Αντώνης Σαρρηγιάννης

Α' τόμος

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΣΙΚΗ

Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

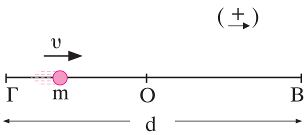
Θετική & Τεχνολογική

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr
ΒΙΒΛΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

Μάθε από το εύρος της ταλάντωσης να βρίσκεις το πλάτος της Α.



1.86 **Σώμα μάζας $m = 1$ kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση μεταξύ δύο σημείων Β και Γ (ακραίες θέσεις) που απέχουν απόσταση $d = 0,8$ m. Η σταθερά επαναφοράς αυτής της Α.Α.Τ. είναι $D = 100\ \frac{N}{m}$. Να υπολογίσετε:**

α. **Την περίοδο Τ αυτής της Α.Α.Τ.**

β. **Το πλάτος της Α.**

γ. **Τη μέση ταχύτητα $υ_μ$ καθώς το σώμα κινείται από το Ο προς το Β.**

Λύση

α. Η περίοδος της Α.Α.Τ. δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$. Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή, έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}\ s \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10}\ s \Rightarrow T = 0{,}2\pi\ s$$

β. Όταν δίνεται η απόσταση d των δύο ακραίων σημείων Β και Γ μιας ταλάντωσης, τότε στο μέσο της ευθείας ΒΓ είναι το κέντρο Ο της ταλάντωσης (δηλαδή η θέση ισορροπίας), και το πλάτος της Α είναι:

$$A = \frac{d}{2}$$

Στη συγκεκριμένη Α.Α.Τ. οι ακραίες θέσεις Β και Γ απέχουν απόσταση $d = 0{,}8$ m. Έτσι το πλάτος της Α.Α.Τ. θα είναι:

$$A = \frac{d}{2} = \frac{0{,}8\ m}{2} \Rightarrow A = 0{,}4\ m$$

γ. Καθώς ο ταλαντωτής κινείται από το Ο προς το Β, το μέτρο της μέσης ταχύτητάς του δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (1)$$

(Δείτε και δίπλα.) Στην περίπτωση αυτή όμως, η μετατόπιση είναι $\Delta x = (OB) = A = 0{,}4$ m και το χρονικό διάστημα είναι $\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{0{,}2\pi}{4}$ s $= 0{,}05\pi$ s (η κίνηση από το Ο στο Β είναι το $\frac{1}{4}$ της πλήρους ταλάντωσης). Έτσι από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\upsilon_\mu = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \upsilon_\mu = \frac{0{,}4\ \text{m}}{0{,}05\pi\ \text{s}} \Rightarrow \upsilon_\mu = \frac{8}{\pi}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ΘΥΜΗΣΟΥ

Μέση ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\mu$ σε μια ευθύγραμμη κίνηση είναι το πηλίκο της μετατόπισης $\Delta\vec{x}$ προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt. Δηλαδή:

$$\vec{\upsilon}_\mu = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

1.87 **Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Η απομάκρυνση x αυτής της Α.Α.Τ. σε σχέση με τον χρόνο δίνεται από την εξίσωση $x = 10\eta\mu\left(314t + \frac{\pi}{6}\right)$ (το t σε s, το x σε cm). Με βάση αυτή, να υπολογίσετε:**

α. **Το πλάτος Α, την κυκλική συχνότητα ω και την αρχική φάση φ_0 της Α.Α.Τ.**

β. **Τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} αυτής της ταλάντωσης.**

Μάθε να βρίσκεις τα μεγέθη της Α.Α.Τ. συγκρίνοντας την εξίσωσή της με τη γενική εξίσωση της θεωρίας.

λύση

α. Εφαρμόζοντας τη «μέθοδο της ταυτοποίησης», δηλαδή της σύγκρισης με την αντίστοιχη σχέση της θεωρίας, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x = 10\eta\mu\left(314t + \frac{\pi}{6}\right) \\ \quad\ \ \updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow \\ x = A\ \eta\mu\ (\omega t + \varphi_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 10\ \text{cm} \\ \omega = 314\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \varphi_0 = \frac{\pi}{6}\ \text{rad} \end{array}\right.$$

(Δείτε και δίπλα.)

β. Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας υ_{max} σε μια Α.Α.Τ. δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{max} = \omega A \qquad (1)$$

Μέθοδος ταυτοποίησης

Έστω ότι σας έχουν δώσει την εξίσωση ενός από τα μεγέθη της Α.Α.Τ. που εξετάζετε. Μπορείτε να προσδιορίσετε ορισμένα στοιχεία της ταλάντωσης συγκρίνοντας την εξίσωση που δόθηκε με την αντίστοιχη εξίσωση της θεωρίας για το μέγεθος αυτό.

Αντικαθιστώντας τις γνωστές τιμές των ω και Α στη σχέση αυτή, έχουμε:

$$\upsilon_{max} = \omega A = 314\ \frac{rad}{s} \cdot 0{,}1\ m \Rightarrow \upsilon_{max} = 31{,}4\ \frac{m}{s}$$

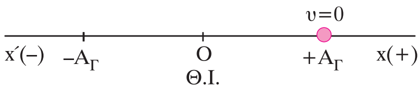
Μετατροπή στο S.I.
10 cm = 10 : 100 = 0,1 m

1.88 **Οι ταλαντωτές Β και Γ εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις και βρίσκονται σε φάση. Τη χρονική στιγμή t_1 η απομάκρυνση του ταλαντωτή Β έχει τιμή $x_{B_1} = +A_B$, όπου A_B είναι το πλάτος της Α.Α.Τ. που εκτελεί ο ταλαντωτής Β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_{Γ_1} του ταλαντωτή Γ τη στιγμή αυτή.**

Μάθε να συγκρίνεις μεγέθη ταλαντώσεων που βρίσκονται σε φάση ή σε συμφωνία φάσης.

λύση

Εφόσον οι ταλαντωτές Β και Γ βρίσκονται σε φάση (ή σε συμφωνία φάσης), τα διάφορα μεγέθη των ταλαντώσεών τους παίρνουν ταυτόχρονα τις ίδιες αντίστοιχες τιμές.



Χρονική στιγμή t_1
(για τον ταλαντωτή Γ)

Επομένως, αφού τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει $x_{B_1} = +A_B$, δηλαδή ο ταλαντωτής Β βρίσκεται στη θέση μέγιστου θετικού πλάτους, στη θέση του μέγιστου θετικού πλάτους θα βρίσκεται και ο ταλαντωτής Γ. Θα είναι δηλαδή:

$$x_{\Gamma_1} = +A_\Gamma$$

Ο ταλαντωτής Γ λοιπόν βρίσκεται σε ακραία θέση (όπως φαίνεται και στο σχήμα).
Έτσι η ταχύτητά του εκείνη τη στιγμή θα είναι ίση με μηδέν, δηλαδή τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\upsilon_{\Gamma_1} = 0$$

(Δείτε και δίπλα.)

