ΣΩΤΗΡΗΣ Ε. ΛΟΥΡΙΔΑΣ

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

(Για φοιτητές Πολυτεχνικών, Φυσικομαθηματικών, Οικονομικών Σχολών και ΤΕΙ)

- Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης
- Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και ανωτέρου βαθμού
- Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης
- Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις
- Συστήματα διαφορικών εξισώσεων
- Λύσεις με σειρές
- Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους – Εξισώσεις Pfaff

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr

Σωτήρης Ε. Λουρίδας

Συνηθεις Διαφορικες Εξισωσεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Θέση υπογραφής δικαιούχου δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας,
εφόσον η υπογραφή προβλέπεται από τη σύμβαση

Εκδόσεις Πατάκη – Εκπαίδευση
Σωτήρης Ε. Λουρίδας, *Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*
Διορθώσεις: Μάγδα Τικοπούλου
Υπεύθυνος έκδοσης: Νίκος Κύρος
DTP: Γιώργος Χατζησπύρος
Φιλμ – μοντάζ: Γιώργος Κεραμάς

Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Μάιος 2018
Κ.Ε.Τ. Β420 – Κ.Ε.Π. 202/18
ISBN 978-960-16-7696-8

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665, ΦΑΞ: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ ΒΟΡΕΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ: ΚΟΡΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ – ΠΕΡΙΟΧΗ Β΄ ΚΤΕΟ),
570 09 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ, Τ.Θ. 1213, ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, ΦΑΞ: 2310.70.63.55
Web site: http://www.patakis.gr • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Στην οικογένειά μου,
την Αθανασία, τον Στάθη και
την Κωνσταντίνα

Προλογος

Τα βιβλία *Ολοκληρώματα Ι*, *Ολοκληρώματα ΙΙ* και *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις* γράφτηκαν κύρια για τους φοιτητές των ΑΕΙ και ΤΕΙ. Για τα Μαθηματικά η γνώση της θεωρίας είναι βασική προϋπόθεση. Η εμπέδωση της θεωρίας και η κατανόηση της δομικής συμπεριφοράς της είναι αποτέλεσμα της λύσης αντίστοιχων προβλημάτων με τη δυνατότητα επιλογής της κατάλληλης μεθόδου επίλυσης. Όπως έχουμε αναφέρει στην επιστημονική μας εργασία στο 20ό Μαθηματικό Συνέδριο της ΕΜΕ στην Ημαθία το 2003, είναι κορυφαία η κάθε στιγμή που επιτυγχάνεται η λύση ενός μαθηματικού προβλήματος. Είναι η στιγμή που πείθει για τη διαίσθηση, για την ορθότητα των λογικών συνδυασμών και για τη σωστή επιλογή της μεθόδου. Εξάλλου ο Lebesgue έλεγε: Αν θέλεις να κατανοήσεις τα Μαθηματικά, αρκεί να παρακολουθείς τις κινήσεις ενός μαθηματικού όταν επιλύει μαθηματικά προβλήματα. ***Ως εκ τούτου η επιτυχία των φοιτητών μας στις εξετάσεις τους στα Μαθηματικά εξαρτάται κατά μεγάλο μέρος από την προπόνησή τους μέσα από τη λύση κατάλληλων ασκήσεων και προβλημάτων.*** Οι διαφορικές εξισώσεις είναι από τους σημαντικότερους και καθοριστικότερους τομείς των Μαθηματικών. Αποτελούν γνωστικό αντικείμενο που ήρθε στην επιφάνεια από τότε που ο Newton και ο Leibniz εφεύραν τον μαθηματικό λογισμό. Είναι βασική μαθηματική θεωρία με πολλές εφαρμογές στη Φυσική, τη Βιολογία, τα Οικονομικά, την Τεχνολογία κτλ. Προσπαθήσαμε λοιπόν να συγγράψουμε ένα βιβλίο που να αναφέρεται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και να αποτελεί προπονητικό μηχανισμό μέσα από θεματικές ενότητες που αναπτύσσονται με τρόπο απλό και κατανοητό. Θεωρούμε ότι το βιβλίο αυτό μπορεί να χρησιμεύσει ουσιαστικά στον καθηγητή των Μαθηματικών αλλά και σε κάθε ασχολούμενο με τη μεθοδολογία και την επίλυση μαθηματικών ασκήσεων και προβλημάτων.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα προσωπικά να αναφερθώ ειδικά στον καθηγητή πανεπιστημίου κ. Γιώργο Δάσιο, εγνωσμένης διεθνώς μαθηματικής αξίας, που έχει προσφέρει και στο γνωστικό αντικείμενο των διαφορικών εξισώσεων. Επίσης θα ήθελα να αναφερθώ στον καθηγητή της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης κ. Γιώργο Ποδάρα, που για εμένα αποτελεί απλησίαστο παράδειγμα γνώσης και ευστροφίας. Θα ήταν βασική παράλειψη να μην αναφερθούμε στο υψηλό επίπεδο διδασκαλίας των διαφορικών εξισώσεων από τα ΑΕΙ και τα ΤΕΙ της Ελλάδας.

Σωτήρης Ε. Λουρίδας

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1. Γνωρίζουμε το πρόβλημα, να δίνεται μία συνάρτηση $f(x)$ και να μας ζητούν τον προσδιορισμό της ***παραγώγου*** $f'(x)$ ***της συνάρτησης*** $f(x)$. Γνωρίζουμε επίσης το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή να δίνεται η παράγωγος $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ και να μας ζητούν τον προσδιορισμό της $f(x)$. Αυτό ζητείται κάτω από το σύμβολο $\int$ και μετά από αυτό ακολουθεί το διαφορικό της ζητούμενης συνάρτησης, που σε πολλές περιπτώσεις πρέπει με τύπους και ιδιότητες να αποκρυπτογραφηθεί, ώστε να οδηγηθούμε στον υπολογισμό. Σε αυτή την περίπτωση η $f(x)$ ονομάζεται ***αρχική ή παράγουσα ή αόριστο ολοκλήρωμα***.

Παρατήρηση

Ως γνωστόν, ισχύει ο τύπος $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_{\alpha}^{x} = F(x) - F(\alpha)$, αν $F(x)$ είναι μία παράγουσα της $f(x)$. Εδώ, στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων, θα δούμε την ίδια ισότητα, κάτω όμως από τον συμβατικό συμβολισμό

$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{x} = F(x) - F(\alpha)$, αν $F(x)$ είναι μία παράγουσα της $f(x)$.

1.2. Επισημαίνουμε υπενθυμίζοντας ότι σε μία συνάρτηση $f(x)$ αντιστοιχίζεται μόνο μία παράγωγος, ενώ σε μία παράγωγο $f'(x)$ αντιστοιχίζονται άπειρες αρχικές συναρτήσεις, που όμως διαφέρουν μεταξύ τους κατά σταθερά.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι $\int d\,f(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + c$.

Τα ολοκληρώματα αποτελούν βασικότατο προαπαιτούμενο για τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων και ως εκ τούτου η γνώση τους κρίνεται απαραίτητη.

1.3. Η έννοια της ***εξίσωσης*** στα Μαθηματικά είναι γνωστή. Επί του πρακτέου είναι μία ισότητα με βάση την οποία ζητάμε τον προσδιορισμό μεγέθους που υπάρχει σε αυτή, όταν γνωρίζουμε ότι το μέγεθος αυτό αναφέρεται σε συγκεκριμένο σύνολο. Αν λοιπόν, με την υπόθεση ότι η εξίσωση έχει λύση, καταλήξουμε σε μέγεθος που την επαληθεύει, τότε αυτό αποτελεί λύση της.

1.4. Γνωρίζουμε επίσης ότι, αν έχουμε συνάρτηση $f(x, y)$ με τις μεταβλητές x, y να εκφράζονται με βάση τις μεταβλητές u, v, $u \in I_1$, $v \in I_2$, και υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των x, y ως προς τις u, v, τότε παίρνουμε την ιακωβιανή ορίζουσα $J = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Έτσι, ισχύει ο τύπος $dxdy = |J| dudv$, αν $J \neq 0$, για κάθε στοιχείο u του ανοικτού διαστήματος I_1 και για κάθε στοιχείο v του ανοικτού διαστήματος I_2. Στην ειδική περίπτωση έκφρασης των x, y μέσω των πολικών συντεταγμένων r, θ $\left[\left(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\right) \Rightarrow \left(x^2 + y^2 = r^2,\ \dfrac{y}{x} = \tan x\right)\right]$, διαμορφώνεται με βάση την ιακωβιανή ορίζουσα $J = r$ ο τύπος $dxdy = r\,drd\theta$ (Σωτήρης Ε. Λουρίδας, *Ολοκληρώματα ΙΙ*, Εκδόσεις Πατάκη).

1.5. Ως ***διαφορική εξίσωση*** εννοούμε κάθε εξίσωση που περιέχει παραγώγους. Για παράδειγμα $\dfrac{dy}{dx} = x^3 + 3x + 1$ ή $xy' + y + 1 = 0$ ή $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1$ ή $y^3dx = x^5dy$ ή $\dfrac{dx}{dy} = 2x^2 + 1$ ή $u_{xx} + u_{yy} = g(x, y)$ κτλ.

1.5.1. **Λύση ή ολοκλήρωμα** μιας διαφορικής εξίσωσης είναι κάθε συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα που την επαληθεύει.

1.5.2. **Επίλυση ή ολοκλήρωση** μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η εύρεση όλων των λύσεών της.

1.5.3. Ολοκληρωτικές καμπύλες ή γραμμές μιας διαφορικής εξίσωσης είναι οι γραφικές παραστάσεις των λύσεών της ή, διαφορετικά, οι γραμμές που έχουν ως εξισώσεις τις εξισώσεις που ορίζουν τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.

Οι διαφορικές εξισώσεις κατανέμονται σε δύο κατηγορίες:

α. Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Είναι οι διαφορικές εξισώσεις που η ζητούμενη συνάρτηση είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής. Η γενική μορφή μίας τέτοιας διαφορικής εξίσωσης είναι

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

β. Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ή πιο απλά μερικές διαφορικές εξισώσεις). Είναι οι διαφορικές εξισώσεις που η ζητούμενη συνάρτηση είναι συνάρτηση περισσότερων της μίας μεταβλητών, οπότε οι παράγωγοι είναι μερικές παράγωγοι. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η εξίσωση του Laplace:

$\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,\ V = V\left(x, y, z\right)$ ή η εξίσωση $u_x + uu_y = 0$ κτλ.

1.5.4. Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η ***μεγαλύτερη*** από τις τάξεις των παραγώγων της ζητούμενης συνάρτησης (μετά την εκτέλεση των αναγωγών) που υπάρχει στη διαφορική αυτή εξίσωση.

1.5.5. Βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η ***μεγαλύτερη*** από τις δυνάμεις που είναι υψούμενη η παράγωγος της ***μεγαλύτερης τάξης***, αν προηγουμένως, μετά τη «μεταφορά» όλων των όρων στο αριστερό μέλος (οπότε το δεξί μέλος είναι το μηδέν) και την εκτέλεση των αναγωγών, προκύπτει πολυώνυμο $P\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right)$ ως προς τις μεταβλητές, δηλαδή της συνάρτησης και των παραγώγων της. Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο βαθμός μιας διαφορικής εξίσωσης πιθανόν να μην υπάρχει, π.χ. ο βαθμός της $y' + \cos y + x = 0$ δεν ορίζεται, αφού το $\cos y$ δεν αντιπροσωπεύεται από πολυωνυμική έκφραση (αναπτύσσεται, κατά τα γνωστά, ως σειρά). Επίσης θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης δεν επηρεάζεται από τον βαθμό της.

Παράδειγμα 1

Η διαφορική εξίσωση $y''' + \left(y'\right)^2 = xy$ είναι τρίτης τάξης και πρώτου βαθμού.

Παράδειγμα 2

Η διαφορική εξίσωση $y''' + \sqrt{y'} + xy = 0$ είναι τρίτης τάξης και δεύτερου βαθμού, καθότι, για να τη διαμορφώσουμε σε πολυωνυμική μορφή, παίρνουμε $\sqrt{y'} = -y''' - xy$, οπότε προκύπτει $y' = \left(y'''\right)^2 + 2xyy''' + x^2y^2 \Leftrightarrow$

$\left(y'''\right)^2 + 2xyy''' - y' + x^2y^2 = 0$.

1.5.6. **Γραμμική διαφορική εξίσωση** ονομάζεται η διαφορική εξίσωση που είναι πρώτου βαθμού ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της.

1.5.7. Μία γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξης έχει τη μορφή $p_n\left(x\right)y^{(n)} + p_{n-1}\left(x\right)y^{(n-1)} + \ldots + p_1\left(x\right)y' + p_0\left(x\right)y = g\left(x\right)$, με τις συναρτήσεις $p_0\left(x\right), p_1\left(x\right), \ldots, p_{n-1}\left(x\right), p_n\left(x\right)$ να είναι οι ***συντελεστές*** της γραμμικής αυτής διαφορικής εξίσωσης. Μία γραμμική διαφορική εξίσωση ***πρώτης τάξης*** είναι της μορφής $y' + p\left(x\right)y = q\left(x\right)$.

Παρατήρηση

Ενώ κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού, αυτό δε σημαίνει ότι κάθε διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού είναι και γραμμική. Δηλαδή υπάρχουν διαφορικές εξισώσεις, όπως η $y' = c + xy^3$, με c σταθερά, που είναι πρώτου βαθμού, αλλά δεν είναι γραμμικές.

2. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Αν έχουμε μία συνάρτηση $y = y(x)$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες, τότε η εξίσωση $h(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \;\; (1)$, όταν $c_1, c_2, ..., c_n$ τυχούσες σταθερές, παριστάνει μία επίπεδη καμπύλη. Κάθε μεταβολή τουλάχιστον μίας από τις σταθερές $c_1, c_2, ..., c_n$ δημιουργεί επίσης μία επίπεδη καμπύλη. Έτσι, δημιουργείται μία ***οικογένεια*** επίπεδων καμπύλων. Από αυτές μπορεί να διαμορφωθεί μία διαφορική εξίσωση της οποίας οι καμπύλες αυτές να είναι λύσεις. Προς τούτο, και επειδή η παράγωγος σταθεράς είναι μηδέν, θα πρέπει με παραγώγιση ή διαδοχικές παραγωγίσεις ως προς x να απαλείψουμε τις σταθερές $c_1, c_2, ..., c_n$. Αν έχουμε εξίσωση της μορφής $h(x, y, c) = 0 \;\; (2)$, δηλαδή όταν έχουμε μία παράμετρο, τη c (***μονοπαραμετρική*** οικογένεια καμπύλων), τότε παραγωγίζουμε τη (2) ως προς x και παίρνουμε, κατά τα γνωστά $h'_x(x, y, c)dx + h'_y(x, y, c)dy = 0$ ή $h'_x(x, y, c) + h'_y(x, y, c)\,y' = 0$ (παραγώγιση πεπλεγμένης συνάρτησης), άρα τελικά εξίσωση της μορφής $h_1(x, y, y', c) = 0 \;\; (3)$. Αν απαλείψουμε τώρα από τις σχέσεις $(2), (3)$ τη σταθερά c, τότε παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση που αντιστοιχίζεται στην οικογένεια των καμπύλων $h(x, y, c) = 0$, δηλαδή των καμπύλων που είναι λύσεις της. ***Γενικότερα*** όταν έχουμε μία ***n - παραμετρική*** οικογένεια καρτεσιανών καμπύλων, δηλαδή καμπύλων που παράγονται από εξίσωση της μορφής $h(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \;\; (4)$, που περιέχει τη συνάρτηση y και n αυθαίρετες σταθερές, για να προσδιορίσουμε τη διαφορική εξίσωση που τα στοιχεία της οικογένειας αυτής είναι λύσεις της, εκτελούμε n παραγωγίσεις της (4), οπότε διαδοχικά παίρνουμε:

$$\left\{ \begin{array}{c} h_1(x, y, y', c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \\ h_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \\ \vdots \\ h_n(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}, ..., c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \end{array} \right. .$$

Εδώ διαμορφώνουμε το σύστημα των $(n+1)$ εξισώσεων

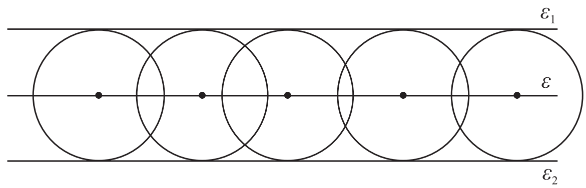
$$\sum:\begin{cases} h(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \\ h_1(x, y, y', c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \\ h_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \\ \vdots \\ h_n(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}, ..., c_1, c_2, ..., c_n) = 0 \end{cases}.$$

Τέλος απαλείφουμε με βάση το σύστημα $\sum$ τις σταθερές $c_1, c_2, ..., c_n$ και έχουμε τη διαμόρφωση της διαφορικής εξίσωσης $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, της οποίας οι καμπύλες της οικογένειας $h(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ είναι λύσεις.

Παρατήρηση

Κατά την παραγώγιση ή τις παραγωγίσεις ως προς x θα πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι, αν $y = y(x)$, το y είναι εξαρτημένη μεταβλητή. Για παράδειγμα κατά την παραγώγιση ως προς x έχουμε $(x^n)' = n\,x^{n-1}$, ενώ, αν $y = y(x)$, παίρνουμε $(y^n)' = n\,y^{n-1}\,y'$.

2.1. **Περιβάλλουσα καμπύλη** K μιας οικογένειας καμπύλων C είναι μία καμπύλη που το κάθε σημείο της είναι σημείο επαφής με καμπύλη της C, και αντίστροφα κάθε καμπύλη της οικογένειας C εφάπτεται στην K. Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι περιβάλλουσες της οικογένειας των ίσων κύκλων που τα κέντρα τους βρίσκονται σε συγκεκριμένη ευθεία ε.



Σχ. 1

Βασική πρόταση

Η τυχούσα καμπύλη που δέχεται σε κάθε σημείο της εφαπτομένη καμπύλη από οικογένεια καμπύλων είναι περιβάλλουσα της οικογένειας αυτής.

2.2. **Ανώμαλο σημείο** μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας καμπύλων $h(x, y, c) = 0$ είναι το σημείο (x_0, y_0) για το οποίο έχουμε $\dfrac{\partial h(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$ και $\dfrac{\partial h(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$.

Βασική πρόταση

Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων $h(x, y, c) = 0$, με c σταθερά. Κάθε συνάρτηση $y = y(x)$ που διαμορφώνεται από την απαλοιφή της c από το σύστημα $\begin{cases} h(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial h(x, y, c)}{\partial c} = 0 \end{cases}$ είναι περιβάλλουσα της οικογένειας ή είναι ο γεωμετρικός τόπος των ανώμαλων σημείων της.

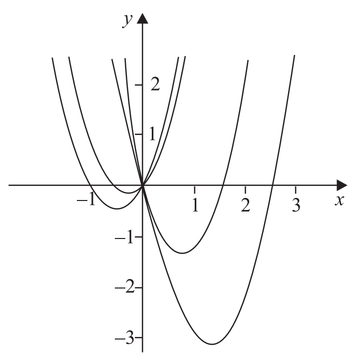
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Βρείτε τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας των καμπύλων** $\boldsymbol{y = 2x^2 + cx \quad (1)}$**.**

Λύση

Παραγωγίζουμε ως προς x και παίρνουμε $y' = 4x + c \ (2)$. Απαλείφουμε με βάση το σύστημα των $(1), (2)$ τη σταθερά c και έχουμε

$y = 2x^2 + (y' - 4x)x \Leftrightarrow y - xy' + 2x^2 = 0 \ (3)$, και έτσι προσδιορίσαμε τη διαφορική εξίσωση (3) της οικογένειας των καμπύλων (1). Στο Σχ. 2 που ακολουθεί βλέπουμε μερικές καμπύλες της οικογένειας αυτής.



Σχ. 2

2. Βρείτε τη διαφορική εξίσωση της οικογένειας των κύκλων που βρίσκονται σε ένα επίπεδο.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση ενός κύκλου έχει τη γενική μορφή

$x^2+y^2+2\alpha x+2by+c=0$ (1). Εδώ έχουμε τρεις σταθερές, τις α,b,c, που πρέπει να απαλείψουμε εκτελώντας τρεις διαδοχικές παραγωγίσεις ως προς x.

Έτσι, διαδοχικά προκύπτουν οι εξισώσεις $\begin{cases} x+yy'+\alpha+by'=0 & (2) \\ (y')^2+yy''+by''+1=0 & (3), \\ 3y'y''+yy'''+by'''=0 & (4) \end{cases}$

που μαζί με την (1) αποτελούν σύστημα, από το οποίο θα προκύψει η διαφορική εξίσωση που δε θα περιέχει σταθερές. Εδώ παρατηρούμε ότι οι (3), (4) περιέχουν μόνο τη σταθερά b και επομένως προσφέρονται για την απαλοιφή της. Προς τούτο θα εργαστούμε αλγεβρικά. Παρατηρούμε ότι

$(3)\Leftrightarrow by''=-(y')^2-yy''-1$ $\quad (4)\Leftrightarrow by''=-3y'y''-yy'''$.

Διαιρούμε κατά μέλη για να απλοποιηθεί η σταθερά b και καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση $\left[(y')^2+1\right]yy'''-3y'(y'')^2=0$.

3. Βρείτε τη διαφορική εξίσωση των γραμμών $y=\alpha\sin x+b\cos x$ (1).

Λύση

Παραγωγίζουμε δύο φορές την (1) ως προς x και παίρνουμε

$y'=\alpha\cos x-b\sin x$ (2) και $y''=-\alpha\sin x-b\cos x$ (3). Διαμορφώνουμε έτσι το σύστημα ως προς τις σταθερές α, b:

$\sum:\begin{cases} (\sin x)\alpha+(\cos x)b=y \\ (\cos x)\alpha+(-\sin x)b=y' \\ (-\sin x)\alpha+(-\cos x)b=y'' \end{cases}$, το οποίο θα πρέπει να είναι συμβιβαστό.

Σκεφτόμαστε αλγεβρικά και χρησιμοποιούμε ότι η συνθήκη είναι η

$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y \\ \cos x & -\sin x & y' \\ -\sin x & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0$, από όπου τελικά από την ανάπτυξη της ορίζουσας προκύπτει η διαφορική εξίσωση $y'' + y = 0$.

4. Βρείτε διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, ώστε η συνάρτηση $y(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \quad (1)$ να είναι λύση της.

Λύση

Επειδή θέλουμε διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, παραγωγίζουμε την (1) ως προς x και παίρνουμε $y' = \left(e^{x^2}\right)'\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)'$ ή

$y' = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + e^{x^2}e^{-x^2}$ ή $y' - 2xy - 1 = 0$.

5. Αν γνωρίζουμε από τη Μηχανική ότι η παραβολική τροχιά βλήματος που ρίχνεται υπό κλίση λ, με αρχική ταχύτητα υ_0 και με κίνηση του βλήματος σε σταθερό κατακόρυφο επίπεδο, δίνεται από τον τύπο $y = \lambda x - \frac{(1+\lambda^2)g}{2\upsilon_0^2}x^2 \ (1)$, να εξετάσετε την ύπαρξη περιβάλλουσας των τροχιών (1). Στη συνέχεια να βρείτε τη διαφορική εξίσωση των τροχιών αυτών. Θεωρούμε ως g την επιτάχυνση της βαρύτητας και ότι η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα.

Λύση

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς λ και παίρνουμε $0 = x - \frac{\lambda g}{\upsilon_0^2}x^2 \Leftrightarrow x\left(1 - \frac{\lambda g}{\upsilon_0^2}x\right) = 0$.

Από την τελευταία έχουμε $x = 0 \Rightarrow y = 0$ ή $x \neq 0$ και $\lambda = \frac{\upsilon_0^2}{gx}$. Για να απαλείψουμε το λ με σκοπό να βρούμε περιβάλλουσα, αντικαθιστούμε την τιμή αυτή του λ στην (1) και παίρνουμε την παραβολή $y=\frac{\upsilon_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}$. Τελικά η περιβάλλουσα των τροχιών είναι το σημείο O και η παραβολή $y=\frac{\upsilon_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}$. Παραγωγίζουμε τώρα την (1) ως προς x και έχουμε $y^{'}=\lambda-\frac{(1+\lambda^2)g}{\upsilon_0^2}x \ (2)$.

Από τις (1), (2) προκύπτει $\lambda=\frac{2y-y^{'}x}{x}$, $x\neq 0$, οπότε αντικαθιστώντας π.χ. στην (1) παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση των τροχιών, που τελικά είναι η εξίσωση $gx^2\left(y^{'}\right)^2+2x\left(\upsilon_0^2-2gy\right)y^{'}+gx^2-2\upsilon_0^2y+4gy^2=0$.

3. ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΛΥΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

3.1. **Γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα** μιας δεδομένης διαφορικής εξίσωσης $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ n τάξης, όταν υπάρχουν οι προϋποθέσεις, καλείται κάθε συνάρτηση $y = y(x)$ εξαρτώμενη από n σταθερές, που, αν τις απαλείψουμε με παραγώγιση ή διαδοχικές παραγωγίσεις, όπως ήδη έχουμε δει, προκύπτει η δεδομένη διαφορική εξίσωση. Επισημαίνουμε ότι για την τυχαία λύση $y = y(x)$ η $F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0$ είναι ταυτότητα ως προς x. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση $y'' = y$ έχει ως γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα την $y = \alpha e^{x} + be^{-x}$, με α, b αυθαίρετες σταθερές, αφού $y' = \alpha e^{x} - be^{-x} \Rightarrow y'' = \alpha e^{x} + be^{-x} \Rightarrow y'' = y'$.

3.2. **Μερική λύση ή μερικό ολοκλήρωμα** μιας δεδομένης διαφορικής εξίσωσης καλείται κάθε συνάρτηση που προκύπτει από τη γενική λύση, αν στις αυθαίρετες σταθερές δοθούν συγκεκριμένες τιμές.

3.3. **Ιδιάζουσα λύση** μίας δεδομένης διαφορικής εξίσωσης είναι κάθε λύση που δεν μπορεί να προκύψει από τη γενική λύση της, άρα δεν είναι μερική λύση. Για παράδειγμα η $y = -\frac{x^2}{8}$ είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης $2\left(y'\right)^2 + xy' = y$ (1), αφού την επαληθεύει. Όμως η γενική λύση της (1) είναι η $y = \alpha x + 2\alpha^2$ (2), με α αυθαίρετη σταθερά, χωρίς να υπάρχει τιμή της σταθεράς α που από τη (2) να προκύπτει η $y = -\frac{x^2}{8}$. Άρα η $y = -\frac{x^2}{8}$ είναι μία ιδιάζουσα λύση της (1). Αν υποθέσουμε ότι η οικογένεια των ολοκληρωτικών γραμμών διαφορικής εξίσωσης $F\left(x, y, y'\right) = 0$ έχει περιβάλλουσα, τότε αυτή είναι ολοκληρωτική γραμμή της. Αν αυτή η περιβάλλουσα υπάρχει, τότε έχει ως εξισώσεις τις $\sum:\begin{cases} F(x,\, y,\, p)=0 \\ F_p^{'}(x,\, y,\, p)=0 \end{cases}$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, δηλαδή μπορεί μία ολοκληρωτική γραμμή να παριστάνεται από τις $\sum:\begin{cases} F(x,\, y,\, p)=0 \\ F_p^{'}(x,\, y,\, p)=0 \end{cases}$, χωρίς να είναι περιβάλλουσα της $F(x,\, y,\, y^{'})=0$. Θα γνωρίζουμε όμως ότι, αν υπάρχουν συναρτήσεις $y=y(x)$ που ικανοποιούν τις $\sum:\begin{cases} F(x,\, y,\, p)=0 \\ F_p^{'}(x,\, y,\, p)=0 \end{cases}$ και ταυτόχρονα ικανοποιούν και την $F(x,\, y,\, y^{'})=0$, τότε αυτές είναι ιδιάζουσες λύσεις της $F(x,\, y,\, y^{'})=0$.

