ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ Η. ΡΟΥΣΑΛΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΟ 3ο ΚΑΙ ΤΟ 4ο ΘΕΜΑ

(ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ)

Στις επισυναπτόμενες σελίδες του παραπάνω βιβλίου έχουν γίνει από τον συγγραφέα ορισμένες **διορθώσεις ή συμπληρώσεις**, οι οποίες, προκειμένου να είναι ευδιάκριτες, έχουν σημανθεί **με κόκκινο χρώμα**.

Θέμα 9ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1, f'(0)=0$ και $f''(x)+4xf(x)f'(x)=-2f^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι $f'(x)=-2xf^2(x)$.

ii. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3+1)\,f(x)\,\eta\mu\dfrac{4}{x}$.

iv. Να δείξετε ότι $\int_0^1 2\eta\mu x\, f(x)\,dx<\ln 2$.

v. Αν $g(x)=2xf(x)$, να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_g, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Β. Αν F είναι μία παράγουσα της f με $F(0)=0$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $F(\varepsilon\varphi x)=x$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_F, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

iii. Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

Θέμα 10ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=10^{\frac{x}{10}}$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,10)$ στο οποίο η εφαπτόμενη στη C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $10y-9x+4=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\rho_1,\rho_2\in(0,10)$ τέτοια ώστε $3f'(\rho_1)+2f'(\rho_2)=\dfrac{9}{2}$.

vi. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

vii. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{-\alpha x^2}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Θέμα 20ό

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$\dfrac{xf(x)+1}{1+f^2(x)} = \dfrac{1}{2}$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$ (2).

i. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

v. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$, όπου $F(x) = x\,f(x)$.

vi. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.

vii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f^{-1}.

viii. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x^6+1} + x^3 - 4x = \sqrt{16x^2+1}$.

Θέμα 21ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x, & \text{αν } x \le 0 \\ 1 - 2x - \ln(x+1), & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

i. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Θέμα 25ο

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f(x)=3x^3-3x^2+x+6-\int_0^2 f(x)dx$ (1).

i. Να βρείτε τον τύπο της f.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$.

v. Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με την ευθεία $y=x$.

vi. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

vii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $(14,2)$.

Θέμα 26ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

v. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

vi. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f και της $C_{f^{-1}}$.

vii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^x f(t)dt$.

viii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\dfrac{5}{2}$.

ix. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ln x$.

Θ.Μ.Τ. για την f στα $[0,\delta]$ και $[\delta,10]$, οπότε υπάρχουν $\kappa \in (0,\delta) \subseteq (0,10)$ και

$\lambda \in (\delta,10) \subseteq (0,10)$ τέτοια ώστε $f'(\kappa) = \dfrac{f(\delta)-f(0)}{\delta-0} = \dfrac{10-\delta-1}{\delta} = \dfrac{9-\delta}{\delta}$ (5) και

$f'(\lambda) = \dfrac{f(10)-f(\delta)}{10-\delta} = \dfrac{10-10+\delta}{10-\delta} = \dfrac{\delta}{10-\delta}$ (6).

Από (5) και (6) προκύπτει ότι $f'(\kappa)f'(\lambda) = \dfrac{9-\delta}{\delta}\cdot\dfrac{\delta}{10-\delta} = \dfrac{9-\delta}{10-\delta}$.

vi. Αφού η f είναι κυρτή στο $[0,10]$, η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της C_f θα βρίσκεται «κάτω» από τη C_f. Η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$ είναι η

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-1 = \dfrac{\ln 10}{10}x \Leftrightarrow y = \dfrac{\ln 10}{10}x+1$.

Άρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq \dfrac{\ln 10}{10}x+1$ για κάθε $x \in [0,10]$.

vii. Θεωρούμε την $g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_4^x f(t)dt + x, \quad x \in [0,10]$

$g(0) = \int_0^0 f(t)dt + \int_4^0 f(t)dt + 0 = \int_4^0 f(t)dt = -\int_0^4 f(t)dt < 0$, διότι

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_0^4 f(x)dx > 0$

$g(10) = \int_0^{10} f(t)dt + \int_4^{10} f(t)dt + 10 > 10 > 0$, άρα $g(0)g(10) < 0$.

Η g συνεχής στο $[1,10]$ και $g(1)g(10) < 0 \overset{\Theta.B.}{\Rightarrow}$ υπάρχει $x_0 \in (1,10)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.
Δηλαδή το x_0 είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Θέμα 11ο

i. $f''(x)f^2(x) = -2f'(x) \Leftrightarrow f''(x) = -\dfrac{2f'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow \left(f'(x)\right)' = \left(\dfrac{2}{f(x)}\right)'$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{f(x)} + c_1 \overset{x=1}{\Rightarrow} f'(1) = \dfrac{2}{f(1)} + c_1 \Leftrightarrow 1 = \dfrac{2}{2} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$,

άρα $f'(x) = \dfrac{2}{f(x)} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 4 \Rightarrow \left(f^2(x)\right)' = (4x)'$

v. Η $f \nearrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα:

$0 \le x \le 1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(1) \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 f(1)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx < f(1)$

$1 \le x \le 2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(2) \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 f(2)dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx < f(2)$

.
.
.

