συνολικό ποσοστό (αύξηση ή μείωση)}} = \boxed{\text{Τελική τιμή (αυξημένη ή μειωμένη)}}$$

- Η ποσότητα την οποία εκφράζει ένα ποσοστό εξαρτάται από **την τιμή στην οποία αναφέρεται (μονάδα αναφοράς ή αλλιώς αρχική τιμή)**. Π.χ. το 10%:
 - των 10 € είναι 1 €,
 - των 20 € είναι 2 €,
 - των 50 € είναι 5 €,
 - των 100 € είναι 10 €,
 - των 200 € είναι 20 €,
 - των 500 € είναι 50 € κ.ο.κ.

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το **συνολικό ποσοστό** (αύξησης ή μείωσης) ενός ποσού, όταν ξέρουμε το ποσοστό %, με διάφορους τρόπους: αναλογικά, με δεκαδικά κλάσματα, με το διπλάσιο και το μισό, με την αριθμογραμμή, με το κομπιουτεράκι κτλ.

Π.χ. πόση είναι η έκπτωση και ποια η τελική τιμή του παρακάτω μαγνητοφώνου;

έκπτωση 10%  50 €



Στα 100 € η έκπτωση είναι 10 € (δηλαδή το $\frac{1}{10}$). Επομένως και στα 50 € η έκπτωση είναι το $\frac{1}{10}$ του 50. Δηλαδή: $50 : 10 = 5$ €.

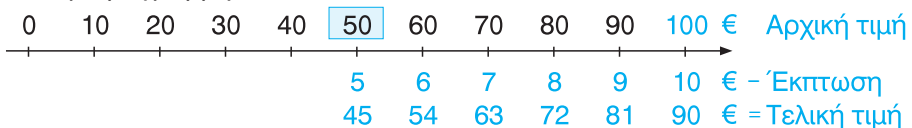
Στα 100 € → 10 € έκπτωση.
Στα 50 € → $10 : 2 = 5$ €.
(Στο μισό ποσό αντιστοιχεί η μισή έκπτωση.)



Τα $\frac{100}{100}$ της τιμής είναι 50 €.
Τα $\frac{10}{100}$ της τιμής είναι $50 : 10 = 5$ €.

Με κομπιουτεράκι:
Πατώ: $50 \times 10 \% = 5$
Πατώ: $50 \times 0.1 = 5$

- Με αριθμογραμμή:

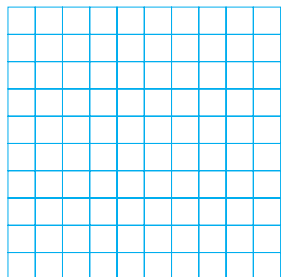




Ασκήσεις εμπέδωσης

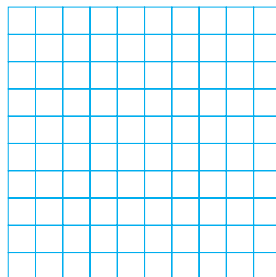
31.1 Χρωματίζω σε κάθε περίπτωση σύμφωνα με τα ποσοστά:

α.



- Κόκκινο
40%
- Πράσινο
 $\frac{3}{10}$
- Κίτρινο
0,20
- Γαλάζιο
 $\frac{10}{100}$

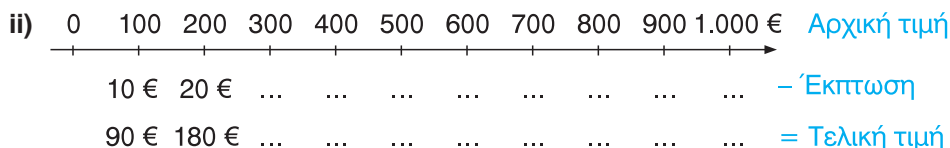
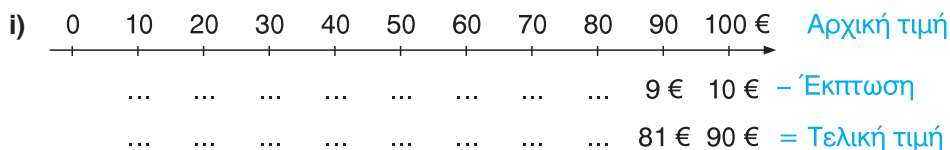
β.



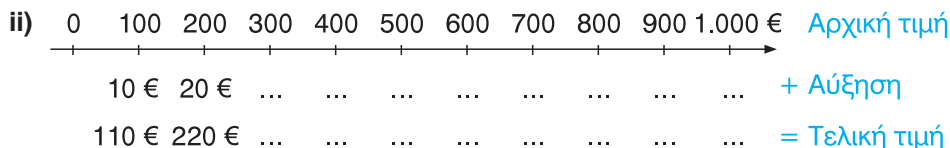
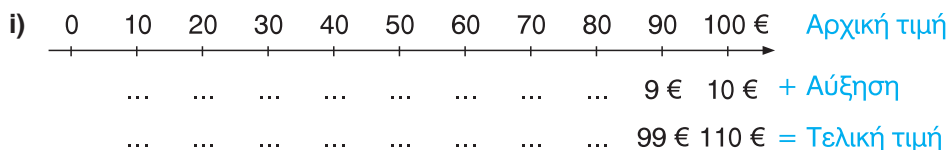
- Κόκκινο
15%
- Πράσινο
25%
- Κίτρινο
35%
- Γαλάζιο
 $\frac{25}{100}$

31.2 Λύνω τα παρακάτω προβλήματα:

α. Βρίσκω τη συνολική έκπτωση (μείωση) και την τελική τιμή πώλησης με τη βοήθεια της αριθμογραμμής, για έκπτωση 10%:



β. Βρίσκω τη συνολική αύξηση και την τελική τιμή πώλησης με τη βοήθεια της αριθμογραμμής, για αύξηση 10%:

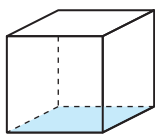


49. Γεωμετρικά στερεά – Ο όγκος

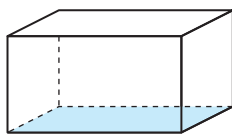
Βασικά σημεία θεωρίας



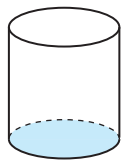
⇒ Στον φυσικό μας κόσμο, εκτός από τα **γεωμετρικά σχήματα** που είναι επίπεδα (τρίγωνο, τετράγωνο, ορθογώνιο, ρόμβος κ.ά.), συναντάμε και **γεωμετρικά στερεά**, όπως είναι ο **κύβος**, το **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο**, ο **κύλινδρος**, ο **κώνος**, η **πυραμίδα** και η **σφαίρα**.



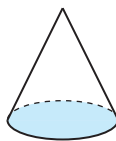
Κύβος



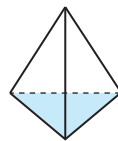
Ορθογώνιο
παραλληλεπίπεδο



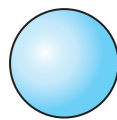
Κύλινδρος



Κώνος



Πυραμίδα

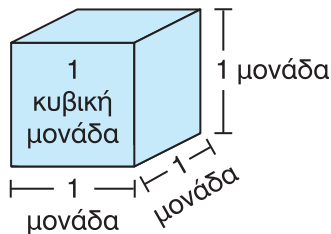


Σφαίρα

- Ορισμένα γεωμετρικά στερεά (κύβος, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, κύλινδρος, κώνος, πυραμίδα κ.ά.) έχουν **επίπεδες πολυγωνικές** επιφάνειες, οι οποίες ονομάζονται **έδρες** (βλέπε τη χρωματισμένη έδρα των προηγούμενων στερεών).

⇒ **Όγκος** ενός στερεού σώματος είναι ο **χώρος** τον οποίο καταλαμβάνει το στερεό.

- Ο όγκος εκφράζεται με τον **αριθμό** που προκύπτει από τη **σύγκριση** του στερεού με ένα άλλο στερεό, το οποίο θεωρούμε **μονάδα μέτρησης**.
- Μία **κυβική μονάδα** είναι ο όγκος ενός κύβου με μήκος ακμής μία μονάδα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

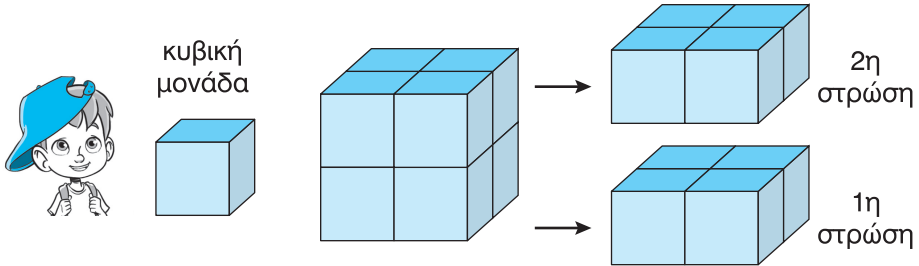
Πόσες κυβικές μονάδες είναι ο όγκος των παρακάτω στερεών;

- α.** Του **κύβου**; **β.** Του **ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου**;
γ. Του **τυχαίου γεωμετρικού στερεού** με μήκος ακμής 1 μονάδα;



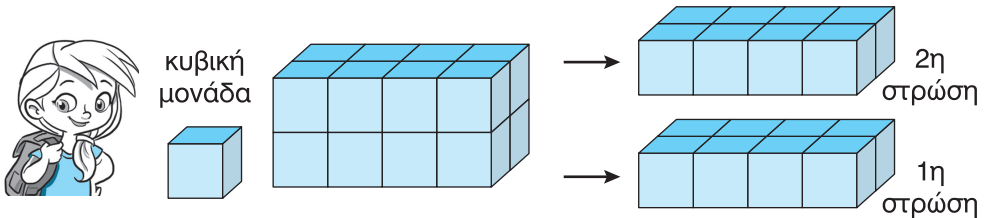
Βρίσκουμε πρώτα πόσες κυβικές μονάδες έχει η **μία στρώση** και στη συνέχεια πόσες κυβικές μονάδες έχουν **όλες** οι στρώσεις.

α. «Κόβοντας» οριζόντια σε φέτες τον κύβο, έχουμε:



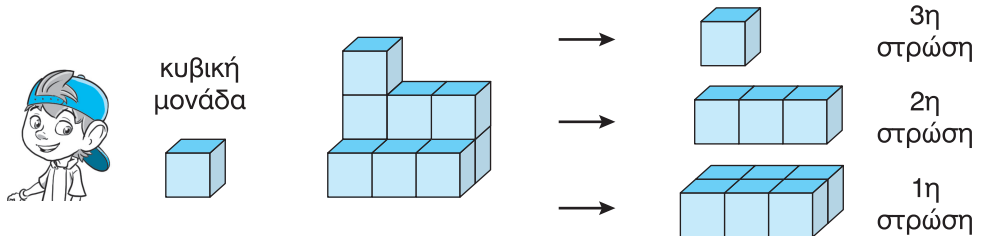
• Όγκος κύβου = $(2 \times 2) \times 2 = 4 \times 2 = 8$ κυβικές μονάδες.

β. «Κόβοντας» οριζόντια σε φέτες το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, έχουμε:



• Όγκος ορθ. παραλληλεπίπεδου = $(4 \times 2) \times 2 = 8 \times 2 = 16$ κυβικές μονάδες.

γ. Αναλύοντας το σύνθετο στερεό σε απλούστερα γεωμετρικά στερεά, «κόβοντάς το» οριζόντια σε φέτες, έχουμε:



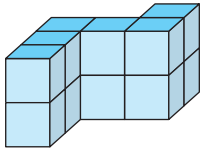
• Όγκος σύνθετου γεωμετρικού στερεού = $(3 \times 2) + 3 + 1 = 6 + 3 + 1 = 10$ κυβικές μονάδες.

☞ Γενικά, για να υπολογίσουμε τον όγκο ενός **σύνθετου γεωμετρικού στερεού**, το **αναλύουμε σε επιμέρους γεωμετρικά στερεά** (συνήθως κύβους ή ορθογώνια παραλληλεπίπεδα), «κόβοντάς το» σε φέτες (οριζόντια ή κατακόρυφα), βρίσκουμε τους όγκους αυτών των κομματιών και στη συνέχεια τους προσθέτουμε.

 **Ασκήσεις εμπέδωσης**

49.1 Από πόσα μικρά κυβάκια (κυβικές μονάδες) αποτελείται καθένα από τα παρακάτω γεωμετρικά στερεά;

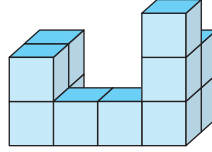
α.



.....

κυβικές
μονάδες

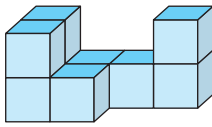
β.



.....

κυβικές
μονάδες

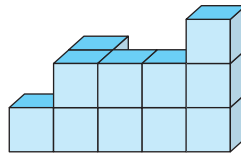
γ.



.....

κυβικές
μονάδες

δ.

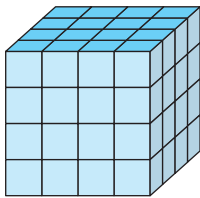


.....

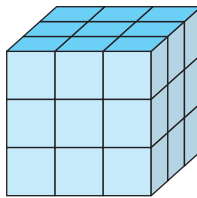
κυβικές
μονάδες

49.2 Από πόσα μικρότερα κυβάκια (κυβικές μονάδες) αποτελείται καθένας από τους παρακάτω κύβους (που είναι γνωστοί ως «κύβοι του Ρούμπικ»);

α.



β.

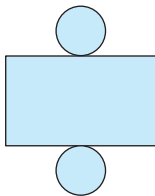


.....

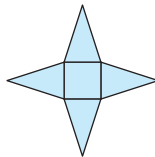
.....

49.3 Γράφω τα γεωμετρικά στερεά που σχηματίζουν τα παρακάτω αναπτύγματα:

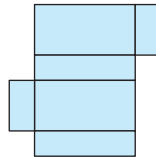
α.



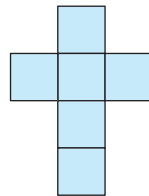
β.



γ.



δ.



.....
.....

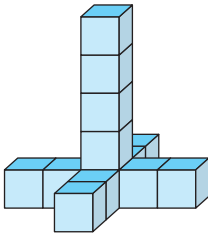
.....
.....

.....
.....

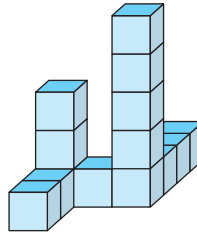
.....
.....

49.4 Ποια από τις παρακάτω κατασκευές (α, β, γ, δ, ε) έχει γίνει με 12 μικρά κυβάκια; Κύκλωσε τη σωστή απάντηση.

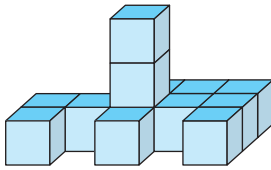
α.



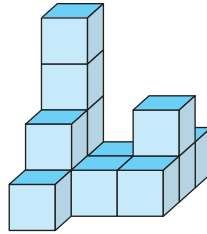
β.



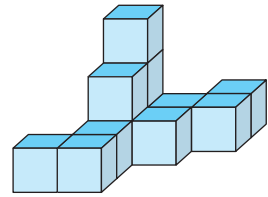
γ.



δ.



ε.



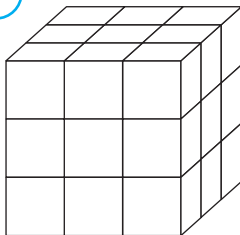
49.5* Με άσπρα και μαύρα κυβάκια κατασκεύασα έναν μεγάλο κύβο ① και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ②. Το εξωτερικό περίβλημα των δύο στερεών αποτελείται αποκλειστικά από άσπρα κυβάκια, ενώ το εσωτερικό (η «καρδιά» τους) αποκλειστικά από μαύρα.

α. Πόσα κυβάκια χρησιμοποίησα συνολικά;

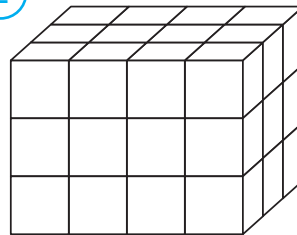
β. Πόσα από τα κυβάκια είναι μαύρα;

Κύκλωσε τη σωστή απάντηση σε κάθε περίπτωση.

①



②



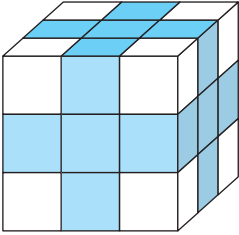
α. Α) 16 Β) 18 Γ) 19
Δ) 21 Ε) 27

β. Α) 6 Β) 4 Γ) 3
Δ) 2 Ε) 1

α. Α) 22 Β) 26 Γ) 30
Δ) 32 Ε) 36

β. Α) 6 Β) 4 Γ) 3
Δ) 2 Ε) 1

49.6* Έφτιαξα έναν μεγάλο κύβο χρησιμοποιώντας μικρότερα κυβάκια. Στη συνέχεια τον χρωμάτισα εξωτερικά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μπορείς να βρεις πόσα από τα μικρά κυβάκια:



α. έχουν 2 έδρες τους χρωματισμένες;
 Α) 3 Β) 6 Γ) 8 Δ) 10 Ε) 12

β. έχουν 1 έδρα τους χρωματισμένη;
 Α) 3 Β) 4 Γ) 5 Δ) 6 Ε) 8

γ. δεν έχουν καμία έδρα τους χρωματισμένη;
 Α) 7 Β) 8 Γ) 9 Δ) 10 Ε) 11

Κύκλωσε τη σωστή απάντηση σε κάθε περίπτωση.

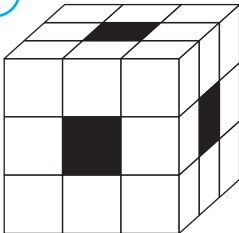
49.7* Κατασκεύασα έναν μεγάλο κύβο ① και ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο ② χρησιμοποιώντας μικρότερα άσπρα και μαύρα κυβάκια, όπως φαίνεται στα σχήματα. Τα μαύρα κυβάκια τα τοποθέτησα σε κάθε έδρα του μεγάλου κύβου και του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και σε ολόκληρη τη σειρά-στήλη μέχρι την απέναντι έδρα τους κάθε φορά.

α. Πόσα κυβάκια χρησιμοποίησα συνολικά;

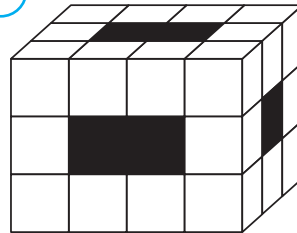
β. Πόσα κυβάκια είναι μαύρα;

Κύκλωσε τη σωστή απάντηση σε κάθε περίπτωση.

①



②



α. Α) 16 Β) 18 Γ) 19
 Δ) 21 Ε) 27

β. Α) 3 Β) 4 Γ) 5
 Δ) 6 Ε) 7

α. Α) 22 Β) 26 Γ) 30
 Δ) 32 Ε) 36

β. Α) 5 Β) 6 Γ) 10
 Δ) 12 Ε) 14

50.

Μονάδες μέτρησης του όγκου και της χωρητικότητας

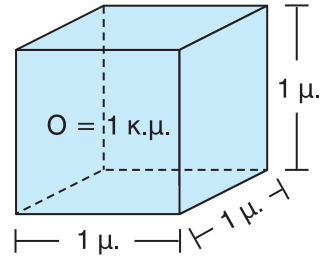


Βασικά σημεία θεωρίας



⇒ **Όγκος** ονομάζεται ο χώρος που πιάνει κάθε σώμα.

- Βασική μονάδα μέτρησης του όγκου είναι το **κυβικό μέτρο (κ.μ.)**. Ένα κυβικό μέτρο είναι ένας κύβος με ακμή ίση με ένα μέτρο.
- **Υποδιαιρέσεις** του κυβικού μέτρου είναι:



α) Το **κυβικό δεκατόμετρο (κ.δεκ.)**:

$$1 \text{ κ.μ.} = 1.000 \text{ κ.δεκ. και } 1 \text{ κ.δεκ.} = \frac{1}{1.000} \text{ κ.μ.} = 0,001 \text{ κ.μ.}$$

β) Το **κυβικό εκατοστόμετρο (κ.εκ.)**:

$$1 \text{ κ.μ.} = 1.000.000 \text{ κ.εκ. και } 1 \text{ κ.εκ.} = \frac{1}{1.000.000} \text{ κ.μ.} = 0,000001 \text{ κ.μ.}$$

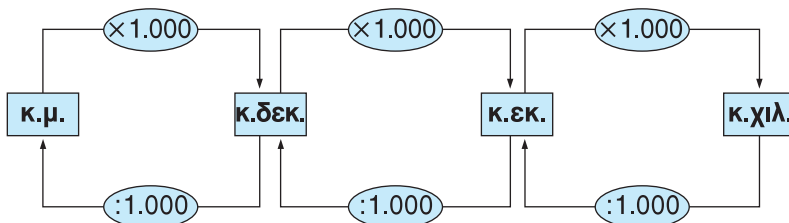
γ) Το **κυβικό χιλιοστόμετρο (κ.χιλ.)**:

$$1 \text{ κ.μ.} = 1.000.000.000 \text{ κ.χιλ. και } 1 \text{ κ.χιλ.} = \frac{1}{1.000.000.000} \text{ κ.μ.} = 0,000000001 \text{ κ.μ.}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} 1 \text{ κ.μ.} &= 1.000 \text{ κ.δεκ.} = 1.000.000 \text{ κ.εκ.} = 1.000.000.000 \text{ κ.χιλ.} \\ 1 \text{ κ.δεκ.} &= 1.000 \text{ κ.εκ.} = 1.000.000 \text{ κ.χιλ.} \\ 1 \text{ κ.εκ.} &= 1.000 \text{ κ.χιλ.} \end{aligned}$$

- ⇒ Για να μετατρέψουμε μια μέτρηση όγκου από **μεγαλύτερη** μονάδα στην **αμέσως μικρότερή** της, **πολλαπλασιάζουμε επί 1.000**. Αντίθετα, για να μετατρέψουμε τη μέτρηση όγκου από **μικρότερη** μονάδα στην **αμέσως μεγαλύτερή** της, **διαιρούμε διά 1.000**. Για τις μετατροπές του κυβικού μέτρου σε υποδιαιρέσεις του και αντίστροφα, ισχύει:



⇒ Τη μέτρηση του όγκου μπορούμε να την εκφράσουμε με **φυσικό, συμμιγή, δεκαδικό, μεικτό ή κλασματικό** αριθμό.