Ταλαντώσεις σε φάση ή σε συμφωνία φάσης
Όταν δύο ταλαντώσεις βρίσκονται σε φάση ή σε συμφωνία φάσης, σημαίνει ότι τα διάφορα μεγέθη των ταλαντώσεων παίρνουν ταυτόχρονα τις ίδιες αντίστοιχες τιμές. Για παράδειγμα, τη στιγμή που γίνεται μέγιστη η απομάκρυνση της μιας Α.Α.Τ. γίνεται και της άλλης ή τη στιγμή που η ταχύτητα γίνεται $+\frac{\upsilon_{max_1}}{2}$ στη μία η ταχύτητα στην άλλη γίνεται $\frac{\upsilon_{max_2}}{2}$. Όταν δύο ταλαντώσεις βρίσκονται σε συμφωνία φάσης, τότε οι φάσεις τους διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή $\Delta\varphi = k \cdot 2\pi$, όπου $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

1.89 **Δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις έχουν την ίδια περίοδο $T = 0{,}6$ s. Οι ταλαντώσεις αυτές όμως παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad.**

α. **Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}75$ s ο ταλαντωτής που προηγείται φτάνει στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης ($x = +A$).**
Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που θα φτάσει στη μέγιστη θετική απομάκρυνση, δηλαδή στο $x = +A$, και ο ταλαντωτής που ακολουθεί.

β. **Μπορείτε με βάση τα στοιχεία που σας δόθηκαν να υπολογίσετε τις αρχικές φάσεις φ_{0_1} και φ_{0_2} των δύο ταλαντωτών;**

Μάθε να υπολογίζεις τη χρονική διαφορά Δt απόκτησης της ίδιας τιμής των αντίστοιχων μεγεθών, όταν δύο ταλαντώσεις με την ίδια T παρουσιάζουν διαφορά φάσης Δφ.

λύση

α. Ας «μεταφράσουμε» τι σημαίνει να παρουσιάζουν διαφορά φάσης Δφ δύο ταλαντώσεις ίδιας περιόδου. Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ένα μέγεθος της μιας ταλάντωσης, π.χ. η απομάκρυνση, πάρει την τιμή $x_1 = +A$, τότε η απομάκρυνση της άλλης ταλάντωσης θα λάβει την τιμή αυτή μετά από χρονικό διάστημα Δt, που αντιστοιχεί στη γωνία Δφ της διαφοράς φάσης.

Το χρονικό διάστημα Δt που αντιστοιχεί στη διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad των δύο Α.Α.Τ. του παραδείγματός μας το υπολογίζουμε ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Σε διαφορά φάσης } 2\pi \text{ αντιστοιχεί χρονικό διάστημα } T\\ \text{Σε διαφορά φάσης } \Delta\varphi \text{ αντιστοιχεί χρονικό διάστημα } \Delta t\end{array}\right\} \Rightarrow$$

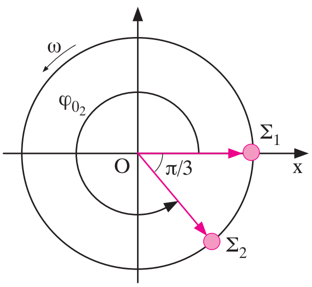
$$\Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \Delta t = T\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \Delta t = 0{,}6 \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}\ \text{s} \Rightarrow \Delta t = 0{,}1\ \text{s}$$

Σχόλιο

Βλέποντας άμεσα τη σχέση (2), δηλαδή τη $\varphi_{0_2} = \varphi_{0_1} - \frac{\pi}{3}$, αφού $\varphi_{0_1} = 0$, προκύπτει ότι $\varphi_{0_2} = -\frac{\pi}{3}$ rad.

Για την αρχική φάση όμως γενικά υπάρχει ο περιορισμός $0 \leq \varphi < 2\pi$. Έτσι, στην αρχική φάση φ_{0_2} δεν μπορούμε να δώσουμε την τιμή $\varphi_{0_2} = -\frac{\pi}{3}$ rad. Γι' αυτό και με βάση ότι ο τριγωνομετρικός κύκλος βαθμολογείται αριστερόστροφα, προέκυψε ότι $\varphi_{0_2} = \frac{5\pi}{3}$ rad. Και με τη συγκεκριμένη τιμή αποδίδεται αυτό που πρέπει, ότι δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το περιστρεφόμενο διάνυσμα $Ο\Sigma_2$ του δεύτερου ταλαντωτή βρίσκεται $\frac{\pi}{3}$ rad πίσω από το περιστρεφόμενο διάνυσμα $Ο\Sigma_1$ του πρώτου ταλαντωτή.



Ο ταλαντωτής που ακολουθεί λοιπόν θα φτάσει στη μέγιστη θετική απομάκρυνση τη χρονική στιγμή:

$$t_2 = t_1 + \Delta t$$

και με αντικατάσταση:

$$t_2 = 0{,}75\ \text{s} + 0{,}1\ \text{s} \Rightarrow t_2 = 0{,}85\ \text{s}$$

β.
- Ο πρώτος ταλαντωτής φτάνει στη θέση $x = +A$ τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = 0{,}75\ \text{s} = 0{,}6\ \text{s} + 0{,}15\ \text{s} \Rightarrow t_1 = 0{,}6\ \text{s} + \frac{0{,}6}{4}\ \text{s}$$

ή αφού $T = 0{,}6$ s:

$$t_1 = T + \frac{T}{4}\ \text{s}$$

Όταν δηλαδή ο ταλαντωτής αυτός φτάνει στη θέση με $x = +A$, έχει κάνει μία πλήρη ταλάντωση και $\frac{1}{4}$ ακόμα της ταλάντωσης. «Απαλείφοντας» την πλήρη ταλάντωση, προκύπτει ότι ο ταλαντωτής φτάνει στη θέση με $x = +A$ σε χρόνο $\frac{T}{4}$ s. Επομένως τη χρονική στιγμή $t = 0$ s βρισκόταν στη θέση με $x = 0$, δηλαδή στη θέση ισορροπίας, και κινούνταν προς τη θετική φορά ($\upsilon > 0$). Η αρχική φάση φ_{0_1} λοιπόν του πρώτου ταλαντωτή είναι $\varphi_{0_1} = 0$ rad.