$9 \le x \le 10 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(10) \Rightarrow \int_9^{10} f(x)dx < \int_9^{10} f(10)dx \Leftrightarrow \int_9^{10} f(x)dx < f(10)$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \ldots + \int_9^{10} f(x)dx < f(1) + f(2) + \ldots + f(10) \Leftrightarrow$

$\int_0^{10} f(x)dx < f(1) + f(2) + \ldots + f(10).$

vi. $0 < t < t+1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(t) < f(t+1) \Rightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_x^{x+1} f(t+1)dt$, (1). Για το ολοκλήρωμα

$I = \int_x^{x+1} f(t+1)dt$ θέτουμε $u = t+1 \Rightarrow du = dt$. Για $t = x \Rightarrow u = x+1$ και για

$t = x+1 \Rightarrow u = x+2,$

οπότε το I γίνεται $I = \int_{x+1}^{x+2} f(u)du = \int_{x+1}^{x+2} f(\mathrm{t})dt$ (2)

$\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt,\ x \in [1,6].$

Θέμα 19ο

i. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^3} - 2\dfrac{f(x)}{x}, \quad x > 0 \Leftrightarrow$

$x^2 f'(x) + 2xf(x) = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow \left(x^2 f(x)\right)' = \left(-\ln x\right)' \Rightarrow x^2 f(x) = -\ln x + c$

$\overset{x=1}{\Rightarrow} 1f(1) = -\ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα $x^2 f(x) = -\ln x \Leftrightarrow f(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}, \quad x > 0.$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\ln x\right) = +\infty$, άρα η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\varDelta_2 = \left(\sqrt{e}, +\infty\right) \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\varDelta_2) = \left(f\left(\sqrt{e}\right), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left(-\dfrac{1}{2e}, 0\right)$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$f(A) = f(\varDelta_1) \cup f(\varDelta_2) = \left[-\dfrac{1}{2e}, +\infty\right).$

vii. $x = e^{-\alpha x^2} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-\alpha x^2} \Leftrightarrow \ln x = -\alpha x^2 \Leftrightarrow -\dfrac{\ln x}{x^2} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$

- Αν $\alpha < -\dfrac{1}{2e}$, τότε $\alpha \notin f(A)$, άρα η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.
- Αν $\alpha = -\dfrac{1}{2e}$, τότε $\alpha \in f(\varDelta_1)$ και $\alpha \notin f(\varDelta_2)$, άρα η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα.
- Αν $-\dfrac{1}{2e} < \alpha < 0$, τότε $\alpha \in f(\varDelta_1)$ και $\alpha \in f(\varDelta_2)$, άρα η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες.
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\alpha \in f(\varDelta_1)$ και $\alpha \notin f(\varDelta_2)$, άρα η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα.

Θέμα 20ό

i. $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 + f^2(x) = 2xf(x) + 2 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow$

$\left(f(x) - x\right)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow h^2(x) = 1 + x^2$ (2), όπου $h(x) = f(x) - x$.

Ισχύει $1 + x^2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow h^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για την h ισχύουν:

- Η h συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών και
- $h(x) \neq 0$ (δε μηδενίζεται) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, $h(0) = f(0) = 1 > 0$, επομένως $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα από τη (2) προκύπτει $h(x) = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ο τύπος της f).

ii. $f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}}.$

Ισχύει $1 + x^2 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} > |x| \overset{|x| > -x}{\Longleftrightarrow}$

Έχουμε $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y - 14 = 25(x-2) \Leftrightarrow \ldots y = 25x - 36$ (β).

Στη (β) εναλλάσσουμε τα x, y και προκύπτει $x - 25y + 36 = 0$, που είναι η ζητούμενη εξίσωση.

Θέμα 26ο

i. $f(x) = \dfrac{2x^3+3x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x^3+3x)'(x^2+1)-(2x^3+3x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \ldots = \dfrac{2x^4+3x^2+3}{(x^2+1)^2} > 0,$

διότι $2x^4+3x^2+3>0$ *και* $\left(x^2+1\right)^2>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to-\infty} x = 2(-\infty) = -\infty,$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to-\infty} x = 2(+\infty) = +\infty.$

Η f είναι συνεχής και $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα το Σ.Τ. είναι:

$f(\mathrm{A}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left(-\infty, +\infty\right) = \mathbb{R}.$

iii. Ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (πλάγια)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3x}{x(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3x}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{x^3} = 2 = \lambda$

$\beta = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \lambda x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^3+3x}{x^2+1} - 2x\right) = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0.$

Άρα η ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y = 2x$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η ίδια ασύμπτωτη είναι και στο $-\infty$.

iv. $f'(x) = \dfrac{2x^4+3x^2+3}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \ldots = \dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\sqrt{3}$ ή $x = \sqrt{3}.$

Το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή, αφού ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί.