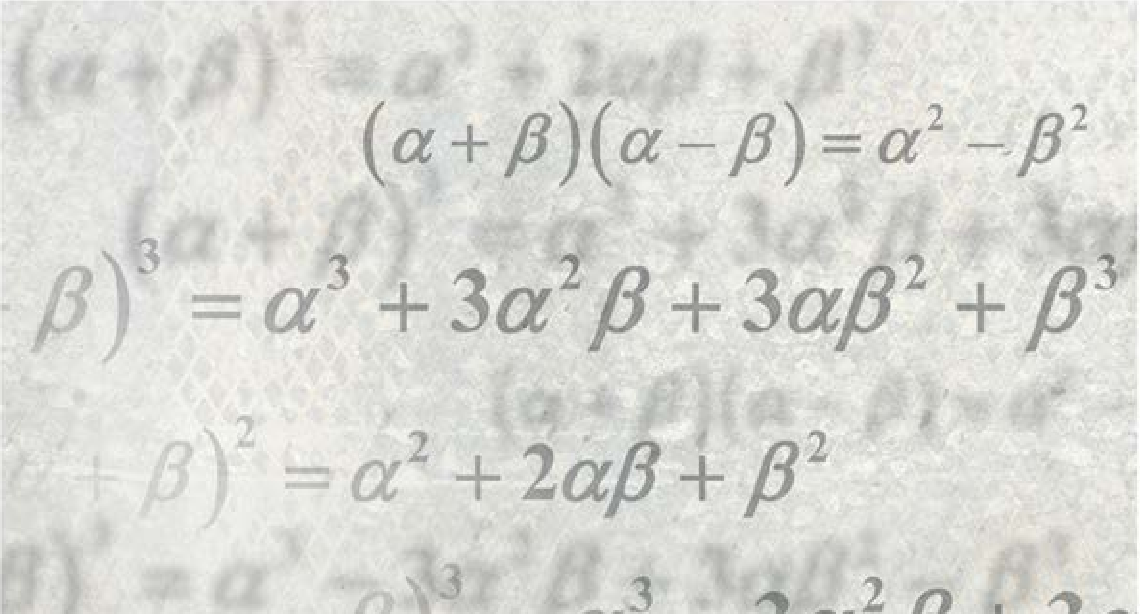
Περιλαμβάνει τις λύσεις στις ασκήσεις του σχολικού βιβλίου

Αθανάσιος Σδράλης

Μαθηματικά
Γ΄ Γυμνασίου
με απαιτητικές ασκήσεις



- Θεωρία & μεθοδολογία
- Ασκήσεις & ερωτήσεις
- Γραπτές δοκιμασίες
- Λύσεις & απαντήσεις

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr
ΒΙΒΛΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Θέση υπογραφής δικαιούχου δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας,
εφόσον η υπογραφή προβλέπεται από τη σύμβαση.

Αφιερώνεται στην κόρη μου Καλυψώ-Σοφία

Εκδόσεις Πατάκη – Βιβλία για την εκπαίδευση
Αθανάσιος Σδράλης, *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου με απαιτητικές ασκήσεις*
Υπεύθυνος έκδοσης: Νίκος Κύρος
Διορθώσεις: Μάγδα Τικοπούλου
Σελιδοποίηση: Αλέξιος Μάστορης
Φιλμ-Μοντάζ: Μαρία Ποινιού-Ρένεση

Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Φεβρουάριος 2018
ΚΕΤ Α982 ΚΕΠ 14/18
ISBN 978-960-16-7231-1

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665, ΦΑΞ: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ: ΚΟΡΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ - ΠΕΡΙΟΧΗ Β΄ ΚΤΕΟ),
570 09 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ, ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, ΦΑΞ: 2310.70.63.55
Web site: http://www.patakis.gr • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

Περιεχόμενα

Γράμμα προς τους μαθητές – καθηγητές – γονείς 5

Άλγεβρα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (Επαναλήψεις – Συμπληρώσεις) 7
1.2 Ακέραιο μονώνυμο 39
1.3 Πολυώνυμα 53
1.4 Αξιοσημείωτες ταυτότητες 64
1.5 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων 84
1.6 Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) – Μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων 108
1.7 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις 112

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ 131
2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού 139
2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού 149
2.4 Κλασματικές εξισώσεις 153
2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο 171

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης 189
3.2 Συστήματα γραμμικών εξισώσεων 192

Γεωμετρία – Τριγωνομετρία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Ισότητα τριγώνων 209
1.2 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων 237
1.3 Θεώρημα του Θαλή 245
1.4 Ομοιότητα 250
1.5 Λόγος εμβαδών όμοιων σχημάτων 267

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί 275
2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών 282
2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας 286
2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων. 294

Τεστ 302
Διαγωνίσματα 312
Λύσεις των ασκήσεων και απαντήσεις των ερωτήσεων του βιβλίου 325
Λύσεις στις ασκήσεις και απαντήσεις στα τεστ και διαγωνίσματα 398
Λύσεις των ασκήσεων και απαντήσεις των ερωτήσεων του σχολικού βιβλίου 414

Γράμμα προς τους μαθητές – καθηγητές – γονείς

Αγαπητές φίλες, αγαπητοί φίλοι,

Όταν ξεκίνησα να γράφω το βιβλίο αυτό, στη σκέψη μου είχα συνέχεια τις δυσκολίες που παρατηρούσα είκοσι και πλέον χρόνια να αντιμετωπίζουν οι δικοί μου μαθητές, κατά τη διάρκεια της προετοιμασίας τους για τις εισαγωγικές εξετάσεις στα Ανώτατα και Ανώτερα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα.

Με γνώμονα λοιπόν τις ανάγκες των μαθητών και με βοηθό την πολυετή πείρα μου, θέλησα να παρουσιάσω ένα βιβλίο σαν αυτά που θα ήθελα να έχω για να μελετώ ως μαθητής αλλά και ως καθηγητής. Ένα βιβλίο που να λειτουργεί συμπληρωματικά στα σχολικά βιβλία της τρέχουσας, της προηγούμενης αλλά και της επόμενης τάξης.

Σκοπός μου είναι να προκαλέσω καθέναν που θα ήθελε να ασχοληθεί με τα Μαθηματικά να αναζητήσει και να ανακαλύψει τη γοητεία και την ομορφιά που κρύβει μέσα της η διαδικασία αναζήτησης λύσεων, η συνδυαστική και κριτική σκέψη, αλλά και να νιώσει το μοναδικό αυτό συναίσθημα της ικανοποίησης κάθε φορά που φτάνει στη λύση του προβλήματος.

Φιλοδοξώ τέλος να ωθήσω τους μαθητές να αγωνίζονται για το ιδανικό της αριστείας και να την έχουν ως οδηγό στα επόμενα βήματά τους. Το μυστικό της επιτυχίας στα Μαθηματικά είναι η μελέτη και η προσπάθεια κατανόησης του τρόπου επίλυσης των ασκήσεων ή προβλημάτων και όχι απλώς η απομνημόνευση των λύσεών τους.

Στο βιβλίο αυτό περιέχονται:

α) **Στοιχεία θεωρίας, μεθοδολογία**, αλλά και διάφοροι τρόποι σκέψης και λύσης με υποδειγματικά **λυμένες ασκήσεις**, χαρακτηριστικά **παραδείγματα** και **εφαρμογές**.

β) **Ασκήσεις-προβλήματα προς λύση** και **ερωτήσεις**, που ελπίζω να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις των μελετητών κάθε επιπέδου, αλλά και **ασκήσεις τύπου εξετάσεων** για πανεπιστήμια του εξωτερικού, γιατί σίγουρα αρκετοί από εσάς θα κληθούν σύντομα να αντιμετωπίσουν τέτοια θέματα και θεωρώ ότι πρέπει από τώρα να εξοικειωθούν με αυτά.

γ) Ενδεικτικές προτάσεις για **γραπτές δοκιμασίες** διαφόρων τύπων.

δ) **Λύσεις** ή **υποδείξεις λύσεων** των ασκήσεων και των ερωτήσεων του βιβλίου αυτού, καθώς και του σχολικού.

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους μαθητές, στους συναδέλφους και γιατί όχι, και στους γονείς.

Ο συγγραφέας
Αθανάσιος Σδράλης

Ευχαριστώ την κόρη μου Καλυψώ-Σοφία για την κατανόηση αλλά και τη συμπαράστασή της καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής.

Σημ. Θέλω να επισημάνω, όπως άλλωστε θα παρατηρήσετε, ότι γίνεται χρήση του συμβόλου «$\Leftrightarrow$» κυρίως στις εξισώσεις, στα συστήματα κ.α. προκειμένου να δηλώσουμε ότι οι σχέσεις είναι ισοδύναμες, αντί του «ή» ή άλλων εκφράσεων ή ακόμη και αντί της έλλειψης συνδετικού κρίκου μεταξύ προτάσεων.

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς
(Επαναλήψεις — Συμπληρώσεις)

Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

Έχουμε μάθει ότι:

▶ **Φυσικοί αριθμοί** είναι οι $0, 1, 2, 3, \ldots$

▶ **Ακέραιοι αριθμοί** είναι οι $\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί περιέχουν τους φυσικούς αριθμούς και τους αντίθετους των φυσικών αριθμών.

Τους ακέραιους αριθμούς τούς διακρίνουμε σε **άρτιους** και σε **περιττούς**.

- **Άρτιοι** ακέραιοι είναι τα πολλαπλάσια του 2. Ένας άρτιος ακέραιος αριθμός x συμβολίζεται με $x = 2\kappa$, όπου κ ακέραιος αριθμός. Π.χ. $8 = 2 \cdot 4, -56 = 2 \cdot (-28)$.
  Άρτιοι ακέραιοι είναι οι αριθμοί $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$
- **Περιττοί** ακέραιοι είναι οι αριθμοί που δεν είναι πολλαπλάσια του 2.
  Ένας περιττός ακέραιος αριθμός x συμβολίζεται με $x = 2\kappa + 1$ ή $x = 2\kappa - 1$, όπου κ ακέραιος.
  Π.χ. $21 = 2 \cdot 10 + 1$ ή $21 = 2 \cdot 11 - 1, -33 = 2 \cdot (-17) + 1$ ή $-33 = 2 \cdot (-16) - 1$.
  Περιττοί ακέραιοι είναι οι αριθμοί $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

▶ **Ρητοί αριθμοί**

Ένας αριθμός λέγεται ρητός, αν είναι ή μπορεί να γραφτεί ως πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών. Δηλαδή ένας ρητός αριθμός x γράφεται στη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β είναι ακέραιοι με $\beta \neq 0$.

Για παράδειγμα οι αριθμοί $\frac{5}{7}, -3 = \frac{-3}{1}, 0$ είναι ρητοί αριθμοί.

Οι ακέραιοι αριθμοί (άρα και οι φυσικοί) περιέχονται στους ρητούς αριθμούς.

Κάθε δεκαδικός ή περιοδικός αριθμός είναι ρητός αριθμός, αφού μπορεί να γραφτεί ως πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών. Π.χ. $3{,}5 = \frac{7}{2}$, $0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$, $0{,}\overline{45} = \frac{45}{99}$, $12{,}\overline{45} = \frac{1233}{99}$.

- Ο αριθμός $0{,}\overline{7}$ μετατρέπεται σε ρητό ως εξής:
  Θέτουμε $x = 0{,}\overline{7}$, δηλαδή $x = 0{,}7777\ldots (1)$.
  Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί 10, οπότε έχουμε $10x = 7{,}777\ldots (2)$.
  Αφαιρούμε από τη σχέση (2) την (1) και έχουμε $10x - x = 7{,}777\ldots - 0{,}777\ldots$
  δηλαδή $9x = 7$ ή $x = \frac{7}{9}$. Συνεπώς $0{,}\overline{7} = \frac{7}{9}$.

- Ο αριθμός $0,\overline{45}$ μετατρέπεται σε ρητό ως εξής:
  Θέτουμε $x=0,\overline{45}$, δηλαδή $x=0,454545...(1)$.
  Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί 100, οπότε έχουμε $100x=45,454545...\ (2)$.
  Αφαιρούμε από τη σχέση (2) την (1) και έχουμε:
  $100x-x=45,454545...-0,454545...$ ή $99x=45$ ή $x=\frac{45}{99}$. Άρα $0,\overline{45}=\frac{45}{99}$.
- Ο αριθμός $12,\overline{45}$ μετατρέπεται σε ρητό ως εξής:
  Ο αριθμός $12,\overline{45}$ γράφεται $12,\overline{45}=12+0,\overline{45}$. Στη συνέχεια μετατρέπουμε τον $0,\overline{45}$ σε ρητό. Είδαμε παραπάνω ότι $0,\overline{45}=\frac{45}{99}$,
  οπότε $12,\overline{45}=12+0,\overline{45}=12+\frac{45}{99}=\frac{1233}{99}$.

▶ Άρρητοι αριθμοί

Ένας αριθμός λέγεται άρρητος όταν δεν είναι ρητός, δηλαδή όταν δεν μπορεί να γραφτεί ως πηλίκο δύο ακέραιων αριθμών. Π.χ. $\sqrt{3}, -\sqrt{7}, 2+\sqrt{3}, \pi$.

Οι δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά είναι άρρητοι αριθμοί.

▶ Πραγματικοί αριθμοί

Όλοι οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί αποτελούν τους πραγματικούς αριθμούς. Τους πραγματικούς αριθμούς τούς απεικονίζουμε στα σημεία μιας ευθείας. Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα και μόνο ένα σημείο, αλλά και κάθε σημείο αντιστοιχεί σε έναν και μόνο έναν πραγματικό αριθμό. Η ευθεία ονομάζεται **ευθεία των πραγματικών αριθμών** ή **άξονας των πραγματικών αριθμών**.

Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Υπενθυμίζουμε ότι:

- ▶ Ένας πραγματικός αριθμός είναι **θετικός** όταν έχει πρόσημο $(+)$.
- ▶ Ένας πραγματικός αριθμός είναι **μη αρνητικός** όταν είναι θετικός ή μηδέν.
- ▶ Ένας πραγματικός αριθμός είναι **αρνητικός** όταν έχει πρόσημο $(-)$.
- ▶ **Ομόσημοι** αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.
- ▶ **Ετερόσημοι** αριθμοί λέγονται **δύο** αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.
- ▶ **Η απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\alpha|$ και είναι ίση με την απόσταση του σημείου που παριστάνει πάνω στον άξονα τον αριθμό α από την αρχή του άξονα. Π.χ. $|7|=7$, $|-5|=5$, $|0|=0$.
  - Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν.
  - Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές. Δηλαδή $|\alpha|=|-\alpha|$.

Πρόσθεση

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά τους βάζουμε πρόσημο το πρόσημό τους.

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Ιδιότητες

Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\alpha=\alpha$,
	$\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$

Για να υπολογίσουμε ένα άθροισμα με περισσότερους από δύο προσθετέους, υπάρχουν διάφοροι τρόποι.

1ος τρόπος: Προσθέτουμε τους δύο πρώτους αριθμούς, στο άθροισμά τους προσθέτουμε τον τρίτο, στο νέο αυτό άθροισμα προσθέτουμε τον τέταρτο κτλ., μέχρι να προσθέσουμε και τον τελευταίο προσθετέο.

Π.χ. $\mathrm{A}=(\mathbf{-5})+(\mathbf{-2})+(\mathbf{+12})+(\mathbf{-6})+(\mathbf{-12})+(\mathbf{+9})=(-7)+(+12)+(-6)+(-12)+(+9)=$

$=(+5)+(-6)+(-12)+(+9)=(-1)+(-12)+(+9)=(-13)+(+9)=-4.$

2ος τρόπος: Εξετάζουμε αν υπάρχουν αντίθετοι αριθμοί, τους οποίους διαγράφουμε, αφού δίνουν άθροισμα μηδέν, π.χ. το $(+12)$ με το (-12). Στη συνέχεια χωρίζουμε τους θετικούς αριθμούς από τους αρνητικούς και τους προσθέτουμε ξεχωριστά.

Π.χ. $\mathrm{A}=(-5)+(-2)+(+12)+(-6)+(-12)+(+9)=(-5)+(-2)+(-6)+(+9)=$

$=(-13)+(+9)=-4.$

Παρατηρήσεις

1. Δύο αριθμοί είναι **αντίθετοι** όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν. Ο καθένας από τους αριθμούς αυτούς είναι ο αντίθετος του άλλου.
   Ο αντίθετος του α είναι ο $-\alpha$ και ο αντίθετος του $-\alpha$ είναι ο $-(-\alpha)=\alpha$.
   Προσοχή! Ο $-\alpha$ δηλώνει τον αντίθετο του α και όχι κατ' ανάγκη αρνητικό αριθμό.
2. Μπορούμε να διαγράφουμε τους αντίθετους προσθετέους, αν υπάρχουν, αφού το άθροισμά τους είναι μηδέν.
3. Οι προσθετέοι λέγονται και **όροι του αθροίσματος**.

Αφαίρεση

Η πράξη της αφαίρεσης γίνεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης ως εξής: $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

Δηλαδή, για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στον μειωτέο (α) τον αντίθετο του αφαιρετέου (β). Π.χ. $12-17=12+(-17)=-5$.

Πολλαπλασιασμός

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενό τους βάζουμε πρόσημο $(+)$.

Π.χ. $(+7)(+8)=+56$, $\quad(-6)(-9)=+54$.

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενό τους βάζουμε πρόσημο $(-)$.

Π.χ. $(-7)(+8)=-56$, $\quad(+6)(-9)=-54$.

- Το πρόσημο του γινομένου δύο αριθμών προκύπτει από τον πίνακα:

Κανόνας των προσήμων

$(+)(+)=+,\quad(+)(-)=-$

$(-)(+)=-,\quad(-)(-)=+$

Το πρόσημο ενός γινομένου με πολλούς μη μηδενικούς παράγοντες επηρεάζεται μόνο από τους αρνητικούς αριθμούς. Συγκεκριμένα, αν το πλήθος των αρνητικών αριθμών είναι **άρτιο**, τότε το γινόμενο θα έχει **θετικό** πρόσημο, ενώ, αν το πλήθος των αρνητικών αριθμών είναι **περιττό**, τότε το γινόμενο θα έχει **αρνητικό** πρόσημο.

Π.χ. Το γινόμενο $(-3)\left(+\frac{3}{2}\right)(+5)(-7)\left(-\frac{1}{2}\right)$ έχει αρνητικό πρόσημο, αφού περιέχει τρεις αρνητικούς παράγοντες (αριθμούς), ενώ το γινόμενο

$(+3)\left(-\frac{1}{2}\right)(-8)(-7)\left(+\frac{2}{7}\right)(-21)|-9|$ έχει θετικό πρόσημο, αφού περιέχει τέσσερις αρνητικούς παράγοντες. (Ο $|-9|$ είναι θετικός αριθμός.)

Ιδιότητες

Αντιμεταθετική	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha,\quad \alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha=1$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

Παρατηρήσεις

1. Αν κάποιος παράγοντας ενός γινομένου είναι το μηδέν, τότε το γινόμενο ισούται με μηδέν.
   Δηλαδή ισχύει ότι $\alpha \cdot 0 = 0$.
2. Αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ **ή** $\beta = 0$.
3. Αν $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ **και** $\beta \neq 0$.
4. Θα λέμε ότι δύο αριθμοί είναι **αντίστροφοι** αν το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα. Ο καθένας από τους δύο αυτούς αριθμούς είναι ο αντίστροφος του άλλου.
5. Ο αριθμός 0 δεν έχει αντίστροφο. Κάθε μη μηδενικός αριθμός α έχει έναν μοναδικό αντίστροφο, ο οποίος συμβολίζεται με $\dfrac{1}{\alpha}$.

Διαίρεση

Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών $\alpha : \beta$ ή $\dfrac{\alpha}{\beta}$, πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο α με τον αντίστροφο του διαιρέτη β, δηλαδή $\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \dfrac{1}{\beta}$.

- Για το πρόσημο του πηλίκου $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ισχύουν οι ίδιοι κανόνες προσήμων όπως και στον πολλαπλασιασμό, αφού $\dfrac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \dfrac{1}{\beta}$.
- Το αρνητικό πρόσημο έχει την ίδια σημασία, είτε βρίσκεται στον αριθμητή ενός κλάσματος είτε στον παρονομαστή του είτε μπροστά από το κλάσμα.
  Δηλαδή $\dfrac{-\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{-\beta} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Προτεραιότητα πράξεων

- Ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση έχουν προτεραιότητα στις πράξεις σε σχέση με την πρόσθεση και την αφαίρεση.
- Αν υπάρχουν παρενθέσεις, ή κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις ή βγάζουμε τις παρενθέσεις, αν αυτές αποτελούν όρους της παράστασης.

► Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = -(3-5) - \left[1 - 8 + (-3+11) - (-9-2+3)\right] - (-6+14)$

β) $B = (2-9)\left(1 - \dfrac{1}{7}\right)(21-22)$ **γ)** $\Gamma = \left(-\dfrac{5}{6}\right) : \left(-\dfrac{2}{3}\right) - \left(-\dfrac{4}{9}\right) : \left(+\dfrac{3}{5}\right) - \left(-\dfrac{1}{2}\right)(+2)$

δ) $\Delta=-\left(\frac{3}{4}-2\right)-(-5)(-1)\cdot\frac{3}{12}-5-(-3-2)$ **ε)** $E=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$

στ) $Z=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{7}:\frac{6}{7}-(-4):\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)$ **ζ)** $H=2-\left(\frac{11}{4}-2\right)+5:\left(-\frac{4}{3}\right)$

Λύση

α) $A=-(3-5)-[1-8+(-3+11)-(-9-2+3)]-(-6+14)=$

$=-(-2)-[1-8+8-(-11+3)]-(+8)=$

$=2-[1-(-11+3)]-8=2-[1-(-8)]-8=2-(1+8)-8=2-9-8=-15.$

β) $B=(2-9)\left(1-\frac{1}{7}\right)(21-22)=(-7)\cdot\frac{6}{7}\cdot(-1)=(-6)(-1)=6.$

γ) $\Gamma=\left(-\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{4}{9}\right):\left(+\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)(+2)=\left(-\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{4}{9}\right)\left(+\frac{5}{3}\right)+1=$

$=\frac{5}{4}+\frac{20}{27}+1=\frac{135}{108}+\frac{80}{108}+\frac{108}{108}=\frac{323}{108}=2\frac{107}{108}.$

δ) $\Delta=-\left(\frac{3}{4}-2\right)-(-5)(-1)\cdot\frac{3}{12}-5-(-3-2)=-\left(\frac{3}{4}-\frac{8}{4}\right)-\frac{5}{4}-5-(-5)=$

$=-\left(-\frac{5}{4}\right)-\frac{5}{4}-5+5=\frac{5}{4}-\frac{5}{4}=0.$

ε) $E=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{8}{12}+\frac{9}{12}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9}{12}-\frac{2}{12}\right)+\frac{17}{12}=$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{12}+\frac{17}{12}=\frac{14}{36}+\frac{17}{12}=\frac{14}{36}+\frac{51}{36}=\frac{65}{36}=1\frac{29}{36}.$

στ) $Z=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{7}:\frac{6}{7}-(-4):\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}+\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{6}+4:(-1)=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}-4=$

$=1-4=-3.$

ζ) $H=2-\left(\frac{11}{4}-2\right)+5:\left(-\frac{4}{3}\right)=2-\left(\frac{11}{4}-\frac{8}{4}\right)+5\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=2-\frac{3}{4}-\frac{15}{4}=2-\frac{18}{4}=$

$=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}.$

2. Αν $A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1998}+\frac{1}{1999}$ και $B=1+\frac{2}{4}+\frac{4}{6}+\frac{6}{8}+\ldots+\frac{3994}{3996}+\frac{3996}{3998}$,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\frac{A\ +\ B}{2}$.

(Ε.Μ.Ε. ΘΑΛΗΣ Β΄ Γυμνασίου, 1999)

Λύση

Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\quad \frac{1}{3}+\frac{4}{6}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1,$

$\frac{1}{4}+\frac{6}{8}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1,\ldots,\ \frac{1}{1998}+\frac{3994}{3996}=\frac{1}{1998}+\frac{1997}{1998}=1,$ οπότε έχουμε

$$A+B=(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{6}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1998}+\frac{3994}{3996}\right)+\left(\frac{1}{1999}+\frac{3996}{3998}\right)=$$

$$=2+\left(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{1998\,\acute{o}\rho o\iota}\right)=2+1998=2000.\ \text{Οπότε } K=\frac{2000}{3}=1000.$$

Οι παραστάσεις A,B *αποτελούνται από* 1999 *όρους, έτσι στο άθροισμα* $A+B$ *η παράσταση* $(1+1+1+\ldots+1)$ *είναι άθροισμα* 1998 *μονάδων, δεδομένου ότι οι μονάδες των* A,B *«έδωσαν» το* 2.

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot2-1\right)$$

(Ε.Μ.Ε. ΘΑΛΗΣ Β΄ Γυμνασίου, 2011)

Λύση

$$A=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot2-1\right)=$$

$$=\left(\frac{2\cdot\mathbf{2}}{7\cdot\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{14}}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{14}{3}-1\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{14}+\frac{14}{14}-\frac{1}{14}\right)\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{3\cdot\mathbf{3}}{2\cdot\mathbf{3}}+\frac{14\cdot\mathbf{2}}{3\cdot\mathbf{2}}-\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{6}}\right)=$$

$$=\frac{17}{14}\cdot\frac{2}{17}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\left(\frac{9}{6}+\frac{28}{6}-\frac{6}{6}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\frac{31}{6}-\frac{31}{6}=0.$$

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{17}\right)$$

Λύση

Είναι $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$, $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, ... , $1+\frac{1}{17}=\frac{18}{17}$.

Οπότε $\Pi=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{17}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{18}{17}$.

Στο γινόμενο αυτό παρατηρούμε ότι ο αριθμητής κάθε κλάσματος (με εξαίρεση το τελευταίο) ισούται με τον παρονομαστή του επόμενού του κλάσματος, συνεπώς απλοποιούνται μεταξύ τους και έχουμε $\Pi=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{18}{17}=\frac{18}{2}=9$.

► Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ο αριθμός $\frac{2}{3}$ είναι ακέραιος.

β) Ο αριθμός $-\frac{6}{3}$ είναι ακέραιος.

γ) Ο αριθμός $\sqrt{\frac{75}{3}}$ είναι ακέραιος.

δ) Ο αριθμός $\sqrt{7}$ είναι άρρητος.

ε) Ο αριθμός $\sqrt{\frac{64}{9}}$ δεν είναι ρητός.

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε ρητός αριθμός είναι πραγματικός αριθμός.
β) Οι φυσικοί αριθμοί δεν είναι ρητοί αριθμοί.
γ) Υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί που δεν είναι φυσικοί αριθμοί.
δ) Κάθε περιοδικός αριθμός είναι ρητός αριθμός.
ε) Κάθε δεκαδικός αριθμός είναι ρητός αριθμός.
στ) Το πηλίκο δύο άρτιων αριθμών είναι πάντα άρτιος αριθμός.
ζ) Το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών είναι άρτιος αριθμός.
η) Το γινόμενο δύο άρτιων αριθμών είναι πάντα άρτιος αριθμός.

θ) Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός.
ι) Το γινόμενο δύο περιττών αριθμών είναι πάντα περιττός αριθμός.
ια) Το πηλίκο δύο άρτιων αριθμών είναι πάντα ακέραιος αριθμός.
ιβ) Το πηλίκο δύο περιττών αριθμών είναι πάντα ακέραιος αριθμός.
ιγ) Το πηλίκο δύο άρτιων αριθμών είναι πάντα ρητός αριθμός.