Π.χ. 2.540.050 κ.εκ. = 2 κ.μ. 540 κ.δεκ. 50 κ.εκ. = 2,540050 κ.μ. κ.ο.κ.

- Για να **κάνουμε όμως πράξεις** ανάμεσα στις μετρήσεις, πρέπει αυτές να εκφράζονται με την **ίδια μορφή αριθμού** και στην ίδια υποδιαίρεση της μονάδας μέτρησης.
Π.χ. 2 κ.μ. 5 κ.δεκ. + 1,025 κ.μ. = 2,005 κ.μ. + 1,025 κ.μ. = 3,030 κ.μ.

⇒ Σε κάθε **δεκαδικό αριθμό** που δηλώνει **κυβικά μέτρα**, το **ακέραιο μέρος** του δεκαδικού εκφράζει τα **κυβικά μέτρα**, τα **τρία πρώτα** δεκαδικά ψηφία εκφράζουν τα **κυβικά δεκατόμετρα**, τα **τρία επόμενα** τα **κυβικά εκατοστόμετρα** και τα **τρία τελευταία** τα **κυβικά χιλιοστόμετρα**.

Π.χ. 2,525450125 κ.μ. = 2 κ.μ. 525 κ.δεκ. 450 κ.εκ. 125 κ.χιλ.

- Ο παρακάτω πίνακας μας βοηθάει να γράφουμε εύκολα τους **συμμιγείς** αριθμούς ως **δεκαδικούς** και να τους διαβάζουμε:

| Συμμιγείς | | κ.μ. | κ.δεκ. | κ.εκ. | κ.χιλ. | Δεκαδικός |
|-----------|------------|------|-----------|-----------|-----------|--------------------|
| 15 κ.μ. | 325 κ.δεκ. | → 15 | 3 2 5 | | | → 15,325 κ.μ. |
| 5 κ.δεκ. | 145 κ.εκ. | → 0 | 0 0 5 | 1 4 5 | | → 0,005145 κ.μ. |
| 4 κ.μ. | 50 κ.εκ. | → 4 | 0 0 0 | 0 5 0 | | → 4,000050 κ.μ. |
| 15 κ.δεκ. | 5 κ.εκ. | → 0 | 0 1 5 | 0 0 5 | | → 0,015005 κ.μ. |
| 8 κ.εκ. | 75 κ.χιλ. | → 0 | 0 0 0 | 0 0 8 | 0 7 5 | → 0,000008075 κ.μ. |

⇒ **Χωρητικότητα** ενός δοχείου είναι ο όγκος της ποσότητας που μπορεί να χωρέσει το δοχείο.

- Ως **μονάδα μέτρησης του όγκου** (χωρητικότητα) **των υγρών** χρησιμοποιούμε το **λίτρο** (λ. ή ℓ). **Λίτρο** ονομάζεται η ποσότητα του υγρού που **χωράει** σε **1 κυβικό δεκατόμετρο**. Άρα **1 κ.μ. (= 1.000 κ.δεκ.) = 1.000 λ.**

$$1 \text{ κ.δεκ.} = 1 \text{ λ.}$$

$$1 \text{ κ.μ.} (= 1.000 \text{ κ.δεκ.}) = 1.000 \text{ λ.}$$

- **Υποδιαίρεση του λίτρου** είναι το **χιλιοστόλιτρο** (χλ. ή mL), που είναι ίσο με 1 κ.εκ.
- Για **ποσότητες νερού** έχουμε:
1 κ.μ. = 1.000 λ. = 1.000 χγρ. (= 1 τόνος)
1 κ.δεκ. = 1 λ. = 1 χγρ. (ή κιλό)
1 κ.εκ. = 1 χλ. = 1 γρ.
- **Προσοχή!** Για να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα ενός δοχείου, βρίσκουμε τις διαστάσεις του εσωτερικά, ενώ, για να υπολογίσουμε τον όγκο του, βρίσκουμε τις διαστάσεις του εξωτερικά.



Μπορούμε να υπολογίσουμε τον **όγκο** (και τη χωρητικότητα) ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, αν **πολλαπλασιάσουμε** τις ακμές του που εκφράζουν το **μήκος**, το **πλάτος** και το **ύψος** του (τις τρεις διαστάσεις του). Δηλαδή:

- πολλαπλασιάζουμε πρώτα το **μήκος επί το πλάτος**, ώστε να βρούμε το **εμβαδόν της βάσης του**, και στη συνέχεια
- πολλαπλασιάζουμε επί το **ύψος** του, για να βρούμε τον **όγκο** του.

Έτσι έχουμε:

$$O = (\text{μήκος} \times \text{πλάτος}) \times \text{ύψος} \quad \text{ή} \quad O = E_{\text{βάσης}} \times \text{ύψος}$$

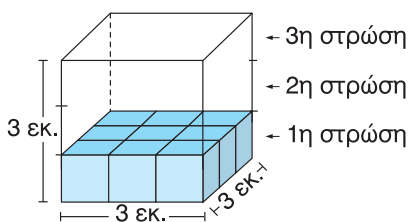
Επίσης, ισχύει:

$$E_{\text{βάσης}} = \text{όγκος} : \text{ύψος} \quad \text{και} \quad \text{Ύψος} = \text{όγκος} : E_{\text{βάσης}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

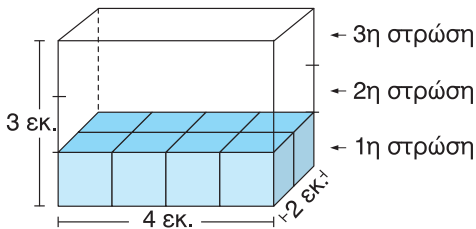
Πόσα κυβικά εκατοστόμετρα είναι ο όγκος (ή χωρητικότητα) των παρακάτω στερεών;

α. Του κύβου;



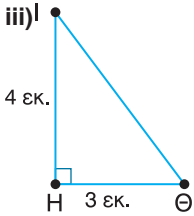
$$\begin{aligned} O_{\text{κύβου}} &= (\mu \times \pi) \times \upsilon = \\ &= (3 \text{ εκ.} \times 3 \text{ εκ.}) \times 3 \text{ εκ.} = \\ &= 9 \text{ τ.εκ.} \times 3 \text{ εκ.} = \\ &= \mathbf{27 \text{ κ.εκ.}} \end{aligned}$$

β. Του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου;



$$\begin{aligned} O_{\text{ορθ. παρ/δου}} &= (\mu \times \pi) \times \upsilon = \\ &= (4 \text{ εκ.} \times 2 \text{ εκ.}) \times 3 \text{ εκ.} = \\ &= 8 \text{ τ.εκ.} \times 3 \text{ εκ.} = \\ &= \mathbf{24 \text{ κ.εκ.}} \end{aligned}$$

Σημείωση: Πολλαπλασιάζοντας το **μήκος επί το πλάτος**, βρίσκουμε τα **τετραγωνικά εκατοστόμετρα της βάσης** κάθε στερεού ($3 \times 3 = 9$ τ.εκ. του κύβου και $4 \text{ εκ.} \times 2 \text{ εκ.} = 8$ τ.εκ. του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου), δηλαδή τις «θέσεις» πάνω στις οποίες θα μπουν τα κυβάρια (κ.εκ.) της 1ης στρώσης (9 κ.εκ. του κύβου και 8 κ.εκ. του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου). Αφού το ύψος κάθε στερεού είναι 3 εκ., θα μπουν 3 στρώσεις, δηλαδή $9 \times 3 = \mathbf{27 \text{ κ.εκ.}}$ και $8 \times 3 = \mathbf{24 \text{ κ.εκ.}}$ αντίστοιχα.



- β. i. ορθογώνιο ισοσκελές
- ii. οξυγώνιο ισοσκελές
- iii. ορθογώνιο σκαληνό

41.11

α. $1,5 \text{ χμ.} = 1,5 \times 1.000 \text{ μ.} = 1.500 \text{ μ.}, 1.500 \text{ μ.} : 10 = 150 \text{ μ.}$ ο ένας γύρος, δηλαδή η περίμετρος της ισόπλευρης τριγωνικής πλατείας. Άρα η πλευρά της είναι $150 \text{ μ.} : 3 = 50 \text{ μ.}$

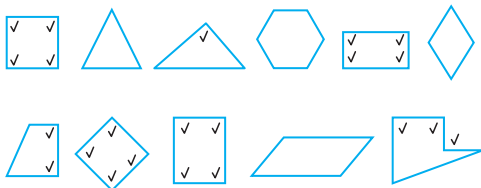
β. $1,8 \text{ χμ.} = 1,8 \times 1.000 \text{ μ.} = 1.800 \text{ μ.}, 1.800 \text{ μ.} : 10 = 180 \text{ μ.}$ ο ένας γύρος, δηλαδή όσο η περίμετρος του ισοσκελούς τριγωνικού οικοπέδου. Η μικρή πλευρά του είναι $(180 - 2 \times 15) : 3 = (180 - 30) : 3 = 150 : 3 = 50 \text{ μ.}$ και η καθεμία από τις ίσες πλευρές του είναι $50 + 15 = 65 \text{ μ.}$

γ. Η β' πλευρά του χωραφιού είναι $50 + 10 = 60 \text{ μ.}$ και η γ' πλευρά $60 + 10 = 70 \text{ μ.}$ Η περίμετρος του χωραφιού είναι $50 + 60 + 70 = 180 \text{ μέτρα.}$ Άρα για την περίφραξη του χωραφιού θα χρειαστεί 180 μέτρα συρματόπλεγμα, που θα κοστίσουν $180 \times 10 = 1.800 \text{ €.}$

42. Καθετότητα - Ύψη τριγώνου

42.1

α. i)

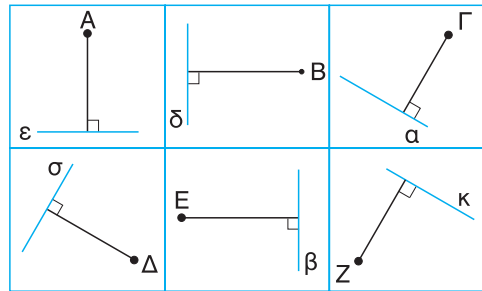


ii)



β. Ελέγχω με τον γνώμονα, εφαρμόζοντας τις κάθετες πλευρές του στις κάθετες πλευρές των σχημάτων και στα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα των γραμμάτων.

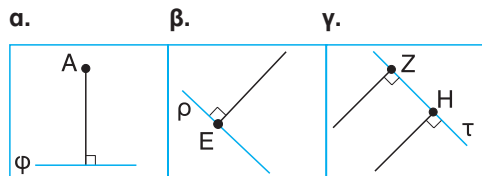
42.2



42.3

α. Οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα στο τετράγωνο (πρώτο σχήμα) και στον ρόμβο (τρίτο σχήμα).

42.4



42.5

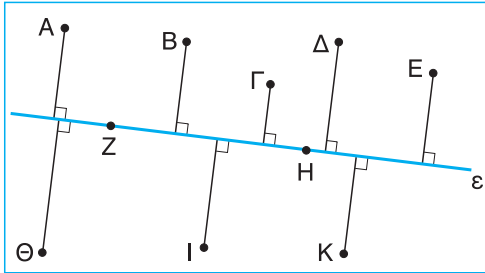
α. Η ΑΕ με τη ΓΗ. Η ΒΖ με τη ΘΔ.
β. ΑÔΓ, ΒÔΔ, ΓÔΕ, ΔÔΖ, ΕÔΗ, ΖÔΘ, ΗÔΑ, ΘÔΒ

42.6

Δεν παρουσιάζει δυσκολία.

42.7

α.

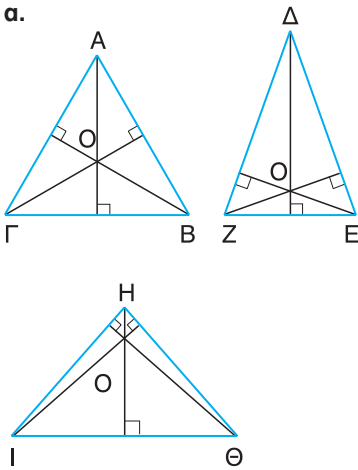


β. Δεν παρουσιάζει δυσκολία.

γ. Μπορώ να ενώσω τα σημεία Α, Β, Ε, που απέχουν το ίδιο (2 εκ.) από την ευθεία ε.

42.8

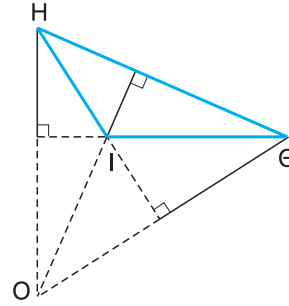
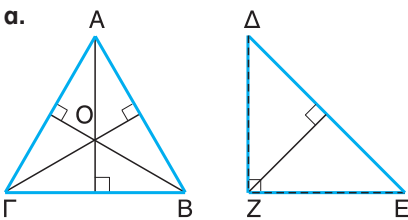
α.



β. Στα οξυγώνια τρίγωνα τα 3 ύψη τέμνονται σε σημείο (Ο) που βρίσκεται στο **εσωτερικό** του τριγώνου.

42.9

α.



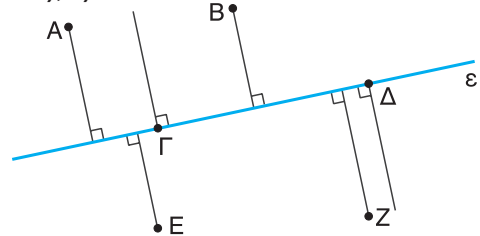
β. i) Στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τα 3 ύψη τέμνονται σε σημείο (Ο) που βρίσκεται στο **εσωτερικό** του τριγώνου.

ii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ τα 3 ύψη τέμνονται στο ίδιο σημείο (Ζ) όπου τέμνονται και οι **κάθετες πλευρές** του τριγώνου.

iii) Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο ΗΘΙ τα 3 ύψη τέμνονται σε σημείο (Ο) που βρίσκεται **έξω** από το τρίγωνο.

42.10

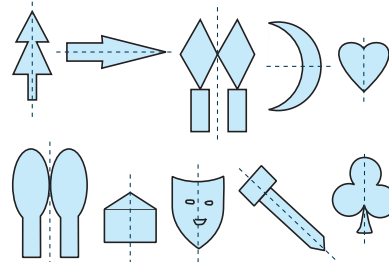
α. i), ii)



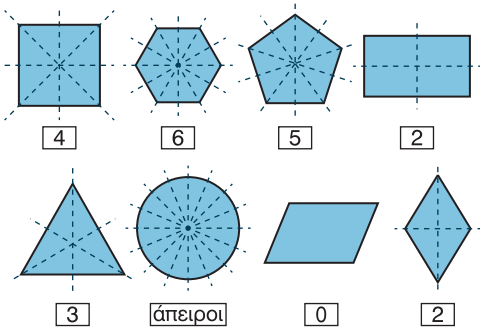
β. Όλες οι κάθετες στην ευθεία ε είναι **παράλληλες** μεταξύ τους.

43. Συμμετρία

43.1



43.2

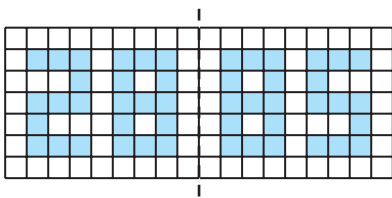


43.3

| | |
|-----------------------------|------------------------------------|
| Δεν έχουν άξονα συμμετρίας | Γ, Ζ, Κ, Ν, Ρ |
| Έχουν έναν άξονα συμμετρίας | Α, Β, Δ, Ε, Λ, Μ, Π, Σ, Τ, Υ, Ψ, Ω |
| Έχουν δύο άξονες συμμετρίας | Η, Θ, Ι, Ξ, Ο Φ, Χ |

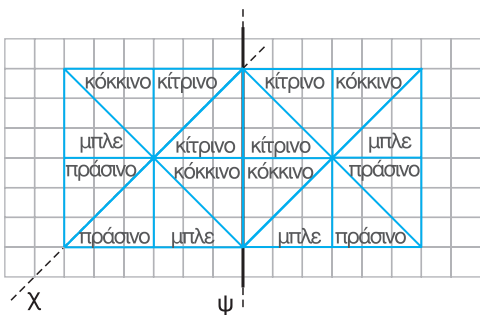
43.4

Σωστή απάντηση είναι η Ε) 85.



43.5

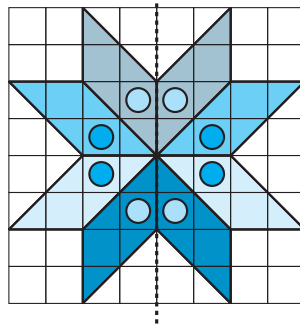
α., β.



43.6

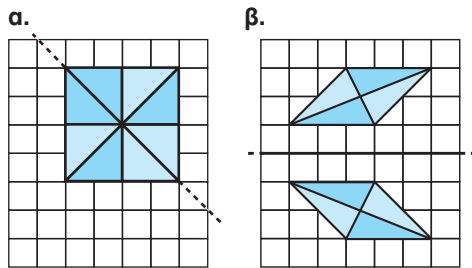
Σωστή απάντηση είναι η Γ) 32 τ.εκ.

Για παράδειγμα:



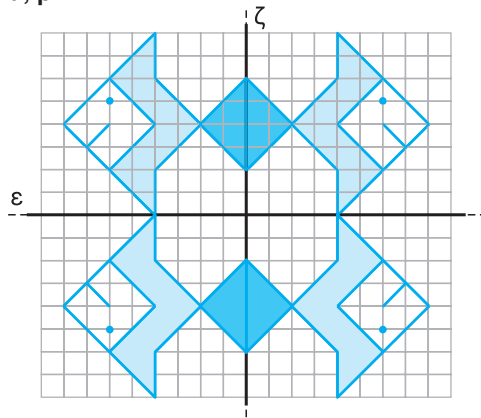
43.7

Για παράδειγμα:



43.8

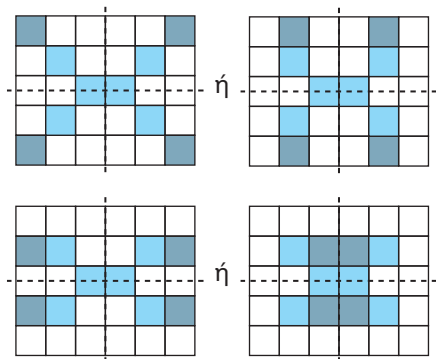
α., β.



43.9

Σωστή απάντηση είναι η Β) 4. (Αν τα μαύρα τετράγωνα τετράγωνα είναι 1 μέρος, τότε

τα άσπρα είναι 2 μέρη. Μοιράζουμε τα 30 τετράγωνα σε 3 μέρη, δηλαδή $30 : 3 = 10$ τετράγωνα τα μαύρα και $10 \times 2 = 20$ τετράγωνα τα άσπρα. Άρα πρέπει να χρωματίσουμε ακόμα $10 - 6 = 4$ τετράγωνα.) Υπάρχουν πολλές λύσεις ως προς το χρωμάτισμα. Για παράδειγμα:



43.10

Σωστή απάντηση είναι η Α) $\frac{1}{2}$.

[Αφού το ισόπλευρο τρίγωνο (ΑΒΓ) έχει άξονα συμμετρίας (ΑΔ), κάθε λευκό κομμάτι του είναι συμμετρικό με ένα χρωματιστό κομμάτι του από την άλλη πλευρά. Κάθε δύο τέτοια συμμετρικά κομμάτια έχουν ίση επιφάνεια (εμβαδόν). Επομένως όλα τα λευκά κομμάτια του τριγώνου έχουν συνολικά ακριβώς το ίδιο εμβαδόν με όλα τα χρωματιστά κομμάτια του. Άρα η λευκή του επιφάνεια είναι ακριβώς η μισή επιφάνεια όλου του τριγώνου, δηλαδή το $\frac{1}{2}$.]

44. Κύκλος – Μήκος κύκλου

44.1

α. → Λ, β. → Σ, γ. → Λ, δ. → Σ, ε. → Σ, στ. → Λ, ζ → Σ, η. → Σ, θ. → Σ, ι. → Σ

44.2

α. i) Σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ (ακτίνα) ίσο με 2 εκ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ΟΑ, σχεδιάζουμε τον κύκλο.

ii) Βρίσκουμε πρώτα την ακτίνα ($a = \delta : 2 = 6 : 2 = 3$ εκ. και στη συνέχεια εργαζόμαστε όπως στο i).

β. Το μήκος του i) κύκλου είναι $\delta = 2 \times a = 2 \times 2 = 4$ εκ., $k = \delta \times 3,14 = 4 \text{ εκ.} \times 3,14 = 12,56$ εκ.

Το μήκος του ii) κύκλου είναι $k = \delta \times 3,14 = 6 \text{ εκ.} \times 3,14 = 18,84$ εκ.

44.3

α.

| α/α | Ακτίνα (α) | Διάμετρος (δ) $\delta = 2 \times \alpha$ |
|-----|------------|---------------------------------------------|
| A | 1 μ. | 2 μ. |
| B | 2 μ. | 4 μ. |
| Γ | 4 μ. | 8 μ. |

| α/α | Μήκος κύκλου $k = \delta \times 3,14$ | Μήκος κύκλου Διάμετρος = $= 3,14$ |
|-----|------------------------------------------|-----------------------------------------|
| A | 6,28 μ. | $\frac{6,28 \mu.}{2 \mu.} = 3,14$ |
| B | 12,56 μ. | $\frac{12,56 \mu.}{4 \mu.} = 3,14$ |
| Γ | 25,12 μ. | $\frac{25,12 \mu.}{8 \mu.} = 3,14$ |

β.

| | | | | | |
|---------|----------|----------|---------|----------|---------|
| 2,5 μ. | 0,65 μ. | 0,05 μ. | 1 μ. | 2 μ. | 0,5 μ. |
| 5 μ. | 1,3 μ. | 0,10 μ. | 2 μ. | 4 μ. | 1 μ. |
| 15,7 μ. | 4,082 μ. | 0,314 μ. | 6,28 μ. | 12,56 μ. | 3,14 μ. |

44.4

α. $k = \delta \times 3,14 = 10 \mu. \times 3,14 = 31,4$ μέτρα.

β. Η διάμετρος του CD είναι $\delta = 2 \times a = 2 \times 6 \text{ εκ.} = 12 \text{ εκ.}$ Άρα το μήκος του είναι: $k = \delta \times 3,14 = 12 \text{ εκ.} \times 3,14 = 37,68$ εκ.

γ. Η διάμετρος του τραπεζομάντιλου είναι $\delta = 2 \times 0,9 \mu. = 1,8 \mu.$ και το μήκος του $k = \delta \times 3,14 = 1,8 \mu. \times 3,14 = 5,652 \mu.$ Άρα θα της

κοστίζει $5,652 \times 3,25 = 18,369 \rightarrow$ **18,37 €**.

δ. Η διάμετρος του κυκλικού σιντριβανιού είναι: $\delta = 2 \times \alpha = 2 \times 5 = 10$ μ. και το μήκος του (ο ένας γύρος) $\kappa = \delta \times 3,14 = 10 \mu. \times 3,14 = 31,4$ μ. Άρα συνολικά έτρεξε $10 \times 31,4 =$ **314 μέτρα**.

ε. Η διάμετρος της πλατείας είναι $\delta = 2 \times \alpha = 2 \times 20 \mu. = 40$ μ. και το μήκος του $\kappa = \delta \times 3,14 = 40 \mu. \times 3,14 = 125,6$ μ. Άρα τα δέντρα θα απέχουν το ένα από το άλλο $125,6 : 20 =$ **6,28 μ.**

στ. Με τον χάρακά μας μετράμε και βρίσκουμε ότι η πλευρά της τετράγωνης πλατείας στο σχέδιο είναι 3 εκ. Άρα η πραγματική πλευρά της είναι: πραγματική πλευρά = (πλευρά σχεδίου) $\times 1.000 = 3 \text{ εκ.} \times 1.000 = 3.000$ εκ. ή 30 μ. Παρατηρώντας το σχήμα, βλέπουμε ότι και η διάμετρος του κυκλικού μέρους της είναι όσο και η πλευρά του τετραγωνικού μέρους της, δηλαδή 30 μ. Επομένως:

– Περίμετρος τετραγώνου = $4 \times \text{πλευρά} = 30 \mu. \times 4 = 120$ μ.

– Μήκος κύκλου = $\delta \times 3,14 = 30 \mu. \times 3,14 = 94,2$ μ.

Ο Μηνάς θα τρέξει $120 \mu. \times 5 = 600$ μ. και η Μυρτώ $94,2 \mu. \times 5 = 471$ μ. Άρα ο Μηνάς θα τρέξει περισσότερο κατά $600 - 471 =$ **129 μέτρα**.

Αλλιώς: Στην 1η στροφή ο Μηνάς τρέχει $120 - 94,2 = 25,8$ μ. περισσότερα από τη Μυρτώ και στις 5 στροφές $25,8 \mu. \times 5 =$ **129 μ.** περισσότερα.

44.5

α. Βρίσκουμε τη διάμετρο και ύστερα την ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή: $\delta = \kappa : 3,14 = 12,56 \text{ εκ.} : 3,14 = 4 \text{ εκ.}$, $\alpha = \delta : 2 = 4 \text{ εκ.} : 2 = 2 \text{ εκ.}$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ (ακτίνα) ίσο με 2 εκ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ΟΑ, σχεδιάζουμε τον κύκλο.

β. Ο ένας γύρος (μήκος κύκλου) είναι $314 :$

$: 10 = 31,4$ μ. και η διάμετρος του κυκλικού σιντριβανιού $\delta = \kappa : 3,14 = 31,4 : 3,14 = 10$ μ. Άρα η ακτίνα του είναι: $\alpha = \delta : 2 = 10 \mu. : 2 =$ **5 μ.**

γ. Το μήκος (περίμετρος) της κυκλικής πλατείας είναι $20 \times 6,28 \mu. = 125,6$ μ. και η διάμετρος της $\delta = \kappa : 3,14 = 125,6 \mu. : 3,14 = 40$ μ. Άρα η ακτίνα της είναι: $\alpha = \delta : 2 = 40 \mu. : 2 =$ **20 μ.**

δ. Σε 1 στροφή ο μικρός τροχός διανύει απόσταση όσο το μήκος του κύκλου του. $\delta = 2 \times \alpha = 2 \times 0,5 = 1$ μ. και $\kappa = \delta \times 3,14 = 1 \mu. \times 3,14 = 3,14$ μ. Άρα για τα 628 μ. έκανε $628 \mu. : 3,14 = 200$ στροφές. Ο μεγάλος τροχός σε 1 στροφή διανύει **διπλάσια** απόσταση, γιατί η ακτίνα του είναι διπλάσια από την αντίστοιχη του μικρού τροχού. Άρα θα κάνει τις **μισές** στροφές ($200 : 2 = 100$) για να διανύσει την ίδια απόσταση (628 μ.). Αναλυτικά: Η διάμετρος του μεγάλου τροχού είναι $\delta = 2 \times \alpha = 2 \times 1 \mu. = 2$ μ. και το μήκος του $\kappa = \delta \times 3,14 = 2 \mu. \times 3,14 = 6,28$ μ. Επομένως σε 1 στροφή διανύει απόσταση 6,28 μ. Άρα για τα 628 μ. έκανε $628 \mu. : 6,28 \mu. = 100$ στροφές.

ε. Η διάμετρος του τροχού είναι $\delta = 2 \times \alpha = 2 \times 0,25 = 0,50$ μ. και το μήκος του $\kappa = \delta \times 3,14 = 0,50 \mu. \times 3,14 = 1,57$ μ. Άρα με 1 στροφή που κάνουν οι τροχοί, διανύει 1,57 μ. Σε 1 λεπτό διανύει $1,57 \mu. \times 1.000 = 1.570$ μ. Σε $\frac{1}{2}$ ώρα ή 30 λεπτά διανύει: $1.570 \mu. \times 30 = 47.100$ μ. ή 47,1 χμ.

44.6

α. – Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι **ισόπλευρο**, με μήκος πλευράς όσο δύο ακτίνες μήκους 2 εκ. Δηλαδή: $2 \text{ εκ.} + 2 \text{ εκ.} = 4 \text{ εκ.}$ ή $2 \times 2 \text{ εκ.} = 4 \text{ εκ.}$ Η περίμετρος του είναι: Περίμετρος ισόπλευρου τριγώνου = μήκος πλευράς επί 3 = $4 \text{ εκ.} \times 3 =$ **12 εκ.**

– Το τετράπλευρο ΝΞΟΠ είναι **τετράγωνο**. Οι πλευρές του είναι κάθετες και ίσες. Η καθεμία είναι όσο δύο ακτίνες μήκους 3 εκ.

Δηλαδή: $3 \text{ εκ.} + 3 \text{ εκ.} = 6 \text{ εκ.}$ ή $2 \times 3 \text{ εκ.} = 6 \text{ εκ.}$. Η περίμετρος του είναι: Περίμετρος τετραγώνου = μήκος πλευράς επί 4 = $6 \text{ εκ.} \times 4 = 24 \text{ εκ.}$

β. – Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ η κάθε πλευρά του έχει μήκος όσο δύο ακτίνες ή όσο η διάμετρος των κύκλων. Δηλαδή: Πλευρά τετραγώνου = διάμετρος κύκλου = $2 \times \alpha = 2 \times 4 \text{ εκ.} = 8 \text{ εκ.}$. Η περίμετρος του είναι: Περίμετρος τετραγώνου = $8 \text{ εκ.} \times 4 = 32 \text{ εκ.}$

– Στο ορθογώνιο ΕΖΗΘ το πλάτος του είναι όσο και η διάμετρος του κύκλου, δηλαδή $\delta = 2 \times \alpha = 2 \times 4 \text{ εκ.} = 8 \text{ εκ.}$ και το μήκος του όσο οι δύο διαμέτροι των κύκλων, δηλαδή $2 \times \delta = 2 \times 8 \text{ εκ.} = 16 \text{ εκ.}$

Η περίμετρος του είναι: Περίμετρος = (μήκος + πλάτος) $\times 2 = (8 \text{ εκ.} + 16 \text{ εκ.}) \times 2 = 24 \text{ εκ.} \times 2 = 48 \text{ εκ.}$

γ. i) Η περίμετρος του ισόπλευρου τριγώνου ΚΛΜ και του τετραγώνου ΝΞΟΠ έχει σχέση με την ακτίνα των κύκλων, γιατί η πλευρά του καθενός είναι ίση με το διπλάσιο της ακτίνας αυτών. Άρα $\delta = \kappa : 3,14 = 6,28 \text{ εκ.} : 3,14 = 2 \text{ εκ.}$ και $\alpha = \delta : 2 = 2 \text{ εκ.} : 2 = 1 \text{ εκ.}$

– Η πλευρά του τριγώνου είναι: $2 \times \alpha = 2 \times 1 \text{ εκ.} = 2 \text{ εκ.}$ και η περίμετρος του: $3 \times 2 \text{ εκ.} = 6 \text{ εκ.}$

– Η πλευρά του τετραγώνου είναι: $2 \times \alpha = 2 \times 1 \text{ εκ.} = 2 \text{ εκ.}$ και η περίμετρος του: $4 \times 2 \text{ εκ.} = 8 \text{ εκ.}$

ii) Αν υποδιπλασιάσουμε την ακτίνα των ίσων κύκλων ($\alpha = 1 \text{ εκ.} : 2 = 0,5 \text{ εκ.}$), η περίμετρος του κάθε σχήματος **θα υποδιπλασιαστεί** και αυτή και θα γίνει 3 εκ. και 4 εκ. αντίστοιχα.

iii) Για να διπλασιαστεί το μήκος της περιφέρειας των ίσων κύκλων, πρέπει **να διπλασιαστεί** η ακτίνα τους και να γίνει $2 \times 1 \text{ εκ.} = 2 \text{ εκ.}$. Αφού διπλασιάζεται η ακτίνα των ίσων κύκλων, διπλασιάζεται και η πλευρά των σχημάτων (και γίνεται $2 \times 2 \text{ εκ.} = 4 \text{ εκ.}$), και

κατά συνέπεια **διπλασιάζεται** και η περίμετρος τους και γίνεται αντίστοιχα $3 \times 4 \text{ εκ.} = 12 \text{ εκ.}$ και $4 \times 4 \text{ εκ.} = 16 \text{ εκ.}$

44.7

| | | | | | | | |
|----------------|--------|------|---------|---------|----------|----------|----------|
| Μικρός τροχός | 0,5 μ. | 1 μ. | 3,14 μ. | 3,14 μ. | 6,28 μ. | 9,42 μ. | 12,56 μ. |
| Μεγάλος τροχός | 1 μ. | 2 μ. | 6,28 μ. | 6,28 μ. | 12,56 μ. | 18,84 μ. | 25,12 μ. |

β. i) Το μήκος του μεγάλου τροχού είναι **διπλάσιο** από το μήκος του μικρού τροχού. Αυτό οφείλεται στην ακτίνα του (ή στη διάμετρό του), που είναι **διπλάσια** από την αντίστοιχη ακτίνα του μικρού τροχού.

ii) Ο μικρός τροχός κάνει τις **διπλάσιες** στροφές από ό,τι ο μεγάλος τροχός, γιατί η ακτίνα του (ή η διάμετρό του) είναι η **μισή** από την αντίστοιχη ακτίνα του μεγάλου τροχού.

44.8

α. Αφού θα τη δέσει από τον πάσσαλο που βρίσκεται στο κέντρο του χωραφιού, το μήκος του σκοινιού –για να μη φτάνει στα γειτονικά χωράφια– πρέπει να είναι ίσο με το **μισό** του μήκους της πλευράς του τετράγωνου χωραφιού. Άρα το μέρος του χωραφιού όπου μπορεί να βοσκήσει η κασίκα είναι όσο ο κυκλικός δίσκος (βλέπε σχήμα) που εφάπτεται στις πλευρές του τετράγωνου χωραφιού και έχει ακτίνα ίση με το μισό του μήκους της πλευράς του τετράγωνου χωραφιού.

Πλευρά = περίμετρος : 4 = $80 \text{ μ.} : 4 = 20 \text{ μ.}$
Ακτίνα = πλευρά : 2 = $20 \text{ μ.} : 2 = 10 \text{ μ.}$

β. i) Οι «μύτες» των δεικτών, όπως κινούνται κυκλικά, διαγράφουν κύκλους (κυκλικές τροχιές).

– Ο **ωροδείκτης** σε ένα εικοσιτετράωρο θα κάνει δύο κύκλους (γύρους), έναν το κάθε δωδεκάωρο. Η απόσταση που θα διανύσει είναι το μήκος του κύκλου του επί 2. Έτσι, έχουμε: $\delta = 2 \times \alpha = 2 \times 5 \text{ εκ.} = 10 \text{ εκ.}$. Απόσταση = $2 \times \kappa = 2 \times (\delta \times 3,14) = 2 \times (10 \text{ εκ.} \times$