Βασική πρόταση

> Αν μία συνήθης διαφορική εξίσωση $F\left(x, y, y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}\right)=0$ έχει ιδιάζουσα λύση, τότε αυτή είναι περιβάλλουσα ορισμένων ή όλων των γραμμών της οικογένειας των καμπύλων που προκύπτει από τη γενική λύση ή είναι ο γεωμετρικός τόπος των ανώμαλων σημείων της οικογένειας αυτής.

Παρατήρηση

Λύση της διαφορικής εξίσωσης $F\left(x, y, y^{'}, y^{''}, \ldots, y^{(n)}\right)=0$ μπορεί να είναι και συνάρτηση $x=x(y)$, ώστε η $F\left(x(y), y, \dfrac{1}{x^{'}(y)}, \ldots\right)=0$ να είναι ταυτότητα ως προς y. Επίσης λύση μπορεί να παρέχεται από εξίσωση της μορφής $p(x,\, y)=0$, αν $y=y(x)$ και αντίστροφα.

3.4. **Γενικά,** η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης μπορεί να είναι σε ***αναλυτική μορφή***, από όπου δηλαδή να μπορούμε να έχουμε επίλυση ως προς

y $\left(y=y(x)\right)$ ή ως προς x $\left(x=x(y)\right)$, ή μπορεί να είναι σε ***πεπλεγμένη μορφή***, που σημαίνει μορφή που δεν παρέχει επίλυση ως προς y $\left(y=y(x)\right)$ και επίλυση ως προς x $\left(x=x(y)\right)$.

Παρατήρηση

Σε πολλές περιπτώσεις για τον υπολογισμό της ***γενικής λύσης ή του γενικού ολοκληρώματος*** υπολογίζουμε επιμέρους ολοκληρώματα χωρίς την πρόσθεση της αντίστοιχης σταθεράς. Αυτό γίνεται επειδή τελικά αυτή είναι «ενσωματωμένη» στη σταθερά της γενικής λύσης.

4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

4.1. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΧΩΡΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Είναι τελικά της μορφής $g(y)dy = f(x)dx$ ή της ισοδύναμης μορφής $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$.

Παρατηρούμε ότι η γενική λύση της, που προέρχεται από την ολοκλήρωση και των δύο μελών της $g(y)dy = f(x)dx$, δηλαδή $\int g(y)dy = \int f(x)dx + k$, θα είναι της μορφής $G(y) = F(x) + c \ (1)$, αν $\int g(y)dy = G(y) + c_1, \int f(x)dx = F(x) + c_2$, με το γράμμα c της (1) να συμβολίζει την τελική σταθερά (εδώ $c = c_2 - c_1 + k$). Είναι κατανοητό ότι, αν θέσουμε $h(x) = -f(x)$, τότε η $g(y)dy = f(x)dx$ παίρνει τη μορφή $h(x)dx + g(y)dy = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $x(1+y^2) - y(1+x^2)y' = 0$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η διαφορική αυτή εξίσωση παίρνει τη μορφή

$x(1+y^2) = y(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}$ ή τη μορφή $\dfrac{x}{1+x^2}dx = \dfrac{y}{1+y^2}dy$. Για τη γενική της λύση αρχικά ολοκληρώνουμε $\int \dfrac{y}{1+y^2}dy = \int \dfrac{x}{1+x^2}dx + k$. Εδώ υπολογίζουμε

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2)'}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ell n(1+x^2) + c_1, \int \frac{y}{1+y^2}dx = \ldots = \frac{1}{2}\ell n(1+y^2) + c_2.$$

Επομένως έχουμε $\dfrac{1}{2}\ell n(1+x^2) = \dfrac{1}{2}\ell n(1+y^2) + k$ ή

$\frac{1}{2}\ell n\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\ell n\left(1+y^2\right)+\frac{1}{2}\ell ne^{2k}$, για να έχουμε παντού ℓn, ώστε να απλοποιήσουμε τη διαδικασία, ή $\ell n\frac{1+x^2}{1+y^2}=\ell ne^{2k}$ ή $\frac{1+x^2}{1+y^2}=e^{2k}$ ή $\frac{1+x^2}{1+y^2}=c$.

Η τελευταία σχέση είναι που μας δίνει τη γενική λύση.

2. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $y'+by^2=b^3$, με b σταθερά και $y>|b|$.

Λύση

Η διαφορική αυτή εξίσωση γίνεται $\frac{dy}{dx}=-b\left(y^2-b^2\right)$ ή $\frac{dy}{b\left(y^2-b^2\right)}=-dx$, δηλαδή είναι χωριζόμενων μεταβλητών. Το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους υπολογίζεται αν παρατηρήσουμε ότι $\frac{1}{y^2-b^2}=\frac{1}{(y-b)(y+b)}=\frac{1}{2b}\left(\frac{1}{y-b}-\frac{1}{y+b}\right)\Rightarrow$

$\int\frac{1}{b\left(y^2-b^2\right)}dy=\frac{1}{2b^2}\ell n\left(y-b\right)-\frac{1}{2b^2}\ell n\left(y+b\right)+k_1=\frac{1}{2b^2}\ell n\frac{y-b}{y+b}+k_1$, αφού από υπόθεση ισχύουν οι σχέσεις $y-b>0$ και $y+b>0$.

Το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους είναι $\int -dx=-x+k_2$. Άρα παίρνουμε

$\frac{1}{2b^2}\ell n\frac{y-b}{y+b}=-x+c\Leftrightarrow \ell n\frac{y-b}{y+b}=\ell ne^{-2b^2(x-c)}\Leftrightarrow\frac{y-b}{y+b}=e^{-2b^2(x-c)}$.

Αν τώρα λύσουμε ως προς y, έχουμε $y=b\frac{1+e^{-2b^2(x-c)}}{1-e^{-2b^2(x-c)}}\Leftrightarrow y=b\frac{e^{b^2(x-c)}+e^{-b^2(x-c)}}{e^{b^2(x-c)}-e^{-b^2(x-c)}}$, που είναι μία μορφή της γενικής λύσης.

Παρατήρηση

Αν δε δινόταν ο περιορισμός $y>|b|$, τότε θα έπρεπε να διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν $y=-b$, τότε $y'=0$, τιμές που επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση. Το ίδιο συμβαίνει αν $y=b$, οπότε $y'=0$. Αν $y<-|b|$ ή $y>|b|$, τότε η γενική λύση είναι η $y=b\frac{e^{b^2(x-c)}+e^{-b^2(x-c)}}{e^{b^2(x-c)}-e^{-b^2(x-c)}}$, αποτέλεσμα της διαδικασίας που ήδη είδαμε. Αν

$-|b| < y < |b|$, εργαζόμαστε ομοίως αλγεβρικά και έτσι ως γενική λύση έχουμε την $y = b\dfrac{e^{b^2(x-c)} - e^{-b^2(x-c)}}{e^{b^2(x-c)} + e^{-b^2(x-c)}}$.

3. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $y\ell ny + xy' = 0$, αν $y > 0$, και βρείτε τη μερική της λύση στο σημείο $(1, e^2)$. Υπάρχουν ιδιάζουσες λύσεις;

Λύση

Η εξίσωση γράφεται ως $(y\ell ny)dx + xdy = 0,\ y > 0$. Αυτή οδηγεί σε εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Αν $y\ell ny \neq 0$, δηλαδή $y \neq 0$ και $y \neq 1$, τότε παίρνουμε $\dfrac{dy}{y\ell ny} = -\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y\ell ny} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{\ell ny} d(\ell ny) = -\ell n|x| + k$, οπότε καταλήγουμε στην $\ell n|\ell ny| = \ell n\dfrac{e^k}{x}$, $x > 0$, ή $|\ell ny| = \dfrac{e^k}{x}$. Επομένως ως γενική λύση έχουμε $\left(y = e^{-\frac{c}{x}},\ 0 < y < 1 \right)$ ή $\left(y = e^{\frac{c}{x}},\ \ y > 1 \right)$. Για $x = 1$ και $y = e^2$ παίρνουμε $e^2 = e^c \Leftrightarrow c = 2$, οπότε $y = e^{\frac{2}{x}}$, που είναι η ζητούμενη μερική λύση της. Αν λάβουμε εδώ υπόψη την *Παρατήρηση* της σελίδας 18, διαπιστώνουμε εύκολα ότι οι $x = 0$ και $y = 1$ είναι ιδιάζουσες λύσεις της $(y\ell ny)dx + xdy = 0,\ y > 0$, αφού την επαληθεύουν.

4. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $x = \sin y'$.

Λύση

Από τη δοθείσα εξίσωση παίρνουμε $y' = Arc\sin x \Rightarrow dy = Arc\sin x\,dx$. Από εδώ προκύπτει $\int dy = \int Arc\sin x\,dx + c \Rightarrow y = \int x' Arc\sin x\,dx + c \Rightarrow$

$y = xArc\sin x - \displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + c \Rightarrow y = xArc\sin x + \sqrt{1-x^2} + c.$

5. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $2x(y+1)dx=(1-x^2)dy$.

Λύση

Αν $x\neq -1, x\neq 1$ και $y\neq -1$, για τη γενική λύση παίρνουμε

$$\frac{2xdx}{1-x^2}=\frac{dy}{y+1}\Rightarrow \int\frac{2xdx}{1-x^2}=\int\frac{dy}{y+1}+k\Rightarrow -\ell n\left|x^2-1\right|=\ell n\left|y+1\right|+\ell ne^k\Rightarrow$$

$$\ell n\left|\left(x^2-1\right)\left(y+1\right)\right|e^k=0=\ell n1\Rightarrow\left(x^2-1\right)\left(y+1\right)=\pm\frac{1}{e^k}=c,\ c=\pm\frac{1}{e^k}.$$

Εδώ παρατηρούμε ότι οι τιμές $x=-1,\ x=+1,\ y=-1$ επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση, συνεπώς είναι ιδιάζουσες λύσεις, αφού είναι λύσεις που δεν παρέχονται από τη γενική λύση.

Παρατήρηση

Όπως είδαμε, ***ιδιάζουσες λύσεις*** μπορεί να παρέχονται και με βάση τους περιορισμούς που τίθενται προκειμένου να εισέλθουμε στη διαδικασία επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης. Αυτό δε θα πρέπει να το παραβλέπουμε.

4.2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ ΠΟΥ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΕΛΟΣ ΕΙΝΑΙ ΤΕΛΕΙΟ Ή ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ (ΠΛΗΡΕΙΣ Ή ΑΚΡΙΒΕΙΣ)

Έστω ότι οι παραστάσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ είναι ορισμένες και συνεχείς σε έναν απλά συνεκτικό τόπο D του επιπέδου, στον οποίο υπάρχουν και είναι συνεχείς οι $\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}$. Τότε μία διαφορική εξίσωση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ θα είναι πλήρης, αν η παράσταση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ είναι τέλειο διαφορικό συνάρτησης $K(x,y)$. Ως γνωστόν, η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ να είναι τέλειο διαφορικό συνάρτησης $K(x,y)$ είναι $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Οι συναρτήσεις $K(x,y)$ που έχουν τέλειο (ολικό) διαφορικό την $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ δίνονται από τον τύπο $K(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+c$, με $x_0,\ y_0$ αυθαίρετες σταθερές, που όμως $(x_0,\ y_0)\in D$.

Όταν λοιπόν η διαφορική εξίσωση $P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$ είναι πλήρης, η γενική λύση της θα παρέχεται από την $K(x,y)=0$. Για τις $K(x,y)$ ισχύει
$\dfrac{\partial K}{\partial x}=P,\ \dfrac{\partial K}{\partial y}=Q.$
Ακολουθεί ένας πίνακας με πλήρεις διαφορικές εξισώσεις και τις αντίστοιχες γενικές λύσεις τους, που αναγνωρίζονται εύκολα.

ΠΙΝΑΚΑΣ

Διαφορική εξίσωση	**Γενική λύση**
1. $ydx+xdy=0$	$xy=c$
2. $2xydx+x^2dy=0$	$x^2y=c$
3. $y^2dx+2xydy=0$	$xy^2=c$
4. $2xy^2dx+2x^2ydy=0$	$x^2y^2=c$
5. $3x^2y^3dx+3x^3y^2dy=0$	$x^3y^3=c$
6. $y\cos xdx+\sin xdy=0$	$y\sin x=c$
7. $\sin ydx+x\cos ydy=0$	$x\sin y=c$
8. $ye^{xy}dx+xe^{xy}dy=0$	$e^{xy}=c$
9. $xdx+ydy=0$	$x^2+y^2=c$
10. $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}=0$	$\ell nxy=c$
11. $\dfrac{ydx-xdy}{y^2}=0$	$x=cy$
12. $\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$	$y=cx$
13. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$	$\sqrt{x^2+y^2}=c$

Σχόλιο: Αν σε μία πλήρη διαφορική εξίσωση αναδιατάξουμε κατάλληλα τους όρους της, υπάρχει το ενδεχόμενο δημιουργίας ομάδων όρων που θα αποτελούνται από διαφορικά γνωστών συναρτήσεων, οπότε η γενική λύση προκύπτει πιο άμεσα.

Παράδειγμα

Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $\frac{xy+1}{y}dx = \frac{x-2y}{y^2}dy$.

Λύση

Εύκολα μπορούμε με τη γνωστή μέθοδο να διαπιστώσουμε ότι η διαφορική αυτή εξίσωση είναι πλήρης. Μπορούμε να τη γράψουμε και ως

$xdx + \frac{2dy}{y} + \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0,\ y \neq 0,$ ή $d\frac{x^2}{2} + d\ell ny^2 + d\frac{x}{y} = 0,\ y \neq 0$, από όπου έχουμε τη γενική λύση $\frac{x^2}{2} + \ell ny^2 + \frac{x}{y} = c,\ y \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $\left(2x^2+3y^2\right)y' = 3x^2 - 4xy$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $\left(-3x^2+4xy\right)dx + \left(2x^2+3y^2\right)dy = 0$. Είναι της μορφής $P(x,\, y)dx + Q(x,\, y)dy = 0$, με $P(x,\, y) = -3x^2 + 4xy,\ Q(x,\, y) = 2x^2 + 3y^2$. Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial P}{\partial y} = 4x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x$, άρα $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, που σημαίνει ότι είναι πλήρης, άρα η γενική της λύση είναι $\int_0^x\left(-3x^2+4xy\right)dx + \int_0^y\left(2\cdot 0^2+3y^2\right)dy + c = 0$ ή $-3\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2y}{2} + 3\frac{y^3}{3} + c = 0$ ή $-x^3 + 2x^2y + y^3 + c = 0$.

2. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\boldsymbol{(\sin y + y\sin x)dx - (\cos x - x\cos y)dy = 0.}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος είναι τέλειο διαφορικό, αφού έχουμε

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\sin y + y\sin x) = \cos y + \sin x$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(-\cos x + x\cos y) = \sin x + \cos y$, οπότε

παίρνουμε $\dfrac{\partial}{\partial y}(\sin y + y\sin x) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-\cos x + x\cos y)$. Επομένως η γενική λύση

της είναι $\displaystyle\int_0^x (\sin y + y\sin x)dx + \int_0^y (-\cos 0 + 0\cos y)dy + c = 0$ ή

$x\sin y + y[-\cos x]_0^x - y + c = 0$ ή $x\sin y - y\cos x + y - y + c = 0$ ή

$x\sin y - y\cos x + c = 0.$

3. Επιλύστε τη διαφορική εξίσωση $\boldsymbol{\dfrac{y}{x^2+y^2}dx = \dfrac{x}{x^2+y^2}dy.}$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση γράφεται $\dfrac{y}{x^2+y^2}dx - \dfrac{x}{x^2+y^2}dy = 0 \ (1)$.

Παρατηρούμε ότι $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,

$Q(x,y) = -\dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial y} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, οπότε ισχύει $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, άρα το πρώτο

μέλος της (1) είναι τέλειο (ολικό) διαφορικό της

$K(x,y) = \displaystyle\int_0^x \frac{y}{x^2+y^2}dx + \int_{y_0}^y \frac{0}{x^2+y^2}dy + c$, $y_0 \neq 0$, ή $K(x,y) = \displaystyle\int_0^x \frac{y}{x^2+y^2}dx + c$ ή

$$K(x,y) = \int_0^x \frac{y}{y^2}\frac{y}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}dx + c = \int_0^x \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}d\left(\frac{x}{y}\right) + c = \left[Arc\tan\frac{x}{y}\right]_0^x + c \text{ ή}$$