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α) Οι αντίθετοι αριθμοί είναι ετερόσημοι.
β) Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν άθροισμα μηδέν.
γ) Δύο αριθμοί με άθροισμα θετικό είναι πάντοτε θετικοί.
δ) Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε δεν είναι ποτέ ίσοι.
ε) Υπάρχουν αντίθετοι αριθμοί που οι αντίστροφοί τους έχουν ίσες απόλυτες τιμές.
στ) Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι.
ζ) Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός.
η) Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν γινόμενο μηδέν.
θ) Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε έχουν ίσες απόλυτες τιμές.
ι) Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε έχουν ίσες απόλυτες τιμές.
ια) Ο αντίθετος του α, δηλαδή ο $-\alpha$, είναι αρνητικός αριθμός.
ιβ) Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η $|\alpha|$ είναι το μηδέν.
ιγ) Αν $|x|+|y|=0$, τότε $x=y=0$.
ιδ) Αν $|x+y|=0$, τότε $x=-y$.
ιε) Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ετερόσημοι.

4. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

α) Αν x και y είναι θετικοί αριθμοί με $x+y=7$, τότε η παράσταση $\dfrac{7-y}{x}$ είναι ίση με:

Α. 1 **Β.** 0 **Γ.** -1 **Δ.** y **Ε.** $x-1$

β) Αν ισχύουν $xy>0$, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5$ και $\dfrac{1}{xy}=6$, τότε η τιμή της παράστασης $\dfrac{x+y}{5}$ είναι:

Α. $\dfrac{1}{25}$ **Β.** $\dfrac{1}{6}$ **Γ.** $\dfrac{1}{5}$ **Δ.** 5 **Ε.** 6

▶ Ασκήσεις – Προβλήματα προς λύση

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=(-21+31-12):\left(-\frac{1}{2}\right)+(-36+24+3)\left(-\frac{1}{9}\right)$

β) $B=-[-(-3)]\cdot 5+3\cdot[-(-1)]$

γ) $\Gamma=(-3)\cdot\{4-[2\cdot(3-5)+14]\}$

δ) $\Delta=\left|-\frac{1}{3}\right|\cdot|-12|+\frac{|-3+11|\cdot|-5|}{-|-10|}$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=\frac{1}{5}+\frac{2}{10}+\frac{3}{15}+\frac{4}{20}+\frac{5}{25}$

β) $B=-\left(-\frac{2}{5}+\frac{7}{2}-\frac{3}{10}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{2}-\frac{-7}{10}\right)-\left(-1+\frac{2}{5}\right)$

γ) $\Gamma=\frac{5}{12}-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)$

δ) $\Delta=-\left(\frac{17}{15}-1\right)-\left(-\frac{3}{5}+1-\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{11}{15}\right)$

ε) $E=-\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)+1$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=-\frac{2}{3}-\left\{\left(3-\frac{1}{2}\right)-\left[1-\left(4-\frac{5}{6}\right)\right]+2\frac{1}{3}\right\}-\left(1+\frac{5}{6}\right)$

β) $B=-\frac{1}{2}-\left\{1\frac{5}{6}-\left[3-\left(\frac{1}{12}-2\right)\right]+\left(\frac{3}{4}+3\right)\right\}-\left(-\frac{3}{4}+1\right)$

γ) $\Gamma=1\frac{2}{3}-\left\{-\frac{5}{6}-\left[2-\left(-3+\frac{5}{12}\right)\right]+\left(-\frac{2}{3}+2\right)\right\}-\left(1\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)$

δ) $\Delta=-2\frac{1}{2}-\left\{\left(-3+\frac{1}{5}\right)-\left[2-\left(\frac{3}{4}-1\right)\right]+\frac{7}{10}\right\}-\left(\frac{1}{2}+2\frac{3}{5}\right)$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)+\left(\frac{1}{-4}\right):\left(-\frac{-5}{3}\right)$ **β)** $B=\left[\frac{3-7\cdot(-3)}{8-4}\right]\cdot\left[\frac{8+(-3)}{-1-4}\right]$

γ) $\Gamma=\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{-4}\right):\left(-\frac{-3}{-8}+\frac{3}{-4}\right)$ **δ)** $\Delta=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{2}{6}\right)$

ε) $E=\left[\left(\frac{3}{5}:\frac{9}{25}\right)-\left(2\frac{2}{3}:\frac{4}{5}\right)\right]:\left(-1\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{9}$

στ) $K=\left[\left(1\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}\right)\left(1\frac{3}{4}-\frac{3}{2}\right)\right]:\left(1\frac{1}{5}+2\frac{3}{5}\right)$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $X=-\frac{3}{4}-2\cdot\left[1\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{3}{10}+\frac{-1}{5}\right)-4\right]:(0,20)-\frac{3}{-8}$

β) $Y=\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right):\frac{3}{5}-(-6):\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)$

γ) $Z=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{3}-(-4):\frac{3}{5}+\frac{7}{18}$

6. **α)** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$K=\frac{8}{3}+5\cdot\frac{2}{3}-\frac{5}{2}:\frac{5}{3}-\frac{23}{6}$, $\Lambda=3-3\cdot\left(\frac{5}{4}-1+\frac{1}{2}\right)$

β) Αν $K=\frac{2}{3}$ και $\Lambda=\frac{3}{4}$, να συγκρίνετε τα κλάσματα Κ και Λ και να βρείτε ένα κλάσμα ανάμεσά τους.

7. Αν $A=-\left[-\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{8}\right)\right]$, $B=-9-3\cdot\left[(-3)\cdot\frac{21}{18}\right]$ και

$\Gamma=\left(-\frac{9}{5}\right)(-10)+\left(-\frac{9}{10}\right)\cdot 20-\left(\frac{18}{-5}\right):\left(-\frac{-2}{5}\right)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Gamma-4A+\frac{B}{3}$.

8. Αν $(2x)y = 8$, να υπολογίσετε την τιμή του xy.

9. Αν x, y είναι δύο αντίστροφοι αριθμοί $(x \neq 0, y \neq 0)$, τι σχέση έχουν οι αριθμοί $\frac{1}{x}$ και $-\frac{1}{y}$;

10. **α)** Αν $x + y = 0$, με $xy \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή του $\frac{x}{y}$.

β) Αν $x - y = 0$, με $xy \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή του $\frac{y}{x}$.

11. Αν $\alpha + \beta = -2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{M} = 16 - (\alpha + \beta - 5) + \beta - 13 + (\alpha - 2 + 5) - (-\alpha - \beta - 11).$$

Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Η δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α και συμβολίζεται με α^ν.

Δηλαδή $\alpha^\nu = \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$.

Επιπλέον ορίζουμε ότι

- $\alpha^1 = \alpha$ για $\nu = 1$
- $\alpha^0 = 1$ για κάθε αριθμό $\alpha \neq 0$
- $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, με $\alpha \neq 0$

Παρατηρήσεις

1. Ισχύει ότι, αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο, αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2 = 3^2$, αλλά $-3 \neq 3$.

2. Προσέχουμε στις περιπτώσεις όπου η βάση της δύναμης είναι ο αριθμός $-\alpha$, $\alpha \neq 0$, και εκθέτης ένας ακέραιος αριθμός ν. Συγκεκριμένα έχουμε:

α) $(-\alpha)^2 = \alpha^2$, π.χ. $(-5)^2 = (-5)(-5) = 5 \cdot 5 = 5^2 = 25$.

β) $(-\alpha)^{2\kappa} = \left[(-\alpha)^2\right]^\kappa = (\alpha^2)^\kappa = \alpha^{2\kappa}$.

Δηλαδή όταν ο εκθέτης είναι άρτιος, οι αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες δυνάμεις, π.χ. $(-3)^6 = 3^6$.

Έτσι, για τους αντίθετους αριθμούς $\alpha,\ -\alpha,\ \alpha+\beta,\ -\alpha-\beta$ και $\alpha-\beta,\ \beta-\alpha$ έχουμε $(-\alpha)^2=\alpha^2,\ (-\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$ και $(\alpha-\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$.

γ) $(-\alpha)^{2\kappa+1}=(-\alpha)^{2\kappa}(-\alpha)=\alpha^{2\kappa}(-\alpha)=-\alpha^{2\kappa+1}$.

Δηλαδή όταν ο εκθέτης είναι περιττός, οι αντίθετοι αριθμοί έχουν αντίθετες δυνάμεις, π.χ. $(-3)^5=-3^5$.

3. Προσέχουμε ότι στην παράσταση $-\alpha^\nu$ το πρόσημο $(-)$ παραμένει, όποιος και αν είναι ο εκθέτης, διότι δεν «υψώνεται» στη ν.

Π.χ. $-3^2=-3\cdot3=-9$, ενώ $(-3)^2=(-3)(-3)=9$.

Στον παρακάτω πίνακα αναφέρονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

Ιδιότητες	**Παραδείγματα**
$\alpha^\mu\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}$	$5^2\cdot5^3=5^{2+3}=5^5$
$\alpha^\mu:\alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}$ ή $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$	$12^9:12^7=12^{9-7}=12^2$
$(\alpha\beta)^\nu=\alpha^\nu\beta^\nu$	$(3x)^2=3^2x^2=9x^2$
$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{3^2}{5^2}=\dfrac{9}{25},\ \dfrac{12^3}{6^3}=\left(\dfrac{12}{6}\right)^3=2^3=8$
$(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu\nu}$	$(3^3)^2=3^6,\ (2^{-3})^{-2}=2^6$
$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$	$\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-\nu}=\left(\dfrac{7}{5}\right)^\nu$

Παραδείγματα

1. $(-2017)^0=1,\quad (-2)^3=-8,\ \ -2^2=-4,\quad (-2)^2=4,\quad 3+2^3=3+8=11,$

$(3+2)^3=5^3=125,\quad 3\cdot4^2=3\cdot16=48,\quad (3\cdot4)^2=12^2=144,$

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{3^2}{4^2}=\dfrac{9}{16},\quad -2^4\cdot(-2)^6=-2^4\cdot2^6=-2^{10},\quad -2^3=-8.$

2. $\left(2^3\right)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$, $\quad (-4)^{-3} = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^3 = -\dfrac{1}{4^3}$, $\quad -2^{-2} = -\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$,

$\left[(-3)^5\right]^4 = (-3)^{20} = 3^{20}$, $\quad \dfrac{14^{-4}}{7^{-4}} = \left(\dfrac{14}{7}\right)^{-4} = 2^{-4} = \dfrac{1}{2^4}$,

$\dfrac{(-3)^{16}}{-3^{14}} = \dfrac{3^{16}}{-3^{14}} = -3^2$, $\quad \dfrac{(-3)^{15}}{-3^{12}} = \dfrac{-3^{15}}{-3^{12}} = 3^3$.

3. $\left[\left(3^4\right)^3\right]^2 = 3^{4\cdot 3\cdot 2} = 3^{24}$, $\quad \left(2^2\cdot 2^{-5}\right)^2 = \left(2^{2-5}\right)^2 = \left(2^{-3}\right)^2 = 2^{-6}$,

$\left(3^{12}\cdot 3^5\cdot 3\right):3^{14} = 3^{18}:3^{14} = 3^4$, $\quad 3\cdot 3^5 + 3^8 : 3^2 + \left(3^2\right)^3 = 3^6 + 3^6 + 3^6 = 3\cdot 3^6 = 3^7$,

$\dfrac{9^5}{(-3)^5} = \left(\dfrac{9}{-3}\right)^5 = (-3)^5 = -3^5$.

▶ Εφαρμογές

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη, και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας:

α) Αν ο α είναι ακέραιος μη μηδενικός αριθμός και ο ν είναι φυσικός αριθμός, τότε ο $(2\alpha)^\nu$ είναι άρτιος.

β) Αν $\alpha > 1$, τότε για κάθε ακέραιο αριθμό $\kappa \neq 0$ ισχύει $\alpha^\kappa > 1$.

Λύση

α) Η πρόταση είναι λάθος, διότι για $\nu = 0$ έχουμε $(2\alpha)^0 = 1$, που δεν είναι άρτιος. Αν είχαμε ως δεδομένο ότι ο ν είναι φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός, τότε θα είχαμε $(2\alpha)^\nu = 2^\nu \alpha^\nu$, που είναι πολλαπλάσιο του 2 και άρα άρτιος.

β) Η πρόταση είναι λάθος, διότι για $\kappa < 0$, δηλαδή $\kappa = -\nu$, με ν φυσικό αριθμό διάφορο του μηδενός, έχουμε $\alpha^\kappa = \alpha^{-\nu} = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^\nu = \dfrac{1}{\alpha^\nu} < 1$, αφού $\alpha^\nu > 1$. Π.χ. $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9} < 1$.

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\mathrm{A} = (-2)^0 + (-2)^{-1} + (-2)^{-2} + (-2)^{-3} + (-2)^{-4}$

β) $\mathrm{B} = 2\cdot(-2)^2 - \left(3\dfrac{2}{15} : \dfrac{27}{15}\right)^0 - \dfrac{3}{4} : 3^2 \cdot \dfrac{1}{-2^2} + (1-3)^2(-1+3)^2 \cdot \dfrac{1}{(-4)^2}$

γ) $\Gamma=\left[(-3)^2\right]^3:(-3)^6+2^3\cdot\dfrac{5}{(-4)^4}-\dfrac{1}{2}+1-\left(-\dfrac{3}{4}+1\dfrac{3}{4}\right)^{27}$

δ) $\Delta=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\dfrac{-2^2:(-2)^{-2}}{-2^3}-(-1)^4\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right]\left(2^0+1\right)^{-1}$

Λύση

α) $A=(-2)^0+(-2)^{-1}+(-2)^{-2}+(-2)^{-3}+(-2)^{-4}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{21}{16}-\dfrac{10}{16}=\dfrac{11}{16}$.

β) $B=2(-2)^2-\left(3\dfrac{2}{15}:\dfrac{27}{15}\right)^0-\dfrac{3}{4}:3^2\cdot\dfrac{1}{-2^2}+(1-3)^2(-1+3)^2\cdot\dfrac{1}{(-4)^2}=$

$=2\cdot4-1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{-4}+(-2)^2\cdot2^2\cdot\dfrac{1}{16}=8-1+\dfrac{1}{48}+1=8\dfrac{1}{48}$.

γ) $\Gamma=\left[(-3)^2\right]^3:(-3)^6+2^3\cdot\dfrac{5}{(-4)^4}-\dfrac{1}{2}+1-\left(-\dfrac{3}{4}+1\dfrac{3}{4}\right)^{27}=$

$=(-3)^6:(-3)^6+\dfrac{5\cdot2^3}{\left(2^2\right)^4}-\dfrac{1}{2}+1-1=1+\dfrac{5\cdot2^3}{2^8}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2^5}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{32}=\dfrac{16+5}{32}=\dfrac{21}{32}$.

δ) $\Delta=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\dfrac{-2^2:(-2)^{-2}}{-2^3}-(-1)^4\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}\right]\left(2^0+1\right)^{-1}=$

$=2^2\cdot\left[\dfrac{-2^2:2^{-2}}{-2^3}-(-3)\right]\cdot(1+1)^{-1}=2^2\cdot\left[\dfrac{2^{2-(-2)}}{2^3}+3\right]\cdot2^{-1}=2\left(\dfrac{2^4}{2^3}+3\right)=2(2+3)=10.$

3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\left[\left(x^4y^3\right)^{-1}\left(y^4x^2\right)^2\right]^2}{\left(x^2y\right)^{-10}}$, αν οι αριθμοί x,y είναι αντίστροφοι.

Λύση

Επειδή οι x,y είναι αντίστροφοι, έχουμε ότι $xy=1$, οπότε θα προσπαθήσουμε στην παράσταση A να σχηματίσουμε, όπου είναι δυνατόν, το γινόμενο xy.

Είναι $\mathrm{A} = \dfrac{\left[\left(xx^3y^3\right)^{-1}\left(y^2y^2x^2\right)^2\right]^2}{\left(xxy\right)^{-10}} = \dfrac{\left\{\left[x\left(xy\right)^3\right]^{-1}\left[y^2\left(yx\right)^2\right]^2\right\}^2}{x^{-10}\left(x\,y\right)^{-10}}$. Έχουμε όμως ότι

$xy = 1$, οπότε $\mathrm{A} = \dfrac{\left[x^{-1}\left(y^2\right)^2\right]^2}{\left(x\right)^{-10}} = x^{-2}y^8x^{10} = x^8y^8 = \left(xy\right)^8 = 1.$

4. Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1}\cdot 1000$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \left(\dfrac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}\right)^{-2}$.

(Ε.Μ.Ε. ΘΑΛΗΣ Γ΄ Γυμνασίου, 2011)

Λύση

Είναι $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3} = 10^{-1-(-3)} = 10^2$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7} = 10^{-5-(-7)} = 10^2$ και
$\gamma = 10^{-1}\cdot 1000 = 10^{-1}\cdot 10^3 = 10^2$, οπότε $\alpha\beta\gamma = 10^2\cdot 10^2\cdot 10^2 = 10^6$ και
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 10^2\cdot 10^2 + 10^2\cdot 10^2 + 10^2\cdot 10^2 = 3\cdot 10^4$.

Άρα $\mathrm{A} = \left(\dfrac{6\cdot 10^6}{3\cdot 10^4}\right)^{-2} = \left(2\cdot 10^2\right)^{-2} = 200^{-2} = \dfrac{1}{200^2} = \dfrac{1}{2\cdot 10^2} = \dfrac{1}{40000}$.

5. Να αναλύσετε τους αριθμούς 108, 162 και 24 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{K} = 108^{-3}\left(2^{-2}\right)\left(3^{-3}\right)^2\cdot 24^{-2}\cdot 162$$

Λύση

Είναι

108	2	**162**	2	**24**	2
54	2	81	3	12	2
27	3	27	3	6	2
9	3	9	3	3	3
3	3	3	3	1	
1	1				

άρα $108 = 2^2\cdot 3^3$, $162 = 2\cdot 3^4$ και $24 = 2^3\cdot 3$, οπότε:

$\mathrm{K} = \mathbf{108^{-3}\left(2^{-2}\right)\left(3^{-3}\right)^2\cdot 24^{-2}\cdot 162} = \left(2^2\cdot 3^3\right)^{-3}\left(2^{-2}\right)\left(3^{-3}\right)^2\left(2^3\cdot 3\right)^{-2}\left(2\cdot 3^4\right) =$
$= 2^{-6}\cdot 3^{-9}\cdot 2^{-2}\cdot 3^{-6}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-2}\cdot 2\cdot 3^4 = 2^{-13}\cdot 3^{-13} = \left(2\cdot 3\right)^{-13} = 6^{-13}$.

6. Αν $\alpha = \dfrac{12\beta^4}{\gamma}$, να βρείτε τι μεταβολή υφίσταται η τιμή του α, όταν και ο β και ο γ τριπλασιάζονται.

α) Ο α πολλαπλασιάζεται επί 27.

β) Ο α πολλαπλασιάζεται επί 12.

γ) Ο α πολλαπλασιάζεται επί 9.

δ) Ο α τριπλασιάζεται.

ε) Ο α δε μεταβάλλεται.

Λύση

Όταν οι β, γ τριπλασιάζονται, ο α γίνεται $\alpha = \dfrac{12(3\beta)^4}{3\gamma} = \dfrac{12\cdot 3^4\beta^4}{3\gamma} = 3^3\cdot\dfrac{12\beta^4}{\gamma} = 27\alpha$, δηλαδή ο α πολλαπλασιάζεται επί 27. Σωστή απάντηση η (α).

7. **α)** Να δείξετε ότι $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.

β) Αν $x^2y^{-2}=1$ και $xy=-4$, να υπολογίσετε το $x+y$.

Λύση

α) $(x-y)(x+y)=x^2+xy-yx-y^2=x^2-y^2$.

β) Είναι $x^2y^{-2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y^2}=1 \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow x=y$ ή $x=-y$. Είναι $xy=-4<0$, άρα οι x, y είναι ετερόσημοι, οπότε $x=-y$, συνεπώς $x+y=0$.

8. Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός με $\nu \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=(-1)^{\nu}+3(-1)^{\nu+1}-7(-1)^{\nu+2}$.

Λύση

Επειδή έχουμε αρνητικούς αριθμούς υψωμένους σε δυνάμεις του φυσικού αριθμού ν, διακρίνουμε για τον ν δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Ο ν είναι άρτιος, δηλαδή $\nu=2\kappa$, όπου κ θετικός ακέραιος. Τότε $(-1)^{\nu}=1$ και $(-1)^{\nu+1}=-1$ (*αφού ο ν είναι άρτιος, ο $\nu+1$ θα είναι περιττός*) και $(-1)^{\nu+2}=1$ (*αφού ο ν είναι άρτιος, ο $\nu+2$ θα είναι άρτιος*). Έχουμε λοιπόν ότι $A=(-1)^{\nu}+3(-1)^{\nu+1}-7(-1)^{\nu+2}=1+3(-1)-7\cdot 1=1-3-7=-9$.

2η περίπτωση: Ο ν είναι περιττός, δηλαδή $\nu = 2\kappa + 1$, όπου κ θετικός ακέραιος. Τότε $(-1)^{\nu} = -1$, $(-1)^{\nu+1} = 1$ (*αφού ο ν είναι περιττός, ο $\nu+1$ θα είναι άρτιος*) και $(-1)^{\nu+2} = -1$ (*αφού ο ν είναι περιττός, ο $\nu+2$ θα είναι περιττός*).

Έχουμε λοιπόν ότι $A = (-1)^{\nu} + 3(-1)^{\nu+1} - 7(-1)^{\nu+2} = -1 + 3\cdot 1 - 7(-1) = -1 + 3 + 7 = 9.$

Τελικά $A = -9$, αν ο ν είναι άρτιος, και $A = 9$, αν ο ν είναι περιττός.

9. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha = \left(2^0 + 8^{21} : 16^{15} + 6\cdot 27^{10} : 81^7\right)^{63}$ και $\beta = \left(2^{2^5} : 2^{5^2} + 1\right)^{54}$.

(Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα Γ΄ Γυμνασίου, 1989)

Λύση

$$\alpha = \left(2^0 + 8^{21} : 16^{15} + 6\cdot 27^{10} : 81^7\right)^{63} = \left[1 + \left(2^3\right)^{21} : \left(2^4\right)^{15} + 6\cdot\left(3^3\right)^{10} : \left(3^4\right)^7\right]^{63} =$$

$$= \left(1 + 2^3 + 6\cdot 3^2\right)^{63} = 63^{63} \text{ και } \beta = \left(2^{2^5} : 2^{5^2} + 1\right)^{54} = \left(2^{32} : 2^{25} + 1\right)^{54} = \left(2^7 + 1\right)^{54}.$$

Ισχύει ότι $\alpha = 63^{63} < 64^{63} = \left(2^6\right)^{63} = \left(2^7\right)^{54} < \left(2^7 + 1\right)^{54} = \beta.$

10. Αν $8\cdot 27\cdot 64 = x^3$, να βρείτε τον x.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $8\cdot 27\cdot 64 = 2^3\cdot 3^3\cdot 4^3 = (2\cdot 3\cdot 4)^3 = 24^3$, οπότε $x^3 = 24^3$, άρα $x = 24$.

11. Αν $2^x + 2^x + 2^x + 2^x = 2^7$, να υπολογίσετε τον x.

Λύση

Είναι $2^x + 2^x + 2^x + 2^x = 2^7 \Leftrightarrow 4\cdot 2^x = 2^7 \Leftrightarrow 2^2\cdot 2^x = 2^7 \Leftrightarrow 2^{x+2} = 2^7 \Leftrightarrow x + 2 = 7 \Leftrightarrow$ $x = 5$.

► Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη, και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας:

α) Αν $x^m x^n = 1$ και $x \neq \pm 1$, τότε $m + n = 1$.

β) Αν ο ν είναι περιττός φυσικός αριθμός και για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha < 0$, τότε ο $\alpha^{-\nu}$ είναι αρνητικός.

γ) Για κάθε ακέραιο αριθμό $\alpha < -1$ και για κάθε ν άρτιο φυσικό αριθμό ισχύει $\alpha^{-\nu} > 0$.

δ) Αν $\alpha > 0$, υπάρχει ακέραιος αριθμός ν τέτοιος ώστε $\alpha^{\nu} < 0$.

ε) Οι αριθμοί α^{ν} και $\alpha^{-\nu}$, με $\alpha \neq 0$, είναι αντίθετοι.

στ) Αν $\alpha > 0$, τότε $|\alpha|^{\nu} = \alpha^{\nu}$, για κάθε ακέραιο αριθμό ν.

2. **Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.**

α) $\dfrac{-24x^3}{8x^9} = \dfrac{-3}{x^3}$ **β)** $\dfrac{-24x^2}{-3^{-1}x} = 8x$

γ) $\dfrac{14x^3y^2}{7x^2y} = 2xy$ **δ)** $\dfrac{2^2 4^2 x^4 y^2}{64x^{-2}y^2} = x^2$

ε) $\dfrac{15x^{-3}}{-3x} = -5x^{-2}$ **στ)** $-\dfrac{x^4y^6z^3}{-x^2y^2z} = x^2y^4z^2$

3. **Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:**

α) Αν $\omega = 3^3$, ποια από τις παρακάτω παραστάσεις είναι ίση με 3^8;

Α. 5ω **Β.** ω^5 **Γ.** 8ω **Δ.** $8\omega^2$ **Ε.** $9\omega^2$

β) Αν $\mathrm{X} = \dfrac{12\alpha\beta^2}{\gamma}$, να βρείτε τι μεταβολή υφίσταται η τιμή του X, όταν ο α διπλασιάζεται, ο β τριπλασιάζεται και ο γ τετραπλασιάζεται.

Α. Ο Χ πολλαπλασιάζεται επί $1{,}5$.
Β. Ο Χ πολλαπλασιάζεται επί $4{,}5$.
Γ. Ο Χ πολλαπλασιάζεται επί 9.
Δ. Ο Χ τριπλασιάζεται.
Ε. Ο Χ πολλαπλασιάζεται επί 6.

γ) Αν οι n, m είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει $8^n = 2^m$, να υπολογίσετε την τιμή του $\dfrac{n}{m}$.

Α. $\dfrac{1}{4}$ **Β.** $\dfrac{1}{3}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}$ **Δ.** 3 **Ε.** 4

δ) Αν $\dfrac{x^{23}}{x^m} = x^{15}$ και $\left(x^4\right)^n = x^{20}$, τότε το mn ισούται με:

Α. 13 **Β.** 24 **Γ.** 28 **Δ.** 32 **Ε.** 40

ε) Αν m είναι θετικός ακέραιος αριθμός, να βρείτε ποιο από τα παρακάτω δεν είναι ίσο με $\left(2^4\right)^m$:

Α. 2^{4m} **Β.** 4^{2m} **Γ.** $2^m\left(2^{3m}\right)$ **Δ.** $4^m\left(2^m\right)$ **Ε.** 16^m

στ) Η παράσταση $\left(x^{-2}x^{-1}\right)^{-3}$ είναι ίση με: **Α.** x^{-9} **Β.** x^9 **Γ.** x^6 **Δ.** x^{-3}.

ζ) Αν κ είναι θετικός ακέραιος αριθμός, να βρείτε ποιο από τα παρακάτω δεν είναι ίσο με $\left(2^{3\kappa}\right)^2$:

Α. $\left(2^\kappa\right)^6$ **Β.** 64^κ **Γ.** $4^\kappa\left(2^{4\kappa}\right)$ **Δ.** $\left(8^\kappa\right)^3$ **Ε.** $2^{3\kappa}\left(2^{3\kappa}\right)$

η) Αν $2^{21}=x+2^{20}$, τότε το x είναι ίσο με: **Α.** 2 **Β.** 2^2 **Γ.** 3^2 **Δ.** 2^{20} **Ε.** 2^{21}.

θ) Αν $2^\alpha=k$, $k^b=m$ και $m^c=16$, τότε η τιμή του αbc είναι:

Α. 2 **Β.** 2^2 **Γ.** 5 **Δ.** 6 **Ε.** 8

ι) Αν α,β είναι θετικοί ακέραιοι, με $\alpha\neq\beta$, και ισχύει $\left(\alpha^{-\beta}\right)^3=\dfrac{1}{64}$, ποια είναι η τιμή της διαφοράς $\alpha-\beta$;

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 8 **Ε.** 12

ια) Η παράσταση $\mathrm{A}=3^\kappa+3^\kappa+3^\kappa$, για κάθε ακέραια τιμή του κ, είναι ίση με:

Α. $23^\kappa+3$ **Β.** $3^{\kappa+1}$ **Γ.** $3^{\kappa+3}$ **Δ.** $3^{3\kappa}$ **Ε.** 9^κ

► Ασκήσεις – Προβλήματα προς λύση

1. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\mathrm{A}=(-3)^2(-3)^3$ **β)** $\mathrm{B}=\left[(-1)^5\right]^{33}\cdot(-1)^{32}$ **γ)** $\Gamma=-2^{-2}\cdot2^3\cdot2^5$

δ) $\Delta=\left[(-4)^6\right]^2\cdot\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\right]^3$ **ε)** $\mathrm{E}=\left(3^{-4}\cdot9^3\right)^{-2}(-3)^{-2}$ **στ)** $\mathrm{Z}=\dfrac{(-3)^{-4}}{(-3)^{-7}}+\dfrac{(-3)^{14}}{(-3)^{12}}$

2. Να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων για να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\mathrm{A}=\dfrac{5^3\cdot5^4}{5^5}$ **β)** $\mathrm{B}=\dfrac{-2^{22}\cdot(-2)^7}{\left[(-2)^9\right]^3}$ **γ)** $\Gamma=\dfrac{16^2\cdot\left(2^6\right)^4}{\left(4^8\right)^2}$

δ) $\Delta=\left(2^{-3}\right)^{-2}:\left[\left(2^{-1}\right)^{-6}\left(2^2\right)^{-1}\cdot2^6\right]^{-2}$ **ε)** $\mathrm{E}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[-2^2(-2)^{-2}-\left(2^0-2^{-1}\right)^{-1}\right]-(-2)^4$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\mathrm{A}=\left(2^4-3^3\right)\cdot2+3\left(2\cdot5-3^2+7\right)+10^2:10$

β) $\mathrm{B}=\left(3^3-2\cdot8\right)\cdot2+\left(2^4-2\right):2+\left(2^3-2^5\right)$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\mathrm{A} = -\frac{3}{4}\cdot\left\{-1+2\frac{1}{5}-\left[\left(-\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\right):2\right]\cdot(-3)^0\cdot 5\right\}+3\frac{2}{5}-\frac{1}{20}(-3+5)$

β) $\mathrm{B} = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-2-3\frac{1}{5}:2^4+1\frac{1}{5}-\left[(-2\cdot 5)^2:\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{1}{3\cdot 10^2}$

γ) $\Gamma = \left[(-3)^2\right]^3:(-3)^6+2^3\cdot\frac{5}{(-4)^4}-\frac{1}{2}+1-\left(-\frac{3}{4}+1\frac{3}{4}\right)^{27}-\frac{2}{5}$

δ) $\Delta = \left[\left(\frac{2}{3}-3\right)^4\left(-\frac{3}{7}\right)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left(-\frac{13}{12}\right)$

ε) $\mathrm{E} = -(8-5)^2(-4+7)^3:\left[-(-6)^3\right]$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \dfrac{-x^3y^7}{(-x)^4(-y^5)}$:

α) για $x=-2$ και $y=2$ **β)** για $x=-3$ και $y=-5$

6. Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{X} = 5\cdot 3^2-2\cdot 2^3+6\cdot 2^4$ και $\mathrm{Z} = 3^3-6^2+7^2-5^2$.

Α. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $\mathrm{X}+\mathrm{Z}$ **ii.** $\mathrm{X}-\mathrm{Z}$ **iii.** $(\mathrm{X}+\mathrm{Z})(\mathrm{X}-\mathrm{Z})$ **iv.** $\mathrm{X}^2-\mathrm{Z}^2$

Β. Να συγκρίνετε τις τιμές των $(\mathrm{X}+\mathrm{Z})(\mathrm{X}-\mathrm{Z})$ και $\mathrm{X}^2-\mathrm{Z}^2$. Τι παρατηρείτε;

7. Μεταξύ ποιων δύο ψηφίων του αριθμού 987654 πρέπει να βάλουμε την υποδιαστολή, ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να είναι ίσος με $9{,}87654\cdot 10^4$;

8. Αν $\mathrm{A} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot 2^{-1}\cdot 8^{-1}}{\left(3\cdot 2^3\right)^2\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(2^{-3}\right)^3}-3^{-1}x$ και $\mathrm{B} = \dfrac{x-\left(-2+\frac{5}{3}\right)^{-2}}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{4^{-1}}\right)\right]}$, να λύσετε την εξίσωση $6\mathrm{A}=8\mathrm{B}$.

9. Αν $\dfrac{x+y}{x-y}=7$, να υπολογίσετε την τιμή του $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2}(-1)^{-1}$.

10. Αν $\alpha=\left(8^7-9\cdot 8^6+9\cdot 8^5-9\cdot 8^4+9\cdot 8^3-9\cdot 8^2+9\cdot 8-1\right)^{1000}$ και $\beta=1024^{200}\cdot 625^{1000}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς α^2 και β.

(Υπόδειξη: Για τον υπολογισμό του α μπορείτε κάθε γινόμενο της μορφής $9\cdot 8^\kappa$ να το γράψετε $9\cdot 8^\kappa=8\cdot 8^\kappa+8^\kappa=8^{\kappa+1}+8^\kappa$, π.χ. $9\cdot 8^7=8\cdot 8^7+8^7=8^8+8^7$. Για τον υπολογισμό του β να παρατηρήσετε ότι ο 1024 είναι δύναμη με βάση το 2 και ο 625 με βάση το 5.)

(59ος Πανελλήνιος Διαγωνισμός Ευκλείδης Γ΄ Γυμνασίου, 1998)

11. Αν α είναι η λύση της εξίσωσης $\dfrac{7x-(-2)^2}{15}+\dfrac{x-3^2-(-2)^3}{3}=$

$=\dfrac{3x-(-12)^0}{5}+\dfrac{4^2-3^2+x}{-10}$ και β είναι η λύση της εξίσωσης

$x+\dfrac{2(-x+5)}{5}=\dfrac{x-2}{-2}$, να υπολογίσετε και να συγκρίνετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=2+\left[-\frac{1}{3}-\left(\frac{5}{21}-\beta\right)+3\right]-\left[12-\frac{1}{3}-\left(8+\frac{5}{21}-\alpha\right)-(-8)\right]-$$

$$-\left[(-\alpha)^{-2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]$$

$$\mathrm{B}=\left(\frac{3}{4}\alpha\right)\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-2-3\frac{1}{5}:2^4+\beta^{-1}+\frac{23}{10}-\left[(-2\cdot 5)^2:\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{1}{3\cdot 10^2}$$

12. Αν $\alpha=6\beta$, με $\alpha=\dfrac{\left(-\frac{3}{5}\right)^2\cdot 5^2-3^2+x}{\left[1-\left(-1^{2005}\right)\right]^0}$ και $\beta=\dfrac{(-2)^3+(-1)^3}{9}+\dfrac{x}{2}$, να υπολογίσετε το x.

(Ε.Μ.Ε. ΘΑΛΗΣ Γ΄ Γυμνασίου, 2004)

13. Αν $\kappa=2(-2)^2-\left(3\frac{2}{15}:\frac{27}{15}\right)^0-\frac{3}{4}:\left(3^2\cdot\frac{1}{-2^2}\right)+(1-3)^2(-1+3)^2\cdot\frac{1}{(-4)^2}-3^{-1}$ και

$\lambda=\left[(-3)^2\right]^3:(-3)^6+2^3\cdot\dfrac{5}{(-4)^2}-\dfrac{1}{2}+1-\left(-\dfrac{3}{4}+1\dfrac{3}{4}\right)^{27}$, να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{\kappa}{2\lambda}$.

14. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $A=\left(-1+\frac{1}{2}\right)^{-3}$ και $B=\frac{3}{4}-\frac{-3}{-4}\cdot\frac{7}{6}$ είναι αντίστροφοι.

15. Αν $5^3+5^3+5^3+5^3+5^3=5^{\nu}$, όπου ο ν είναι ένας θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή του ν.

16. Αν $9^{\nu}=27^{\nu+1}$, να υπολογίσετε τον 2^{ν}, όπου ν ακέραιος αριθμός.

Γ. Τετραγωνικές ρίζες

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α ονομάζεται ο θετικός αριθμός x, το τετράγωνο του οποίου είναι ο αριθμός α. Συμβολίζουμε με $\sqrt{\alpha}$.

Επίσης ορίζουμε $\sqrt{0}=0$. Έτσι, καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό:

Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α ονομάζεται ο μη αρνητικός αριθμός x που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α.

Δηλαδή αν $\sqrt{\alpha}=x$, τότε $\alpha=x^2$, και αντίστροφα, δηλαδή αν $\alpha=x^2$, τότε $x=\sqrt{\alpha}$, με την προϋπόθεση ότι $x\geq 0$.

Από τον ορισμό προκύπτουν τα εξής:

- $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$
- $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

Η απόλυτη τιμή χρειάζεται προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι πάντοτε ένας μη αρνητικός αριθμός.

Πράγματι, ας παρατηρήσουμε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5=|5|,\quad \sqrt{7^2}=\sqrt{49}=7=|7|,\quad \sqrt{0^2}=\sqrt{0}=0=|0|,$$

$$\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3=|-3|,\quad \sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=|-5|.$$

Πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί όταν η ποσότητα κάτω από τη ρίζα είναι υψωμένη στο τετράγωνο. Συγκεκριμένα, πριν διώξουμε τη ρίζα, πρέπει να ελέγξουμε αν η ποσότητα αυτή είναι αρνητική ή θετική.

Παραδείγματα

1. $\sqrt{\left(5-\frac{7}{3}\right)^2}=\left|5-\frac{7}{3}\right|=5-\frac{7}{3}=\frac{8}{3}$ (είναι $5-\frac{7}{3}>0$).

2. $\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^2}=\left|\frac{3}{2}-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-\frac{3}{2}$ (είναι $\frac{3}{2}-\sqrt{5}<0$).

Ιδιότητες ριζών

▶ Αν $\alpha\geq 0$ και $\beta\geq 0$, τότε αποδεικνύεται ότι $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.

Π.χ. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$, $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$, $\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{5\cdot 15}=\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=$
$=\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο και για περισσότερα ριζικά.

Π.χ. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=\left(\sqrt{6}\right)^2=6$,
$\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{6\cdot 7\cdot 5}=\sqrt{210}$.

▶ Αν $\alpha\geq 0$ και $\beta>0$, τότε αποδεικνύεται ότι $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$.

Π.χ. $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$, $\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{28}{7}}=\sqrt{4}=2$, $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{35}{7}}=\sqrt{5}$.

▶ Αν $\alpha>1$, τότε $\alpha^2>\alpha>\sqrt{\alpha}>1$, ενώ, αν $0<\alpha<1$, τότε $0<\alpha^2<\alpha<\sqrt{\alpha}<1$.

Π.χ. Για $\alpha=9$ έχουμε $1<\sqrt{\alpha}=\sqrt{9}=3<\alpha=9<\alpha^2=81$,
ενώ για $\alpha=0{,}09$ έχουμε $0<\alpha^2=0{,}09^2=0{,}0081<\alpha=0{,}09<\sqrt{\alpha}=\sqrt{0{,}09}=0{,}3<1$.

Δεν ξεχνάμε ότι:

α) Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού.
Π.χ. Οι αριθμοί $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-5^2}$, $\left(\sqrt{-3}\right)^2$ δεν ορίζονται.

β) Αν $x^2=\alpha$, με $\alpha\geq 0$, τότε $x=\sqrt{\alpha}$ ή $x=-\sqrt{\alpha}$.
Π.χ. Αν $x^2=16$, τότε $x=4$ ή $x=-4$.
Αν $x^2=7$, τότε $x=\sqrt{7}$ ή $x=-\sqrt{7}$.

γ) **Γενικά ισχύει ότι** $\sqrt{\alpha+\beta}\neq\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, με $\alpha>0$ και $\beta>0$.
Πράγματι είναι $\sqrt{16+9}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$, αφού $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$, ενώ
$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$.

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων και των τετραγωνικών ριζών μπορούμε να υπολογίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες πολλών αριθμών.

Παραδείγματα

1. $\sqrt{900} = \sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30.$

2. $\sqrt{160000} = \sqrt{16 \cdot 10000} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10000} = 4\sqrt{100^2} = 4 \cdot 100 = 400.$

3. $\sqrt{0,81} = \sqrt{\dfrac{81}{100}} = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{100}} = \dfrac{9}{10} = 0,9.$

4. $\sqrt{0,0036} = \sqrt{\dfrac{36}{10000}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{10000}} = \dfrac{6}{\sqrt{100^2}} = \dfrac{6}{100} = 0,06.$

Ρητοποίηση παρονομαστή

Όταν έχουμε αλγεβρικό κλάσμα με άρρητο παρονομαστή, το μετατρέπουμε σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή, κάνοντας χρήση της ιδιότητας $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, με $\alpha > 0$, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

$$\frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \qquad \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

► Εφαρμογές

1. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{\left(\dfrac{3}{7}\right)^2}$ **β)** $\sqrt{(-20)^2}$ **γ)** $\sqrt{\left(\dfrac{-6}{13}\right)^2}$ **δ)** $\sqrt{13^2 \cdot 7^2}$ **ε)** $\sqrt{16 \cdot 81}$

στ) $\sqrt{(-9)(-36)}$ **ζ)** $\sqrt{1024}$ **η)** $\sqrt{\dfrac{64}{49}}$ **θ)** $\sqrt{\dfrac{144}{225}}$ **ι)** $\sqrt{\dfrac{1}{36}}$ **ια)** $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$

Λύση

α) $\sqrt{\left(\dfrac{3}{7}\right)^2} = \dfrac{3}{7}.$ **β)** $\sqrt{(-20)^2} = \sqrt{20^2} = 20.$ **γ)** $\sqrt{\left(\dfrac{-6}{13}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{6}{13}\right)^2} = \dfrac{6}{13}.$

δ) $\sqrt{13^2 \cdot 7^2} = \sqrt{13^2} \cdot \sqrt{7^2} = 13 \cdot 7 = 91.$ **ε)** $\sqrt{16 \cdot 81} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{81} = 4 \cdot 9 = 36.$

στ) $\sqrt{(-9)(-36)} = \sqrt{9 \cdot 36} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{36} = 3 \cdot 6 = 18.$

ζ) Αναλύουμε τον αριθμό 1024 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και προκύπτει $1024 = 2^{10} = \left(2^5\right)^2$, οπότε $\sqrt{1024} = \sqrt{\left(2^5\right)^2} = 2^5 = 32.$ **η)** $\sqrt{\dfrac{64}{49}} = \dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{49}} = \dfrac{8}{7}.$

θ) $\sqrt{\dfrac{144}{225}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{225}} = \dfrac{12}{15}.$ **ι)** $\sqrt{\dfrac{1}{36}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{36}} = \dfrac{1}{6}$ **ια)** $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7.$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=\sqrt{3^2}+\sqrt{(-5)^2}-\sqrt{16}+\sqrt{(-2)^2}$ **β)** $B=\sqrt{(-7)^2}+\sqrt{\left(\frac{5}{-9}\right)^2}+\sqrt{8^2}-\left(\sqrt{3}\right)^2$

Λύση

α) $A=\sqrt{3^2}+\sqrt{(-5)^2}-\sqrt{16}+\sqrt{(-2)^2}=3+5-4+2=6.$

β) $B=\sqrt{(-7)^2}+\sqrt{\left(\frac{5}{-9}\right)^2}+\sqrt{8^2}-\left(\sqrt{3}\right)^2=7+\frac{5}{9}+8-3=12\frac{5}{9}.$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\sqrt{6+\sqrt{9}}$ **β)** $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}$ **γ)** $\sqrt{9\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{4}}}$

δ) $\sqrt{9+4\sqrt{18-\sqrt{4}}}$ **ε)** $\sqrt{3+\sqrt{39-\sqrt{9}}+4\sqrt{7+\sqrt{81}}}$

Λύση

α) $\sqrt{6+\sqrt{9}}=\sqrt{6+3}=\sqrt{9}=3.$

β) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}=\sqrt{13+\sqrt{7+2}}=\sqrt{13+\sqrt{9}}=\sqrt{13+3}=\sqrt{16}=4.$

γ) $\sqrt{9\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{4}}}=\sqrt{9\cdot\sqrt{8\cdot 2}}=\sqrt{9\cdot\sqrt{16}}=\sqrt{9\cdot 4}=\sqrt{36}=6.$

δ) $\sqrt{9+4\sqrt{18-\sqrt{4}}}=\sqrt{9+4\sqrt{18-2}}=\sqrt{9+4\sqrt{16}}=\sqrt{9+4\cdot 4}=\sqrt{25}=5.$

ε) $\sqrt{3+\sqrt{39-\sqrt{9}}+4\sqrt{7+\sqrt{81}}}=\sqrt{3+\sqrt{39-3}+4\sqrt{7+9}}=\sqrt{3+\sqrt{36}+4\sqrt{16}}=$
$=\sqrt{3+6+4\cdot 4}=\sqrt{25}=5.$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=3\sqrt{12}-\sqrt{3}$ **β)** $B=2\sqrt{18}-5\sqrt{72}-2\sqrt{50}$

(Υπόδειξη: Αναλύουμε τις υπόρριζες ποσότητες σε γινόμενο δύο παραγόντων, όπου είναι δυνατόν, από τους οποίους ο ένας έχει ρίζα ακέραιο αριθμό, ενώ ο άλλος είναι συνήθως κοινός παράγοντας όλων των υπόρριζων ποσοτήτων.)

Λύση

α) $A=3\sqrt{12}-\sqrt{3}=3\sqrt{4\cdot 3}-\sqrt{3}=3\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{3}=6\sqrt{3}-\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$

β) $B=2\sqrt{18}-5\sqrt{72}-2\sqrt{50}=2\sqrt{9\cdot 2}-5\sqrt{36\cdot 2}-2\sqrt{25\cdot 2}=2\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}-5\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}-$
$-2\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=2\cdot 3\sqrt{2}-5\cdot 6\sqrt{2}-2\cdot 5\sqrt{2}=6\sqrt{2}-30\sqrt{2}-10\sqrt{2}=-34\sqrt{2}.$

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\sqrt{\sqrt{\left(2^{-1}\cdot 10^{-2}\right)^{-1}+5\cdot 10+6^{0}+4^{-1}+\frac{11}{4}}+2}$$

Λύση

Είναι $A=\sqrt{\sqrt{\left(2^{-1}\cdot 10^{-2}\right)^{-1}+5\cdot 10+6^{0}+4^{-1}+\frac{11}{4}}+2}=$

$$=\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^{2}}\right)^{-1}+50+1+\frac{1}{4}+\frac{11}{4}}+2}=\sqrt{\sqrt{\left(\frac{1}{200}\right)^{-1}+53+\frac{12}{4}}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt{200+53+3}}=\sqrt{\sqrt{256}}=\sqrt{\sqrt{16^{2}}}=\sqrt{16}=4.$$

6. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\frac{-2^{2}:(-2)^{-2}}{-2^{3}}-\sqrt{(-3)^{2}}-(-1)^{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]\cdot\left(2^{0}+1\right)^{-1}$

β) $B=\sqrt{5^{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[-2^{2}\cdot(-2)^{-2}-\left(2^{0}-2^{-1}\right)^{-1}\right]-(-2)^{4}$

Λύση

α) $A=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\frac{-2^{2}:(-2)^{-2}}{-2^{3}}-\sqrt{(-3)^{2}}-(-1)^{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]\cdot\left(2^{0}+1\right)^{-1}=$

$$=(-2)^{2}\cdot\left[\frac{-2^{2}:2^{-2}}{-2^{3}}-3-1\cdot(-3)\right]\cdot(1+1)^{-1}=(-2)^{2}\cdot\left[\frac{2^{2-(-2)}}{2^{3}}-3+3\right]\cdot 2^{-1}=$$

$$=2^{2}\left(\frac{2^{4}}{2^{3}}\right)\cdot 2^{-1}=2^{2}\cdot 2\cdot 2^{-1}=2^{2}=4.$$

β) $B=\sqrt{5^{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[-2^{2}\cdot(-2)^{-2}-\left(2^{0}-2^{-1}\right)^{-1}\right]-(-2)^{4}=$

$$=5-2^{2}\cdot\left[-2^{2}\cdot 2^{-2}-\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]-2^{4}=5-4\cdot\left[-2^{0}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]-16=$$

$$=5-4(-1-2)-16=5+12-16=1.$$

7. Αν $x^{4}=10$, να υπολογίσετε το x^{6}.

Λύση

Είναι $x^4 = 10$, παίρνουμε τις τετραγωνικές ρίζες και στα δύο μέλη και έχουμε: $\sqrt{x^4} = \sqrt{10}$ ή $x^2 = \sqrt{10}$.

Παρατηρούμε ότι $x^6 = \left(x^2\right)^3 = \left(\sqrt{10}\right)^3 = 10\sqrt{10}$.

8. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left(6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} - \sqrt{112}\right)x = \sqrt{7}$

β) $\sqrt{2}(x+4) - 2\sqrt{2}(x-8) = \sqrt{2}(x-2)$

Λύση

α) $\left(6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} - \sqrt{112}\right)x = \sqrt{7} \Leftrightarrow \left(6\sqrt{4\cdot 7} - 2\sqrt{9\cdot 7} - \sqrt{16\cdot 7}\right)x = \sqrt{7} \Leftrightarrow$
$\left(6\sqrt{4}\cdot\sqrt{7} - 2\sqrt{9}\cdot\sqrt{7} - \sqrt{16}\cdot\sqrt{7}\right)x = \sqrt{7} \Leftrightarrow \left(12\sqrt{7} - 6\sqrt{7} - 4\sqrt{7}\right)x = \sqrt{7} \Leftrightarrow$
$2\sqrt{7}x = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

β) $\sqrt{2}(x+4) - 2\sqrt{2}(x-8) = \sqrt{2}(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{2}x + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}x + 16\sqrt{2} =$
$= \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}x = -4\sqrt{2} - 16\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -2\sqrt{2}x = -22\sqrt{2} \Leftrightarrow$
$x = 11$.

9. Αν $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα την πλευρά β, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Lambda = \sqrt{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2} + \gamma\sqrt{\beta^2-\alpha^2} + \beta\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}}$.

Λύση

Με εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε $\beta^2 - \gamma^2 = \alpha^2$, $\beta^2 - \alpha^2 = \gamma^2$ και $\gamma^2 + \alpha^2 = \beta^2$, οπότε $\Lambda = \sqrt{\alpha\sqrt{\beta^2-\gamma^2} + \gamma\sqrt{\beta^2-\alpha^2} + \beta\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}} =$
$= \sqrt{\alpha\sqrt{\alpha^2} + \gamma\sqrt{\gamma^2} + \beta\sqrt{\beta^2}} = \sqrt{\alpha^2+\gamma^2+\beta^2} = \sqrt{\beta^2+\beta^2} = \sqrt{2\beta^2} = \beta\sqrt{2}$.

► Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \sqrt{\alpha^2}$.

β) Αν $x^2 = \alpha$, τότε $x = \sqrt{\alpha}$.

γ) Ισχύει ότι $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{2}-\frac{3}{2}$.

δ) Οι αριθμοί $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$ είναι αντίστροφοι.

ε) Ισχύει ότι $\left(\sqrt{-3}\right)^2=\sqrt{(-3)^2}$.

στ) Ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^4}=\alpha^2$, για κάθε πραγματικό αριθμό α.

ζ) Ισχύει ότι $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\frac{7}{4}\right)^2}=\sqrt{5}-\frac{7}{4}$.

η) Αν $x<0$, τότε $\sqrt{x^2}=-x$.

θ) Ισχύει ότι $\sqrt{36+25}=\sqrt{36}+\sqrt{25}$.

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

α) Το άθροισμα $\sqrt{75}+\sqrt{12}$ είναι ίσο με:

Α. $\sqrt{87}$ **Β.** $7\sqrt{3}$ **Γ.** $3\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ **Δ.** $29\sqrt{3}$ **Ε.** $3\sqrt{3}$

β) Η διαφορά $\sqrt{125}-\sqrt{45}$ ισούται με:

Α. $4\sqrt{5}$ **Β.** $2\sqrt{5}$ **Γ.** 2 **Δ.** $5\sqrt{2}$ **Ε.** 10

γ) Το γινόμενο $\sqrt{9x}\cdot\sqrt{4x}$, με $x\geq 0$, είναι ίσο με:

Α. $6\sqrt{x}$ **Β.** $36\sqrt{x}$ **Γ.** $36x$ **Δ.** $6x$ **Ε.** $6x^2$

δ) Αν $\frac{2}{x}=\sqrt{0{,}16}$, τότε ο x ισούται με:

Α. 50 **Β.** 5 **Γ.** $0{,}5$ **Δ.** $0{,}05$ **Ε.** $0{,}005$

ε) Η $\sqrt{\frac{x^2}{36}+\frac{x^2}{25}}$, με $x\geq 0$, είναι ίση με:

Α. $\frac{11x}{30}$ **Β.** $\frac{9x}{30}$ **Γ.** $\frac{x}{11}$ **Δ.** $\frac{2x}{11}$ **Ε.** $\frac{x\sqrt{61}}{30}$

στ) Η $\sqrt{x^2+y^2}$ είναι ίση με:

Α. $x+y$ **Β.** $|x|+|y|$ **Γ.** $(x+y)(x-y)$ **Δ.** $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$

Ε. κανένα από τα παραπάνω

ζ) Το πηλίκο $\frac{8\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$ ισούται με:

Α. 16 **Β.** 9 **Γ.** 8 **Δ.** 12 **Ε.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

η) Αν $\dfrac{x+y}{z}=9$, $\dfrac{y}{x}=4$ και $\sqrt{y}=6$, τότε το z είναι ίσο με:

Α. $\dfrac{5}{6}$ **Β.** 5 **Γ.** 9 **Δ.** 13 **Ε.** 36

θ) Αν $x=\sqrt{6}$ και $y^2=12$, με $y>0$, τότε το κλάσμα $\dfrac{4}{xy}$ είναι ίσο με:

Α. $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ **Β.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **Γ.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ **Δ.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **Ε.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

ι) Αν ο $\sqrt{\nu}$ είναι θετικός ακέραιος, για πόσες τιμές του ν ισχύει $100<\nu<199$;

Α. 3 **Β.** 4 **Γ.** 5 **Δ.** 6 **Ε.** 7

► Ασκήσεις – Προβλήματα προς λύση

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

$$\sqrt{6^2},\ \sqrt{(-6)^2},\ \sqrt{\frac{9}{16}},\ \sqrt{\frac{1}{25}},\ \sqrt{\left(-\frac{25}{64}\right)^2},\ \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\mathrm{A}=\sqrt{\dfrac{5}{4}:\sqrt{9+4\sqrt{18-\sqrt{4}}}}$ **β)** $\mathrm{B}=\sqrt{88-\sqrt{54-\sqrt{25}}}-\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}$

γ) $\Gamma=\dfrac{2\sqrt{36}-5\sqrt{4}}{\sqrt{81}+3\sqrt{2013^0}}+5\sqrt{\dfrac{25}{36}}$ **δ)** $\Delta=\dfrac{\sqrt{(-4)^2-12}+\sqrt{3(-2)-6(-7)}}{4\sqrt{16}}+\dfrac{5}{\sqrt{64+36}}$

3. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}}$ **β)** $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ **γ)** $\dfrac{16\sqrt{13}}{\sqrt{64}}$ **δ)** $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ **ε)** $\dfrac{14\sqrt{24}}{\sqrt{49}}$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\mathrm{A}=7\sqrt{8}-\sqrt{2}$ **β)** $\mathrm{B}=5\sqrt{7}-2\sqrt{28}$

γ) $\Gamma=3\sqrt{18}-5\sqrt{72}-\sqrt{50}$ **δ)** $\Delta=2\sqrt{12}+3\sqrt{48}-16\sqrt{3}$

ε) $\mathrm{E}=2\sqrt{175}-6\sqrt{28}+5\sqrt{63}$ **στ)** $\mathrm{Z}=3\left(\sqrt{7+9}+\sqrt{30-25}-\sqrt{5\cdot 8+3^2}\right)-\sqrt{64}$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\mathrm{A}=4\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}-3\sqrt{8}+7\sqrt{72}$ **β)** $\mathrm{B}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}+4\sqrt{28}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}$

γ) $\Gamma=4\sqrt{3}-2\sqrt{\dfrac{27}{9}}+4\sqrt{48}-2\sqrt{3}$ **δ)** $\Delta=2\sqrt{216}-5\sqrt{54}-\sqrt{\dfrac{6}{49}}+\dfrac{2}{7}\sqrt{6}$

6. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\mathrm{A}=2\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{13+\sqrt{17-8}}$

β) $\mathrm{B}=\sqrt{19+\sqrt{4\cdot 11-\sqrt{7\cdot 9+3^0}}}$

γ) $\Gamma=\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\sqrt{9\cdot\sqrt{9^2}}+\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

δ) $\Delta=\frac{3\sqrt{20}+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-2017)^0$

ε) $\mathrm{E}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}+\sqrt{(-2)^2}:\sqrt{(-2)^{-4}}$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\left(\sqrt{18}-4\sqrt{8}+7\sqrt{2}\right)x=\sqrt{450}+\sqrt{100}-\sqrt{8}-8\sqrt{2}$

β) $\left[\left(\sqrt{5}+4\right)\cdot\sqrt{5}-\sqrt{(-5)^2}\right]x=\sqrt{2^2\cdot 5+6^0}$

γ) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x+3\right)+3(x-4)=2\sqrt{2}-8$

δ) $\sqrt{3}(x+1)+2\sqrt{3}(5-x)=\sqrt{3}(x-2)$

8. Αν $\mathrm{A}=\sqrt{\sqrt{81}}+\frac{3\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$\mathrm{B}=3(-1)^{\mathrm{A}}+2(-1)^{\mathrm{A}+1}-5^0+4\cdot 10^0$

9. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $5\left(x-\sqrt{6}\right)+3\left(x+3\sqrt{6}\right)=6\left(x+3\sqrt{6}\right)$

β) $\sqrt{200}x-\sqrt{50}=\sqrt{18}x+\sqrt{32}$

γ) $2(x-2)+5\left(3-\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\left(5-\sqrt{2}\right)$

10. **Α.** Να δείξετε ότι οι αριθμοί $2-\sqrt{2}$ και $\sqrt{2}-2$ είναι αντίθετοι.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}\left(\eta\mu 30^\circ-\sigma\upsilon\nu 45^\circ\right)x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

11. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{3x-\sqrt{2}}{4}-\dfrac{x-\sqrt{2}}{3}<\dfrac{x+5\sqrt{2}}{12}$ **β)** $\dfrac{2\left(x-\sqrt{3}\right)}{3}-\dfrac{x+\sqrt{3}}{3}>\dfrac{x-\sqrt{75}}{4}$

12. Αν α,β,γ είναι οι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, με $\hat{\mathrm{A}}=90^{\circ}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{K}=\sqrt{\gamma\sqrt{\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}}+$
$+\sqrt{\beta\sqrt{\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}}+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$.

1.2 Ακέραιο μονώνυμο

Α. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα

Αλγεβρικές παραστάσεις

Ονομάζουμε **αλγεβρική παράσταση** κάθε έκφραση που περιέχει αριθμούς και γράμματα (που μπορούν να πάρουν συγκεκριμένη τιμή ή διάφορες τιμές), τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.

Π.χ. $3x+5$, $\;-2x^2+xy-\dfrac{3}{5y}+7$, $\;\sqrt{x+y}+3xy-6$, $\;\dfrac{4x^3+7xy-6}{2x+y}+\dfrac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$.

Αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τα γράμματα (**μεταβλητές**) με αριθμούς και εκτελέσουμε όλες τις πράξεις που σημειώνονται σε αυτή, θα προκύψει ένας αριθμός ο οποίος λέγεται **αριθμητική τιμή της παράστασης** για τις συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών.

Π.χ. **α)** Αν στην αλγεβρική παράσταση $3x^2-5x+7$ θέσουμε όπου $x=2$, τότε η αριθμητική τιμή της για $x=2$ θα είναι $3\cdot 2^2-5\cdot 2+7=9$.

β) Η αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης $\sqrt{5xy}+2y-3x^2y$ για $x=1$ και $y=5$ είναι $\sqrt{5\cdot 1\cdot 5}+2\cdot 5-3\cdot 1^2\cdot 5=\sqrt{25}+10-15=0$.

Οι αλγεβρικές παραστάσεις διακρίνονται αρχικά σε δύο κατηγορίες:

Α. Ρητή αλγεβρική παράσταση: Ονομάζεται κάθε αλγεβρική παράσταση στην οποία καμία από τις μεταβλητές δεν εμπεριέχεται σε υπόρριζη ποσότητα.

Β. Άρρητη αλγεβρική παράσταση: Ονομάζεται κάθε αλγεβρική παράσταση στην οποία μία τουλάχιστον από τις μεταβλητές εμπεριέχεται σε υπόρριζη ποσότητα.

Οι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις διακρίνονται σε δύο είδη:

i. Ακέραια αλγεβρική παράσταση: Ονομάζεται κάθε ρητή αλγεβρική παράσταση στην οποία δεν υπάρχει η πράξη της διαίρεσης διά μιας ή περισσότερων μεταβλητών.

ii. Κλασματική αλγεβρική παράσταση: Ονομάζεται κάθε ρητή αλγεβρική παράσταση στην οποία υπάρχει η πράξη της διαίρεσης διά μιας τουλάχιστον των μεταβλητών της.

► Εφαρμογές

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι ρητές και ποιες είναι άρρητες: **α)** $4x^3y$ **β)** $\sqrt{3xy}$ **γ)** $\sqrt{x}+2y$ **δ)** $\sqrt{2}+x$ **ε)** $\sqrt{\alpha^2\beta^4}$

στ) $\dfrac{2x^2+3xy-7}{5x+y}$ **ζ)** $\dfrac{x}{\sqrt{5}}$ **η)** $\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{y^2}}$

Λύση

α) Ρητή. **β)** Άρρητη, αφού η μεταβλητή x βρίσκεται κάτω από τη ρίζα.
γ) Άρρητη, διότι η μεταβλητή x βρίσκεται κάτω από τη ρίζα. **δ)** Ρητή, διότι δεν έχουμε μεταβλητή κάτω από ρίζα αλλά αριθμό. **ε)** Ρητή, διότι $\sqrt{\alpha^2\beta^4}=|\alpha|\cdot\beta^2$.
στ) Ρητή. **ζ)** Ρητή. **η)** Ρητή, διότι $\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{y^2}}=\dfrac{x+\sqrt{2}}{|y|}$.

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω ρητές αλγεβρικές παραστάσεις είναι ακέραιες και ποιες είναι κλασματικές:

α) $2\pi x^2$ **β)** $\dfrac{3x^2}{5}$ **γ)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ **δ)** $\dfrac{x}{y}+\dfrac{3}{7}$ **ε)** $\dfrac{2x^4}{x}$ **στ)** $\dfrac{3x^4-2x+7}{x^2+1}$

Λύση

α) Ακέραια. **β)** Ακέραια. **γ)** Ακέραια. **δ)** Κλασματική, διότι περιέχει διαίρεση με τη μεταβλητή y. **ε)** Ακέραια, διότι η μεταβλητή x απλοποιείται και έχουμε $\dfrac{2x^4}{x}=2x^3$.
στ) Κλασματική, αφού δε γίνεται απλοποίηση, ώστε να μην υπάρχει μεταβλητή στον παρονομαστή.

Μονώνυμα

Κάθε αλγεβρική παράσταση που περιέχει γράμματα **(μεταβλητές)** με εκθέτες φυσικούς αριθμούς στα οποία έχει σημειωθεί μόνο πολλαπλασιασμός λέγεται **ακέραιο μονώνυμο** ως προς τα γράμματα αυτά.

Π.χ. Οι αλγεβρικές παραστάσεις $3x$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$, $2x^3$, xy, $4x^3y$, $-4\alpha\beta\gamma^2$, $-\dfrac{4}{3}x^3y^2z$ είναι ακέραια μονώνυμα ως προς τα γράμματα που περιέχουν, ενώ δεν αποτελούν ακέραια μονώνυμα ως προς τις μεταβλητές x, y οι αλγεβρικές παραστάσεις $5x^{-2}$, $\dfrac{8x}{y^3}$, $2x^2+xy$.

Προσοχή! Η παράσταση $\dfrac{3}{\alpha}x^3y$ είναι ακέραιο μονώνυμο αν ο $\alpha\neq 0$ είναι σταθερά. Αν ο α είναι μεταβλητή, τότε η παράσταση αυτή δεν είναι ακέραιο μονώνυμο.

Σε κάθε μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής του. Οι μεταβλητές με τους εκθέτες τους αποτελούν το εγγράμματο μέρος του μονωνύμου. Το μέρος αυτό λέγεται κύριο μέρος ή κύριο ποσό του μονωνύμου.

Π.χ. **α)** Συντελεστής του μονωνύμου $-4x^2y^3z$ είναι ο -4 και κύριο μέρος το x^2y^3z.
β) Συντελεστής του μονωνύμου xy^4 είναι ο 1 και κύριο μέρος το xy^4.
γ) Συντελεστής του μονωνύμου $-x^3$ είναι ο -1 και κύριο μέρος το x^3, διότι $-x^3=(-1)x^3$.
δ) Το μονώνυμο $\frac{x^2}{4}$ γράφεται $\frac{x^2}{4}=\frac{1}{4}x^2$, οπότε ο συντελεστής του είναι το $\frac{1}{4}$ και το κύριο μέρος του το x^2.

Προσοχή! Αν $\lambda=$ σταθερά, τότε:
α) συντελεστής του μονωνύμου $\frac{5}{\lambda}x^3y$, $(\lambda\neq 0)$, είναι ο $\frac{5}{\lambda}$ και κύριο μέρος το x^3y.
β) συντελεστής του μονωνύμου $(\lambda-1)x^2y^3\omega$ είναι ο $\lambda-1$ και κύριο μέρος το $x^2y^3\omega$.

- **Βαθμός του μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή** λέγεται ο εκθέτης που έχει η μεταβλητή αυτή στο μονώνυμο.
- **Βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές** λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

  Π.χ. Το μονώνυμο $-3x^2y^5z^4w$ είναι δευτέρου βαθμού ως προς x, πέμπτου βαθμού ως προς y, τέταρτου βαθμού ως προς z και πρώτου βαθμού ως προς w, ενώ ως προς όλες τις μεταβλητές είναι $2+5+4+1=12$ου βαθμού.
  Ένα ακέραιο μονώνυμο λέγεται **μηδενικό** όταν ο συντελεστής του είναι ίσος με μηδέν. Το μηδενικό μονώνυμο μπορεί να έχει οσεσδήποτε μεταβλητές και με κάθε βαθμό. Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό.
- **Όμοια μονώνυμα** λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.
  Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα**.
  Τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές λέγονται **αντίθετα**.
  Π.χ. Τα $4x^3$, $-5x^3$ είναι όμοια μονώνυμα γιατί έχουν ίδιο κύριο μέρος, το x^3.
  Επίσης τα $7x^2y^3$, $-\frac{2}{3}x^2y^3$ είναι όμοια, με κοινό κύριο μέρος το x^2y^3.
  Τα μονώνυμα $+3xy^3$ και $-3xy^3$ είναι αντίθετα.

Παρατηρήσεις

1. Επειδή είναι $x^0=1$, για $x\neq 0$, μπορούμε να λέμε ότι κάθε σταθερά γράφεται με μορφή μονωνύμου μηδενικού βαθμού ως προς μία ή και περισσότερες μεταβλητές.
   Π.χ. $3=3x^0$, $\quad -5=-5x^0y^0z^0$.

2. Κάθε μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού ως προς κάθε μεταβλητή που δεν την περιέχει.
   Π.χ. Το $7x^2zw^9$ είναι μηδενικού βαθμού ως προς τη μεταβλητή y, γιατί γράφεται $7x^2zw^9y^0$.
3. Δύο ή περισσότερα μονώνυμα μπορούμε να τα χαρακτηρίσουμε όμοια ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές, χωρίς να είναι όμοια ως προς όλες τις μεταβλητές τους. Π.χ. Τα μονώνυμα $12x^2yz$, $-5\alpha x^2z$, $6\beta x^2z$ είναι όμοια ως προς τις μεταβλητές τους x και z.

► Εφαρμογές

1. Να βρεθεί ο συντελεστής του x στα μονώνυμα: **α)** $3\alpha x$ **β)** $-7x^2y$ **γ)** y^3z.

Λύση

Όταν ζητείται ο συντελεστής ενός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του, θα θεωρούμε ως κύριο μέρος μόνο τη συγκεκριμένη μεταβλητή και όλα τα υπόλοιπα θα αποτελούν τον συντελεστή.

Έτσι: **α)** Για το $3\alpha x$ ο συντελεστής του x είναι το 3α.

β) Για το $-7x^2y = -7yx^2$ ο συντελεστής του x είναι το $-7y$.

γ) Για το $y^3z = y^3zx^0$ ο συντελεστής του x είναι το y^3z.

2. Να βρεθεί ο βαθμός ως προς x, ως προς y και ως προς x και y των παρακάτω μονωνύμων:
   α) $5x^3y$ **β)** $-3xy^2$ **γ)** $6x^2y^2$ **δ)** $12x$ **ε)** $-8y$

Λύση

Επειδή βαθμός του μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή λέγεται ο εκθέτης που έχει η μεταβλητή αυτή στο μονώνυμο, και βαθμός ως προς δύο μεταβλητές είναι το άθροισμα των εκθετών που έχουν οι μεταβλητές αυτές, έχουμε:

Μονώνυμο	**Βαθμός ως προς x**	**Βαθμός ως προς y**	**Βαθμός ως προς x και y**
$5x^3y$	3	1	$3+1=4$
$-3xy^2$	1	2	$1+2=3$
$6x^2y^2$	2	2	$2+2=4$
$12x$	1	0	$1+0=1$
$-8y$	0	1	$0+1=1$

3. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή σε καθένα από τα παρακάτω μονώνυμα για τις τιμές των μεταβλητών που δίνονται σε κάθε περίπτωση:

α) $5x^3y^2$ για $x=-2$ και $y=-1$ **β)** $-\frac{3}{4}\alpha^2\beta^3\gamma^5$ για $\alpha=2$, $\beta=-3$ και $\gamma=1$

Λύση

Για να υπολογίσουμε την αριθμητική τιμή μονωνύμου, αρκεί να αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές του με τις τιμές που δίνονται κάθε φορά για καθεμία από αυτές.

Έχουμε:

α) $5\cdot(-2)^3(-1)^2=5\cdot(-8)\cdot 1=-40.$ **β)** $-\frac{3}{4}\cdot 2^2\cdot(-3)^3\cdot 1^5=-\frac{3}{4}\cdot 4\cdot(-27)=81.$

4. Να βρείτε ποια από τα μονώνυμα $5x^2y$, $3xy^2$, $9x^3$ και $14x^2y$ είναι όμοια.

Λύση

Για να είναι όμοια, πρέπει να έχουν το ίδιο κύριο μέρος. Παρατηρούμε ότι τα $5x^2y$ και $14x^2y$ είναι όμοια, διότι έχουν το ίδιο κύριο μέρος, το x^2y.

5. Να βρείτε ποια από τα μονώνυμα $13x^2y^2z$, $8xy^3$, $-8xy^3$, $-13x^2yz^2$, $7xz^3$ είναι αντίθετα.

Λύση

Για να είναι δύο μονώνυμα αντίθετα, πρέπει να είναι όμοια (να έχουν το ίδιο κύριο μέρος) και να έχουν αντίθετους συντελεστές.

Τα μονώνυμα $8xy^3$ και $-8xy^3$ είναι αντίθετα, διότι έχουν ως κύριο μέρος το xy^3 και αντίθετους συντελεστές 8 και -8 αντίστοιχα.

6. Για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού ν η παράσταση $5x^{\nu-1}y^{6-2\nu}z^2$ είναι μονώνυμο; Για καθεμία από τις τιμές να βρείτε τον βαθμό του μονωνύμου **α)** ως προς x, **β)** ως προς y, **γ)** ως προς z και **δ)** ως προς όλες τις μεταβλητές.

Λύση

Για να είναι η παράσταση $5x^{\nu-1}y^{6-2\nu}z^2$ μονώνυμο, θα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως: $\nu-1\geq 0$ και $6-2\nu\geq 0$, με ν φυσικό αριθμό.

Δηλαδή θα πρέπει οι εκθέτες των x, y να είναι φυσικοί αριθμοί.

Έχουμε $\nu-1\geq 0$, άρα $\nu\geq 1$ και $6-2\nu\geq 0$, άρα $\nu\leq 3$.

Άρα για τον φυσικό αριθμό ν θα ισχύει $1\leq\nu\leq 3$, συνεπώς ο ν μπορεί να πάρει τις τιμές $\nu=1$ ή $\nu=2$ ή $\nu=3$.

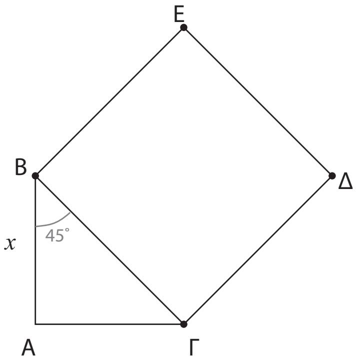
Για $\nu = 1$ έχουμε το μονώνυμο $5x^0y^4z^2 = 5y^4z^2$.
Για $\nu = 2$ έχουμε το μονώνυμο $5xy^2z^2$.
Για $\nu = 3$ έχουμε το μονώνυμο $5x^2y^0z^2 = 5x^2z^2$.
Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται για καθεμία από τις τιμές του ν η μορφή και ο βαθμός σε κάθε περίπτωση του μονωνύμου.

ν	**Μονώνυμο**	**Βαθμός ως προς x**	**Βαθμός ως προς y**	**Βαθμός ως προς z**	**Βαθμός ως προς x και y και z**
1	$5y^4z^2$	0	4	2	$0+4+2=6$
2	$5xy^2z^2$	1	2	2	$1+2+2=5$
3	$5x^2z^2$	2	0	2	$2+0+2=4$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\text{ΑΒΓ}\left(\widehat{\text{Α}} = 90^\circ\right)$, με πλευρά $\text{ΑΒ} = x$ και $\widehat{\text{Β}} = 45^\circ$.

α) Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ που κατασκευάζουμε στο εξωτερικό μέρος του τριγώνου με πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ. Στην περίπτωση που η παραπάνω αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο, να γράψετε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και τον βαθμό του.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου, όταν $x = 8\,\text{cm}$.



Λύση

α) Είναι $\widehat{\text{Β}} = 45^\circ$, άρα και $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, με $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} = x$.
Εφαρμόζουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε $\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΓΔΕ είναι $\text{Ε}_{(\text{ΒΓΔΕ})} = \text{ΒΓ}^2 = 2x^2$.
Είναι μονώνυμο με συντελεστή 2, κύριο μέρος το x^2 και είναι δευτέρου βαθμού.

β) Για $x = 8\,\text{cm}$, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $\text{Ε}_{(\text{ΒΓΔΕ})} = 2 \cdot 8^2 = 2 \cdot 64 = 128\ \text{cm}^2$.

► Ερώτηση κατανόησης

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Δύο αντίθετα μονώνυμα είναι όμοια.

β) Δύο όμοια μονώνυμα είναι ίσα.

γ) Κάθε σταθερό μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή.

δ) Τα όμοια μονώνυμα διαφέρουν μόνο κατά τον συντελεστή τους.

ε) Ένα μονώνυμο λέγεται μηδενικό όταν ο συντελεστής του είναι ίσος με μηδέν.

στ) Ο βαθμός του μηδενικού μονωνύμου είναι 0.

ζ) Το μηδενικό μονώνυμο μπορεί να έχει οσεσδήποτε μεταβλητές και με κάθε βαθμό.

► Ασκήσεις – Προβλήματα προς λύση

1. Θεωρούμε τα τρίγωνα που έχουν ως βάση το δεδομένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Αν το ύψος ενός από αυτά είναι υ, ποιο είναι το εμβαδόν του; Στην παράσταση αυτή του εμβαδού να οριστούν οι σταθερές και οι μεταβλητές. Αν είναι μονώνυμο, ποιος είναι ο συντελεστής, ποιο το κύριο μέρος και ποιος ο βαθμός του;

2. Θεωρούμε το σύνολο των τραπεζίων. Αν οι βάσεις ενός από αυτά είναι B και β και το ύψος του είναι υ, ποιο είναι το εμβαδόν του; Στην έκφραση αυτή του εμβαδού ποιες είναι οι μεταβλητές;

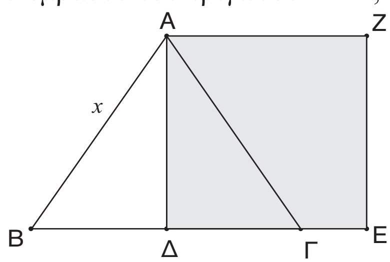
3. Στα παρακάτω μονώνυμα να βρείτε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και τον βαθμό ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές:

$$\frac{5}{3}x, \quad -\frac{2}{3}x^2, \quad xy^2z^3, \quad -2\alpha\beta^2x, \quad -\frac{6\sqrt{2}}{7}x^3y^2z, \quad -\alpha xy^3z^5$$

4. Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή -3 και κύριο μέρος x^2yz^3. Να γράψετε το μονώνυμο και το αντίθετό του.

5. Αν ο λ είναι πραγματικός αριθμός και ο ν είναι φυσικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές των λ, ν ώστε τα μονώνυμα $\left(\lambda^2-1\right)x^{\nu+1}y^2$ και $3x^3y^{3\nu-4}$ να είναι: **α)** όμοια, **β)** ίσα, **γ)** αντίθετα.

6. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς x. Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει: **α)** το ύψος του ΑΔ, **β)** το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, **γ)** το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΔΕΖ που κατασκευάζουμε με πλευρά το ύψος ΑΔ. Στην περίπτωση που κάποια από τις παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμο, να γράψετε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και τον βαθμό του.



Β. Πράξεις με μονώνυμα

Επειδή οι μεταβλητές ενός μονωνύμου παίρνουν τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, θεωρούμε ότι κάθε μονώνυμο αντιπροσωπεύει πραγματικό αριθμό. Για τον λόγο αυτό, οι πράξεις που μάθαμε στους πραγματικούς αριθμούς γίνονται και στα μονώνυμα και σε αυτές ισχύουν όλες οι γνωστές μας ιδιότητες, όπως η αντιμεταθετική, η προσεταιριστική, η επιμεριστική κτλ.

Ισχύει ότι:

Πρόσθεση μονωνύμων

Το αλγεβρικό άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο προς αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

Π.χ. Το άθροισμα των όμοιων μονωνύμων $7x^2$, $-3x^2$, $5x^2$ είναι

$7x^2+\left(-3x^2\right)+5x^2=(7-3+5)x^2=9x^2$.

Το άθροισμα δύο αντίθετων μονωνύμων είναι 0 (μηδενικό μονώνυμο).

Π.χ. Τα αντίθετα μονώνυμα $4x^3yz^2$, $-4x^3yz^2$ έχουν άθροισμα $4x^3yz^2-4x^3yz^2=0$.

- Η πρόσθεση όμοιων μονωνύμων λέγεται και **αναγωγή όμοιων όρων**.
- Αν τα μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο.

Π.χ. Το άθροισμα των μονωνύμων $7x^2$ και $3x$ είναι $7x^2+3x$ και δεν είναι μονώνυμο.

Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Επειδή κάθε μονώνυμο είναι ένα γινόμενο, ο πολλαπλασιασμός μονωνύμων γίνεται όπως ο πολλαπλασιασμός των γινομένων, δηλαδή, για να πολλαπλασιάσουμε δύο ή περισσότερα μονώνυμα, αρκεί να σχηματίσουμε ένα νέο μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των κύριων μερών, δηλαδή το κύριο μέρος θα είναι το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους, με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

Π.χ. Τα μονώνυμα $\mathrm{A}=-3x^4yz^3$, $\mathrm{B}=\frac{4}{5}x^3y^3z^5$ έχουν γινόμενο

$$\mathrm{AB}=\left(-3x^4yz^3\right)\left(\frac{4}{5}x^3y^3z^5\right)=(-3)\cdot\frac{4}{5}\left(x^4yz^3\right)\left(x^3y^3z^5\right)=$$

$$=-\frac{12}{5}\left(x^4x^3\right)\left(yy^3\right)\left(z^3z^5\right)=-\frac{12}{5}x^7y^4z^8.$$

Ο βαθμός του γινομένου μονωνύμων ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μονωνύμων ως προς τις μεταβλητές αυτές.

- Για να υψώσουμε ένα μονώνυμο σε μία δύναμη, αρκεί να υψώσουμε τον συντελεστή του και το κύριο μέρος του στη δύναμη αυτή.

  Π.χ. $\left(2x^2\right)^3=2^3\left(x^2\right)^3=8x^6$, $\left(-3x^3y^2\right)^2=(-3)^2\left(x^3y^2\right)^2=9\left(x^3\right)^2\left(y^2\right)^2=9x^6y^4$.

Διαίρεση μονωνύμων

Θα λέμε ότι ένα ακέραιο μονώνυμο B διαιρεί το ακέραιο μονώνυμο A, όταν υπάρχει ένα ακέραιο μονώνυμο Γ τέτοιο ώστε $B\Gamma = A$.

Το A λέγεται **διαιρετέος** και το B **διαιρέτης** της διαίρεσης A διά B. Το Γ λέγεται **πηλίκο της διαίρεσης** (υποθέτουμε πάντοτε ότι είναι $B \neq 0$).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι, για να διαιρεί ένα ακέραιο μονώνυμο B το ακέραιο μονώνυμο A, πρέπει και αρκεί το A να περιέχει όλες τις μεταβλητές του B και με εκθέτη κάθε μεταβλητής του A μεγαλύτερο ή ίσο του εκθέτη της ίδιας μεταβλητής του B. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι το πηλίκο δύο ακέραιων μονωνύμων είναι ένα ακέραιο μονώνυμο με συντελεστή το πηλίκο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο των μεταβλητών τους, με εκθέτη κάθε μεταβλητής τη διαφορά των εκθετών της.

Π.χ. $\dfrac{-6x^4y^3z^2w}{3x^2yz^2} = -\dfrac{6}{3}x^{4-2}y^{3-1}z^{2-2}w = -2x^2y^2w.$

► Εφαρμογές

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-3x^4 + 2x^4 + 5x^4 - x^4$ **β)** $x^2y^3 + 3y^3x^2 - 4x^2y^3$

γ) $2\alpha xy^2 - 3\alpha x^2y + 5\alpha x^2y + \alpha xy^2$ **δ)** $2x^2y - 5yx^2 - 2yx^2 + x^2y$

Λύση

α) $-3x^4 + 2x^4 + 5x^4 - x^4 = (-3+2+5-1)x^4 = 3x^4$.

β) $x^2y^3 + 3y^3x^2 - 4x^2y^3 = (1+3-4)x^2y^3 = 0$.

γ) $2\alpha xy^2 - 3\alpha x^2y + 5\alpha x^2y + \alpha xy^2 = (2\alpha xy^2 + \alpha xy^2) + (-3\alpha x^2y + 5\alpha x^2y) =$
$= 3\alpha xy^2 + 2\alpha x^2y.$

Στην περίπτωση αυτή είχαμε να προσθέσουμε μονώνυμα που δεν ήταν όλα όμοια. Τα ομαδοποιήσαμε λοιπόν ώστε σε κάθε ομάδα να περιέχονται όμοια μονώνυμα, και τα προσθέσαμε κατά ομάδα. Όπως είναι φυσικό, το άθροισμα που προκύπτει δεν είναι μονώνυμο.

δ) $2x^2y - 5yx^2 - 2yx^2 + x^2y = 2x^2y - 5x^2y - 2x^2y + x^2y = -5x^2y + x^2y = -4x^2y$.

Εδώ παρατηρούμε ότι έχουμε δύο αντίθετα μονώνυμα, τα $2x^2y$ *και* $-2yx^2$, *το άθροισμα των οποίων ισούται με μηδέν, οπότε μπορούμε να τα παραλείψουμε.*