- Ο δεύτερος ταλαντωτής υστερεί σε φάση από τον πρώτο κατά $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad. Αυτή η υστέρηση φάσης μεταφέρεται βέβαια και στην αρχική του φάση, οπότε θα είναι:

$$\varphi_{0_2} = \varphi_{0_1} - \Delta\varphi \Rightarrow \varphi_{0_2} = \varphi_{0_1} - \frac{\pi}{3}\ \text{rad} \qquad (2)$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το περιστρεφόμενο διάνυσμα του πρώτου ταλαντωτή βρίσκεται στην αρχή του αριστερόστροφου κύκλου (αφού $\varphi_{0_1} = 0$). Σύμφωνα με τη σχέση (2), το περιστρεφόμενο διάνυσμα του δεύτερου ταλαντωτή θα βρίσκεται $\frac{\pi}{3}$ πιο πίσω, στη θέση $Ο\Sigma_2$. Η αρχική φάση είναι:

$$\varphi_{0_2} = (\widehat{xΟ\Sigma_2})_{\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda\eta} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi_{0_2} = \frac{5\pi}{3}\ \text{rad}$$

(Δείτε και δίπλα.)

1.90 **Απομακρύνουμε ένα σώμα μάζας $m = 1$ kg από τη θέση ισορροπίας του κατά $d = 0{,}4$ m και στη συνέχεια, αφού το αφήσουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα, εκτελεί Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = 100\ \frac{N}{m}$. Να υπολογίσετε:**

α. Το πλάτος Α αυτής της Α.Α.Τ.

β. Τη μέγιστη ταχύτητα $υ_{max}$ του ταλαντωτή.

Πλάτος της Α.Α.Τ. που προκύπτει αν απομακρύνουμε τον ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας του κατά d και στη συνέχεια τον αφήσουμε ελεύθερο.

λύση

α. Αν απομακρύνουμε ένα σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά d και στη συνέχεια το αφήσουμε ελεύθερο να εκτελέσει Α.Α.Τ. **χωρίς αρχική ταχύτητα**, η θέση εκτροπής κατά d θα είναι **ακραία θέση** και το πλάτος της Α.Α.Τ. θα είναι $A = d$.

Έτσι, και το πλάτος της Α.Α.Τ. που θα εκτελέσει το σώμα αυτού του παραδείγματος θα είναι:

$$A = d = 0{,}4\ \text{m}$$

β. Τη μέγιστη ταχύτητα $υ_{max}$ θα την υπολογίσουμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος

Με αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.):

Έχουμε γενικά: $E_{ολ} = K + U$. Επειδή γνωρίζοντας το πλάτος Α ζητάμε την τιμή της $υ_{max}$, θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω γενική σχέση στη μορφή:

$$E_{ολ} = K_{max} + 0 \xRightarrow{E_{ολ} = \frac{1}{2}DA^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mυ_{max}^2 \Rightarrow υ_{max} = \sqrt{\frac{DA^2}{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ_{max} = A\sqrt{\frac{D}{m}} = 0{,}4\sqrt{\frac{100}{1}}\ \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ_{max} = 4\ \frac{m}{s}$$

(Δείτε και δίπλα.)

Δηλαδή εφαρμόσαμε την Α.Δ.Ε.Τ. για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, όπου $U = 0$ (αφού $x = 0$) και $K = K_{max}$ (αφού $υ = υ_{max}$).

ΘΥΜΗΣΟΥ

$D = m\omega^2$

2ος τρόπος

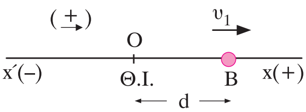
Απευθείας από τη σχέση:

$$\upsilon_{max} = \omega A \xRightarrow{\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}}$$

$$\Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{D}{m}}A \Rightarrow \upsilon_{max} = 4\ \frac{m}{s}$$

1.91 **Ένα σώμα μάζας $m = 1$ kg, που αν διεγερθεί κατάλληλα μπορεί να εκτελέσει Α.Α.Τ., βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση ισορροπίας του Ο. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά $d = 0{,}2$ m και στη νέα θέση Β που έρχεται (δείτε το σχήμα) το σπρώχνουμε δίνοντάς του την ταχύτητα $\upsilon_1 = 2\ \frac{m}{s}$ με φορά προς τα δεξιά. Η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα στη συνέχεια είναι Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = 100\ \frac{N}{m}$. Να υπολογίσετε:**

Πλάτος της Α.Α.Τ. που προκύπτει αν, αφού απομακρύνουμε τον ταλαντωτή κατά d από τη Θ.Ι. του, του δώσουμε και σπρωξιά (ταχύτητα) για να ταλαντωθεί.



Χρονική στιγμή $t = 0$.

α. Το πλάτος Α της Α.Α.Τ.

β. Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης (α_{max}) του σώματος.

λύση

α.

Αν απομακρύνουμε ένα σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά d και στη νέα θέση που έρχεται το σώμα, αντί να το αφήσουμε ελεύθερο, του δώσουμε και κάποια ταχύτητα ώστε στη συνέχεια να εκτελέσει Α.Α.Τ., έχουμε:

- Η θέση εκτροπής κατά d δεν είναι ακραία θέση, οπότε το πλάτος Α της Α.Α.Τ. δεν είναι ίσο με d (όπως αν το αφήναμε απλά ελεύθερο). Δηλαδή $A \neq d$ και πιο συγκεκριμένα $A > d$.
- Το πλάτος Α το υπολογίζουμε εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε.Τ. μεταξύ των θέσεων έναρξης της κίνησης και ακραίας θέσης.

Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε.Τ. έχουμε:

$$E_{ολ} = K + U \qquad (1)$$

Αλλά αφού ζητάμε το πλάτος Α, θα εκφράσουμε την $E_{ολ}$ ως $E_{ολ} = \frac{1}{2}DA^2$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dd^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{m\upsilon_1^2 + Dd^2}{D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{m\upsilon_1^2}{D} + d^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m\upsilon_1^2}{D} + d^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 0{,}2\sqrt{2}\ \text{m}$$

(Δείτε και δίπλα.)

Παρατήρηση

$$\left.\begin{aligned} A &= 0{,}2\sqrt{2}\ \text{m} \\ d &= 0{,}2\ \text{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A > d$$

β. Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_{max} = \omega^2 A \xRightarrow{\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}} \alpha_{max} = \left(\sqrt{\frac{D}{m}}\right)^2 \cdot A \Rightarrow$$

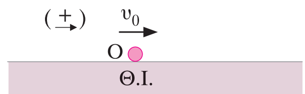
$$\Rightarrow \alpha_{max} = 100 \cdot 0{,}2\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha_{max} = 20\sqrt{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

1.92 **Το σώμα μάζας $m = 1$ kg του διπλανού σχήματος ισορροπεί στη θέση Ο. Κάποια στιγμή ασκούμε στο σώμα την κατάλληλη ώθηση ώστε να αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_0 = 4\ \frac{m}{s}$, με την οποία αρχίζει να εκτελεί Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = 100\ \frac{N}{m}$. Να υπολογίσετε:**

α. **Τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} αυτής της Α.Α.Τ.**

β. **Το πλάτος ταλάντωσης Α.**

Μάθε να βρίσκεις την υ_{max}, αν από εκεί που ισορροπεί το σώμα το εκτοξεύουμε με ταχύτητα υ_0 ώστε να εκτελέσει Α.Α.Τ.



Εκτόξευση από τη θέση ισορροπίας

Αν ένα σώμα που ισορροπεί σε κάποια θέση δεχτεί την κατάλληλη ώθηση ώστε να αποκτήσει ταχύτητα $υ_0$, με την οποία αρχίζει να εκτελεί Α.Α.Τ., τότε η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης είναι η $υ_0$, δηλαδή είναι:

$$υ_{max} = υ_0$$

Η θέση ισορροπίας της διεξαγόμενης Α.Α.Τ. είναι η θέση στην οποία ισορροπούσε αρχικά το σώμα πριν το ωθήσουμε.

ΘΥΜΗΣΟΥ

$$E_{ολ} = K_{max} = U_{max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{ολ} = \frac{1}{2}mυ_{max}^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

Παρατήρηση

Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος Α και απευθείας από τη σχέση:

$$υ_{max} = ωA$$

Λύση

α. Σύμφωνα με το διπλανό σχόλιο, η μέγιστη ταχύτητα $υ_{max}$ της Α.Α.Τ. που εκτελεί το σώμα είναι η ταχύτητα εκτόξευσης $υ_0$ (εφόσον η εκτόξευση γίνεται από τη θέση ισορροπίας). Έτσι λοιπόν:

$$υ_{max} = υ_0 \Rightarrow υ_{max} = 4\ \frac{m}{s}$$

β. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε.Τ. και έχουμε:

$$E_{ολ} = K + U \qquad (1)$$

Αλλά εφόσον γνωρίζουμε τη μέγιστη ταχύτητα $υ_{max}$, εκφράζουμε την $E_{ολ}$ συναρτήσει αυτής, δηλαδή:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}mυ_{max}^2 \qquad (2)$$

και αφού ζητάμε το πλάτος Α, θα χρησιμοποιήσουμε τη γενική σχέση (1) στη μορφή:

$$E_{ολ} = 0 + U_{max} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}mυ_{max}^2 = 0 + \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{mυ_{max}^2}{D}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{D}}\,υ_{max} \Rightarrow$$

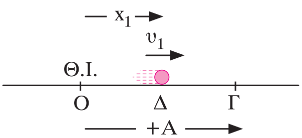
$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{100}} \cdot 4\ m \Rightarrow A = 0{,}4\ m$$

Μάθε να υπολογίζεις την περίοδο Τ εφαρμόζοντας Α.Δ.Ε.Τ.!

1.93 **Σώμα μάζας $m = 1\ kg$ εκτελεί Α.Α.Τ. πλάτους $A = 0{,}4\sqrt{2}\ m$. Δίνεται ότι, όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $x_1 = 0{,}4\ m$, έχει ταχύτητα $υ_1 = 4\ \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε:**

α. Την περίοδο Τ της Α.Α.Τ.

β. Τη μέγιστη ταχύτητά της $υ_{max}$.



λύση

α. Η περίοδος δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (1)$$

Θα πρέπει από τα στοιχεία της εκφώνησης να υπολογίσουμε τη σταθερά επαναφοράς D. Με βάση το διπλανό σχόλιο, θα χρησιμοποιήσουμε την Α.Δ.Ε.Τ. για τη θέση με $x_1 = 0{,}4$ m και $\upsilon_1 = 4\ \frac{m}{s}$. Έχουμε:

$$E_{o\lambda} = K + U \qquad (2)$$

Αλλά $E_{o\lambda} = \frac{1}{2}DA^2$, $K = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2$ και $U = \frac{1}{2}Dx_1^2$. Αντικαθιστώντας στη σχέση (2), προκύπτει:

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2$$

σχέση στην οποία ο μόνος άγνωστος είναι η σταθερά επαναφοράς D. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{1}{2}D\cdot(0{,}4\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4^2 + \frac{1}{2}D\cdot 0{,}4^2 \Rightarrow D = 100\ \frac{N}{m}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} \Rightarrow T = 0{,}2\pi\ s$$

β. $$\upsilon_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{D}{m}}A \Rightarrow \upsilon_{max} = \sqrt{\frac{100}{1}}\cdot 0{,}4\sqrt{2}\ \frac{m}{s} \Rightarrow$$

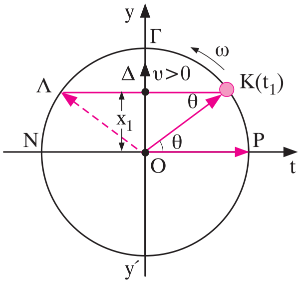
$$\Rightarrow \upsilon_{max} = 4\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$$

Χρήση της Α.Δ.Ε.Τ. αν γνωρίζουμε τα $E_{o\lambda}$, x και υ

Πολλές φορές, αν και γνωρίζουμε τις τιμές των $E_{o\lambda}$, x και υ, χρησιμοποιούμε τη σχέση της Α.Δ.Ε.Τ., $E_{o\lambda} = K + U \Rightarrow$ $\Rightarrow E_{o\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2$, για να υπολογίσουμε άλλο άγνωστο μέγεθος της Α.Α.Τ. Συνήθως με αυτόν τον τρόπο υπολογίζουμε τη σταθερά επαναφοράς D ή τη μάζα m.

1.94 **Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με περίοδο Τ. Κάποια στιγμή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση ($\upsilon > 0$). Ύστερα από πόσο χρόνο ο ταλαντωτής θα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x_1 = +\frac{A\sqrt{3}}{2}$ με $\upsilon > 0$;**

Υπολογισμός της χρονικής διάρκειας εκτέλεσης τμήματος μιας Α.Α.Τ.



Λύση

Θα απαντήσουμε με τη βοήθεια του στρεφόμενου διανύσματος.

- Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο ταλαντωτής βρισκόταν στη θέση O του άξονα των y (άξονα ταλάντωσης) κινούμενος προς τα πάνω. Το περιστρεφόμενο διάνυσμα αυτής της ταλάντωσης βρισκόταν στη θέση OP.
- Τοποθετούμε πάνω στον άξονα ταλάντωσης yy' ένα σημείο Δ το οποίο απέχει από το κέντρο O απόσταση $x_1 = \dfrac{A\sqrt{3}}{2}$, όπου το πλάτος A είναι ίσο με την ακτίνα OΓ. $\left(\text{Επειδή } \dfrac{A\sqrt{3}}{2} = \dfrac{A}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ και } \sqrt{3} > 1, \text{ το Δ το παίρνουμε με το μάτι πάνω από τη μέση της ακτίνας ΟΓ.}\right)$
- Από το σημείο Δ φέρνουμε χορδή παράλληλη στην οριζόντια διάμετρο NP, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία K και Λ.

  Όταν ο ταλαντωτής βρίσκεται στο σημείο Δ του άξονα yy' ανεβαίνοντας, το περιστρεφόμενο διάνυσμα θα βρίσκεται στη θέση OK. (Αν ο ταλαντωτής βρισκόταν στο Δ κατεβαίνοντας, το περιστρεφόμενο διάνυσμα θα βρισκόταν στη θέση OΛ.)
- Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ως τη στιγμή t_1 που ο ταλαντωτής διέρχεται από τη θέση Δ με $x_1 = +\dfrac{A\sqrt{3}}{2}$ ανεβαίνοντας, το περιστρεφόμενο διάνυσμα έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία $\widehat{POK} = \hat{\theta}$.
- *Υπολογισμός της γωνίας θ*

  Η γωνία θ μεταφέρεται και στο τρίγωνο ΚΔΟ ως εντός εναλλάξ.

  Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΟ έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{\Delta O}{OK} \xrightarrow[OK = R = A]{\Delta O = x_1} \eta\mu\theta = \frac{x_1}{A} \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\frac{A\sqrt{3}}{2}}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

- *Υπολογισμός του χρόνου t_1*

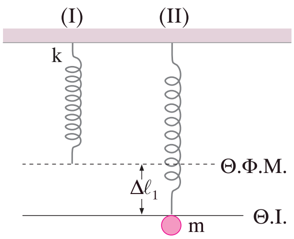
  Το περιστρεφόμενο διάνυσμα διανύει τόξο $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad σε χρόνο t_1. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τόξο } 2\pi \text{ rad διαγράφεται σε χρόνο } T \\ \text{Τόξο } \frac{\pi}{3} \text{ rad διαγράφεται σε χρόνο } t_1\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{T} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} \Rightarrow t_1 = T \cdot \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{1}} \Rightarrow t_1 = T \cdot \frac{\pi}{6\pi} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6} \text{ s}$$

1.95 **Κατακόρυφο (ιδανικό) ελατήριο σταθεράς k είναι ακλόνητα στερεωμένο στην οροφή. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου έχουμε δέσει ένα σώμα μάζας m. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατακόρυφα προς τα κάτω και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο.**

Α.Α.Τ. και κατακόρυφο ελατήριο.



α. **Να αποδείξετε ότι από τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο και μετά το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.**

β. **Να προσδιορίσετε την περίοδο T αυτής της Α.Α.Τ.**

Θέση ισορροπίας ταλάντωσης

Το σημείο γύρω από το οποίο ταλαντώνεται αρμονικά ένα μηχανικό σύστημα είναι πάντοτε η θέση στην οποία ισορροπούσε ή μπορεί να ισορροπήσει αυτό το μηχανικό σύστημα.

Σχόλιο

ΠΡΟΣΕΞΤΕ και αυτό:

- Στη σχέση $F_{ελ} = k\Delta\ell$ την παραμόρφωση $\Delta\ell$ τη μετράμε από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.
- Στη σχέση $\Sigma F = F_{επαν} = -Dx$ την απομάκρυνση x τη μετράμε από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

Π.χ. στο στιγμιότυπο (III) του σχήματος:

- $F_{ελατ} = k\Delta\ell = k(\Delta\ell_1 + x)$

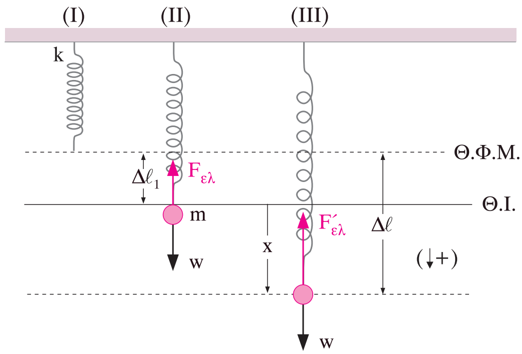
ενώ:

- $\Sigma F = F_{επαν} = -kx$.

Επιλογή θετικής φοράς κατά τη δυναμική μελέτη Α.Α.Τ.

Κατά τη δυναμική μελέτη μιας Α.Α.Τ. καθορίζουμε ως θετική φορά τη φορά προς τα εκεί που έχει γίνει η εκτροπή. Δηλαδή επιλέγουμε ως θετική τη φορά από τη Θ.Ι. (και κέντρο της ταλάντωσης) προς την τυχαία θέση που εκτρέψαμε το σώμα.

Λύση



α. Για να αποδείξουμε ότι το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση, πρέπει να αποδείξουμε ότι σε μια **τυχαία** θέση της κίνησής του η συνισταμένη δύναμη που δέχεται (το σώμα) είναι ανάλογη με την απομάκρυνση και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Πρέπει δηλαδή να αποδείξουμε ότι σε μια τυχαία απομάκρυνση x από τη Θ.Ι. η συνισταμένη δύναμη ικανοποιεί τη συνθήκη $\Sigma F = -Dx$.

Εργαζόμαστε ως εξής:

i) Εξετάζουμε το σώμα στην αρχική θέση ισορροπίας του. Σημειώνουμε στο σχήμα τις δυνάμεις που δέχεται και, αφού ισορροπεί, εφαρμόζουμε τη δυναμική συνθήκη $\Sigma\vec{F} = 0$. Στη θέση αυτή [θέση (II) στο σχήμα] το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell_1$ και δέχεται τη δύναμη $F_{ελ} = k\Delta\ell_1$ και το βάρος του $\vec{w}$. Ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Rightarrow w - F_{ελ} = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_1 = 0 \qquad (1)$$

ii) Εξετάζουμε το σώμα στη θέση που το έχουμε απομακρύνει κατά τυχαίο x από τη θέση ισορροπίας του [θέση (III) στο σχήμα]. Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα στη θέση (III) είναι η $F'_{ελ} = k\Delta\ell \xrightarrow{\Delta\ell=(\Delta\ell_1+x)} F'_{ελ} = k(\Delta\ell_1 + x)$ και το βάρος $w = mg$. Η συνισταμένη δύναμη $\Sigma\vec{F}$ θα είναι:

$$\Sigma F = w - F'_{ελ}$$

(δείτε δίπλα το σχόλιο για τον καθορισμό της θετικής φοράς). Έχουμε λοιπόν:

$$\Sigma F = w - F'_{\varepsilon\lambda} = mg - k(\Delta\ell_1 + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F = mg - k\Delta\ell_1 - kx \overset{(1)}{\Longrightarrow} \Sigma F = -kx$$

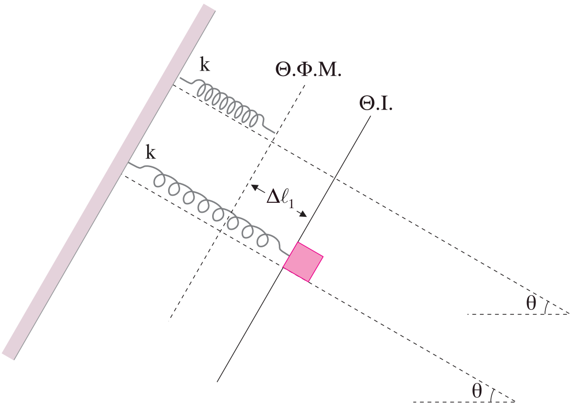
Η συνισταμένη δύναμη στην τυχαία θέση είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με $D = k$.

β. Η περίοδος της Α.Α.Τ. δίνεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \xrightarrow{D=k} T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

1.96 **Το (ιδανικό) ελατήριο του σχήματος σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$ είναι ακλόνητα στερεωμένο. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου έχουμε δέσει ένα σώμα μάζας $m = 4$ kg. Το σώμα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\theta = 30°$ και αρχικά ισορροπεί ακίνητο. Εκτρέπουμε το σώμα προς τα κάτω κατά $d = 0{,}4$ m κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και στη συνέχεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα.**

Α.Α.Τ. και πλάγιο ελατήριο. Ρυθμοί μεταβολής.



α. **Να αποδείξετε ότι η κίνηση που θα κάνει το σώμα είναι απλή αρμονική ταλάντωση.**

β. **Να υπολογίσετε την περίοδο T και την κυκλική συχνότητα ω αυτής της Α.Α.Τ.**

γ. **Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.**

δ. **Να υπολογίσετε ύστερα από πόσο χρόνο από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο το σώμα θα περάσει από τη θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά.**

ε. **Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ s που ξεκινάει η Α.Α.Τ.**

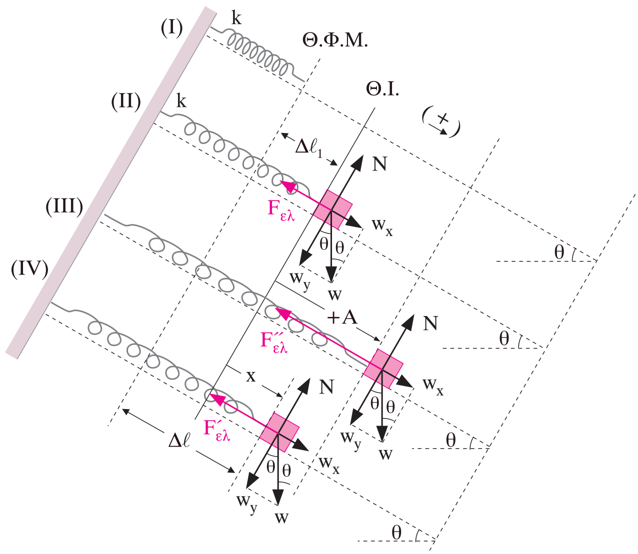
στ. **Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος $\left(\frac{dK}{dt}\right)$ τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ.) του ελατηρίου για πρώτη φορά.**

ζ. **Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης $\left(\frac{dU}{dt}\right)$ τη στιγμή αυτή.**

Δίνεται ότι $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

λύση

α. Για να αποδείξουμε ότι το σώμα κάνει Α.Α.Τ., θα το θεωρήσουμε σε μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x και θα αποδείξουμε ότι η συνισταμένη δύναμη που δέχεται σε αυτήν τη θέση είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$.



- Εξετάζουμε πρώτα το σώμα στη θέση ισορροπίας [θέση (ΙΙ) στο σχήμα]. Αφού το σώμα ισορροπεί, έχουμε:

$$\Sigma F_{ολ} = 0 \begin{cases} \Sigma F_x = 0 & (1) \\ \Sigma F_y = 0 & (2) \end{cases}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow w_y = N \qquad (2')$$

(δηλαδή οι δυνάμεις $\vec{w}_y$ και $\vec{N}$ αλληλοεξουδετερώνονται.)

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 \Rightarrow w_x - F_{ελ} = 0 \Rightarrow w_x - k\Delta\ell_1 = 0 \qquad (1')$$

Σχόλιο
Να δείτε με προσοχή το σχήμα!

- Εξετάζουμε στη συνέχεια το σώμα στην τυχαία θέση με απομάκρυνση x [θέση (IV) στο σχήμα]. Οι δυνάμεις $\vec{w}_y$ και $\vec{N}$ και πάλι αλληλοεξουδετερώνονται. Επομένως η συνισταμένη δύναμη $\Sigma\vec{F}$ θα έχει τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου και θα είναι:

$$\Sigma F = w_x - F'_{ελ} \Rightarrow \Sigma F = w_x - k\Delta\ell \xRightarrow{\Delta\ell=(\Delta\ell_1+x)}$$
$$\Rightarrow \Sigma F = w_x - k(\Delta\ell_1 + x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Sigma F = w_x - k\Delta\ell_1 - kx \xRightarrow{(1')} \Sigma F = -kx$$

Η συνισταμένη δύναμη στην τυχαία θέση είναι της μορφής $\Sigma F = -Dx$. Η κίνηση που θα κάνει το σώμα λοιπόν, μόλις το αφήσουμε ελεύθερο, είναι απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$.

β.
- Από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{D}}$ και αφού $D = k$, έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{4}{100}}\ s \Rightarrow T = 0{,}4\pi\ s$$

- Ακόμα, $\omega = \sqrt{\dfrac{D}{m}} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 5\ \dfrac{rad}{s}$.

γ. Οι σχέσεις $x = f(t)$, $\upsilon = f(t)$ και $\alpha = f(t)$ έχουν γενική μορφή:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \qquad (3)$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \qquad (4)$$

$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \qquad (5)$$

Υπολογίσαμε ήδη ότι $\omega = 5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Θα υπολογίσουμε το πλάτος A και την αρχική φάση φ_0 της Α.Α.Τ.

- *Πλάτος A*

  Εκτρέψαμε το σώμα προς τα κάτω κατά $d = 0{,}4$ m κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αφήσαμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα. Αυτή η θέση εκτροπής λοιπόν είναι **ακραία θέση**, οπότε:

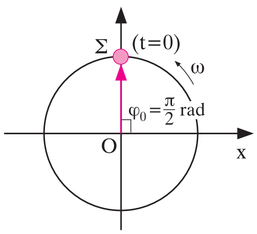
  $$A = d, \ \text{δηλαδή}\ A = 0{,}4\ \text{m}$$

  (Δείτε και το παράδειγμα 1.90.)

- *Αρχική φάση φ_0*

  Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο ταλαντωτής βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $x = +A$. Στον κύκλο αναφοράς λοιπόν το περιστρεφόμενο διάνυσμα της Α.Α.Τ. βρίσκεται στη θέση ΟΣ. Άρα έχουμε:

  $$\varphi_0 = \widehat{x O \Sigma} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$



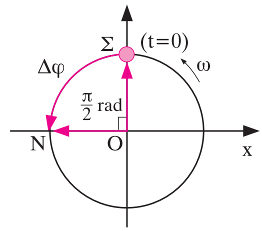
Επομένως οι εξισώσεις (3), (4) και (5) γίνονται:

- $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0{,}4\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)
- $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = 5 \cdot 0{,}4\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

  $\Rightarrow \upsilon = 2\sigma\upsilon\nu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)
- $\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -5^2 \cdot 0{,}4\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

  $\Rightarrow \alpha = -10\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$ (S.I.)

δ. Το σώμα ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$ από τη θέση $x = +A$ και κινείται προς την αρνητική φορά. Όταν ο ταλαντωτής φτάνει για πρώτη φορά στη θέση με $x = 0$ (με αρνητική ταχύτητα), το περιστρεφόμενο διάνυσμα θα έχει διαγράψει στον κύκλο αναφοράς τη γωνία $\Sigma O N = \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad. Το χρονικό διάστημα Δt θα το υπολογίσουμε ως εξής:



$$\left.\begin{array}{l}\text{Τόξο } 2\pi \text{ rad διαγράφεται σε χρόνο } T \\ \text{Τόξο } \frac{\pi}{2} \text{ rad διαγράφεται σε χρόνο } \Delta t\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} \Rightarrow \Delta t = T \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$$

και αφού $T = 0{,}4\pi$ s, έχουμε:

$$\Delta t = 0{,}1\pi \text{ s}$$

ε. Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη. (Δείτε και το διπλανό σχόλιο.) Επομένως:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=0} = \Sigma F_{t=0} \qquad (6)$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε την τιμή της συνισταμένης δύναμης τη χρονική στιγμή $t = 0$.
Δείτε ξανά το στιγμιότυπο (ΙΙΙ) στο σχήμα. Απεικονίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ της έναρξης της Α.Α.Τ. Οι δυνάμεις $\vec{w}_y$ και $\vec{N}$ αλληλοεξουδετερώνονται (αφού έτσι κι αλλιώς $\Sigma F_y = 0$). Έτσι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα σε αυτή τη θέση είναι:

$$\Sigma F_{t=0} = w_x - F''_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Sigma F_{t=0} = mg\eta\mu\theta - k(A + \Delta\ell_1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Sigma F_{t=0} = 4 \cdot 10 \cdot 0{,}5 - 100(0{,}4 + 0{,}2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Sigma F_{t=0} = 20 - 60 \text{ N} \Rightarrow \Sigma F_{t=0} = -40 \text{ N}$$

Ρυθμός μεταβολής της ορμής $\frac{d\vec{p}}{dt}$

Σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη δύναμη. Δηλαδή:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma\vec{F}$$

Υπολογισμός του $\Delta\ell_1$
Από τη σχέση (1′) έχουμε:
$$\Delta\ell_1 = \frac{mg\eta\mu\theta}{k} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 0{,}5}{100} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0{,}2 \text{ m.}$$

Ερμηνεία του αρνητικού προσήμου στον $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=0}$

Καθώς το σώμα κινείται από τη θέση με $x = +A$ προς τη θέση με $x = 0$, αυξάνεται το μέτρο της ταχύτητάς του. Επειδή όμως η κίνηση είναι κατά την αρνητική φορά, αλγεβρικά θεωρούμε ότι η ταχύτητα ελαττώνεται, άρα και η ορμή. Γι' αυτό τον λόγο, ο ρυθμός μεταβολής της προκύπτει αρνητικός.

Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\frac{dK}{dt}$

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. γνωρίζουμε ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔΚ ενός σώματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που δρουν στο σώμα ή ισοδύναμα με το έργο της συνισταμένης δύναμης $W_{\Sigma F}$. Δηλαδή $\Delta K = W_{\Sigma F}$. Έτσι, για μια πολύ μικρή (απειροστή) χρονική διάρκεια dt θα έχουμε:

$$dK = W_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{W_{\Sigma F}}{dt} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \xRightarrow{\frac{dx}{dt} = \upsilon}$$
$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \qquad (A)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός σώματος κάποια στιγμή ισούται με το γινόμενο της συνισταμένης δύναμης επί την ταχύτητά του τη στιγμή αυτή.

Από τη σχέση (6) λοιπόν έχουμε:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=0} = \Sigma F_{t=0} = -40\ \text{N}$$

[και κατά μέτρο $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=0} = 40$ N].

στ. Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο, τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ταλαντευόμενου σώματος γενικά θα τον υπολογίσουμε ως εξής:
Από το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε ότι:

$$\Delta K = W_{\Sigma F}$$

Για μία πάρα πολύ μικρή (απειροστή) χρονική διάρκεια dt θα έχουμε:

$$dK = W_{\Sigma F} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx}{dt} \xRightarrow{\frac{dx}{dt}=\upsilon} \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon \qquad (7)$$

Για να βρούμε λοιπόν τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του ταλαντωτή τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου, πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της δύναμης $\Sigma\vec{F}$ και της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τη στιγμή αυτή.

- *Υπολογισμός της ΣF στη Θ.Φ.Μ.*
  Στη θέση φυσικού μήκους η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $\Delta\ell = 0$, οπότε και το μέτρο της δύναμης από το ελατήριο θα είναι:
  $$F_{\varepsilon\lambda} = k\Delta\ell = 0$$
  Επειδή $\vec{w}_y$ και $\vec{N}$ αλληλοεξουδετερώνονται, στη Θ.Φ.Μ.:
  $$\Sigma F = w_x = mg\eta\mu\theta \Rightarrow \Sigma F = 20\ \text{N}$$
- *Υπολογισμός της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ στη Θ.Φ.Μ.*
  Όταν ο ταλαντωτής διέρχεται από τη Θ.Φ.Μ., η απομάκρυνσή του έχει μέτρο $x_1 = \Delta\ell_1 = 0{,}2$ m. Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε.Τ. για το πέρασμα του ταλαντωτή από τη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου:

$$E_{ολ} = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mυ^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mυ^2 = kA^2 - kx_1^2 \Rightarrow υ^2 = \frac{k(A^2 - x_1^2)}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ = \pm\sqrt{\frac{k(A^2 - x_1^2)}{m}} \Rightarrow υ = \pm\sqrt{3}\ \frac{m}{s}$$

Όμως την πρώτη φορά που περνάει το σώμα από τη Θ.Φ.Μ. κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, γι' αυτό και θα επιλέξουμε τελικά το πρόσημο –. Άρα $υ = -\sqrt{3}\ \frac{m}{s}$.

Αντικαθιστώντας τέλος στη σχέση (7) έχουμε:

$$\frac{dK}{dt} = ΣF \cdot υ = 20\ N \cdot \left(-\sqrt{3}\ \frac{m}{s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = -20\sqrt{3}\ \frac{J}{s}$$

(Αφού σκεφτείτε ανάλογα με τον ρυθμό $\frac{dp}{dt}$, προσπαθήστε να ερμηνεύσετε το πρόσημο – στον ρυθμό μεταβολής $\frac{dK}{dt}$.)

ζ. Έχουμε ότι:

$$K + U = E_{ολ} \Rightarrow \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dE_{ολ}}{dt}$$

Αφού όμως $E_{ολ}$ = σταθερή, είναι $dE_{ολ} = 0$, οπότε:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = 20\sqrt{3}\ \frac{J}{s}$$

(Δείτε και το διπλανό σχόλιο-«κλειδί».)

Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης $\frac{dU}{dt}$

Από την Α.Δ.Ε.Τ. έχουμε ότι: $K + U = E_{ολ}$. Επομένως:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dE_{ολ}}{dt}$$

Αφού όμως η $E_{ολ}$ = σταθερή, είναι $dE_{ολ} = 0$, οπότε:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$$

άρα:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας στην Α.Α.Τ. είναι **αντίθετος** του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας και αντίστροφα.

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

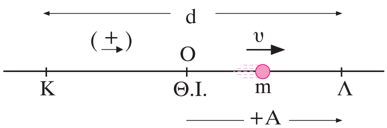
1.97 Σώμα μάζας $m = 2\ kg$ εκτελεί Α.Α.Τ. μεταξύ δύο σημείων Γ και Δ (ακραίες θέσεις) που απέχουν απόσταση $d = 1{,}2\ m$. Η σταθερά επαναφοράς αυτής της Α.Α.Τ. είναι $D = 100\ \frac{N}{m}$. Να υπολογίσετε:

α. Το πλάτος A αυτής της Α.Α.Τ.

β. Την περίοδό της T.

γ. Τη μέση ταχύτητα $υ_μ$ καθώς το σώμα κινείται από το κέντρο της ταλάντωσης προς τη θέση με $x = +A$.

1.98 Το σώμα μάζας $m = 1\ kg$ του σχήματος εκτελεί Α.Α.Τ. μεταξύ των σημείων K και Λ (ακραίες θέσεις) με σταθερά επαναφοράς $D = 100\ \frac{N}{m}$.



α. Να υπολογίσετε την περίοδο T και την κυκλική συχνότητα ω αυτής της Α.Α.Τ.

β. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο ταλαντωτής βρίσκεται στο κέντρο ταλάντωσης O και κινείται προς το Λ ($υ > 0$), να υπολογίσετε τη φάση $φ_1$ της Α.Α.Τ. τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}025π\ s$.

γ. Να παραστήσετε γραφικά τη στιγμιαία φάση της Α.Α.Τ. σε συνάρτηση με τον χρόνο. Ποιο μέγεθος εκφράζει η κλίση αυτού του διαγράμματος;

δ. Δίνεται ότι η μέση ταχύτητα του ταλαντωτή κατά τη διάρκεια της κίνησής του από το κέντρο ταλάντωσης O ως την ακραία θέση Λ έχει μέτρο $υ_μ = \frac{8}{π}\ \frac{m}{s}$. Με βάση (και) αυτό, να υπολογίσετε την απόσταση $d = (ΚΛ)$.

1.99 Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Η απομάκρυνση x αυτής της Α.Α.Τ. σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την εξίσωση $x = 8ημ\left(628t + \frac{π}{3}\right)$ (το t σε s, το x σε cm). Με βάση αυτή την εξίσωση, να υπολογίσετε:

α. Το πλάτος A, την κυκλική συχνότητα ω και την αρχική φάση $φ_0$ της Α.Α.Τ.

β. Τη μέγιστη ταχύτητα $υ_{max}$ αυτής της ταλάντωσης.

1.100 Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Η ταχύτητα υ αυτής της Α.Α.Τ. σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από την εξίσωση $υ = 2συν\left(10t + \frac{π}{4}\right)$ (S.I.). Με βάση αυτή την εξίσωση, να υπολογίσετε:

α. Την κυκλική συχνότητα ω και την αρχική φάση $φ_0$ της Α.Α.Τ.

β. Το πλάτος της A.

γ. Να «κατασκευάσετε» τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

1.101 Οι ταλαντωτές Γ και Δ εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις και βρίσκονται σε φάση. Τη χρονική στιγμή t_1 η απομάκρυνση του ταλαντωτή Γ είναι $x_{\Gamma_1} = -A_\Gamma$, όπου A_Γ είναι το πλάτος της Α.Α.Τ. που εκτελεί ο ταλαντωτής Γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_{Δ_1} του ταλαντωτή Δ τη στιγμή αυτή.

1.102 Οι ταλαντωτές Γ και Δ εκτελούν απλές αρμονικές ταλαντώσεις και βρίσκονται σε συμφωνία φάσης. Τη χρονική στιγμή t_1 η επιτάχυνση του ταλαντωτή Γ έχει τιμή $\alpha_{\Gamma_1} = -\alpha_{max_\Gamma}$, όπου α_{max_Γ} είναι η μέγιστη επιτάχυνση της Α.Α.Τ. που εκτελεί ο ταλαντωτής Γ.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_{Δ_1} του ταλαντωτή Δ τη στιγμή αυτή.

β. Τη χρονική στιγμή t_2 η φάση της απομάκρυνσης του ταλαντωτή Γ είναι $\varphi_{\Gamma_2} = \frac{2\pi}{3}$ rad. Αν ο ταλαντωτής Δ προηγείται σε φάση από τον ταλαντωτή Γ, ποια εξίσωση θα δίνει τη φάση της απομάκρυνσης του ταλαντωτή Δ τη στιγμή αυτή;

1.103 Δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις έχουν την ίδια περίοδο $T = 0{,}4$ s. Οι ταλαντώσεις αυτές όμως παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad.

α. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}5$ s ο ταλαντωτής που προηγείται φτάνει στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης ($x = +A$). Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που θα φτάσει στη μέγιστη θετική απομάκρυνση και ο ταλαντωτής που ακολουθεί.

β. Μπορείτε με βάση τα στοιχεία που σας δόθηκαν να υπολογίσετε τις αρχικές φάσεις φ_{0_1} και φ_{0_2} των δύο ταλαντωτών;

1.104 Απομακρύνουμε ένα σώμα μάζας $m = 4$ kg από τη θέση ισορροπίας του κατά $d = 0{,}6$ m και στη συνέχεια, αφού το αφήσουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα, εκτελεί Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = 100\ \frac{N}{m}$. Τριβές δεν υπάρχουν. Να υπολογίσετε:

α. Το πλάτος Α αυτής της Α.Α.Τ.

β. Τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} του ταλαντωτή.

γ. Το έργο $W_{F_{εξ}}$ της εξωτερικής δύναμης με την οποία απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του.

1.105 Απομακρύνουμε ένα σώμα μάζας $m = 2$ kg από τη θέση ισορροπίας του κατά $d = 0{,}2$ m και στη συνέχεια, αφού το αφήσουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα, εκτελεί Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = 200\ \frac{N}{m}$. Να υπολογίσετε:

α. Το πλάτος Α αυτής της Α.Α.Τ.

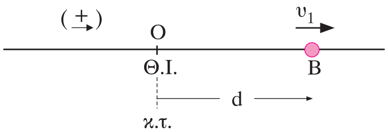
β. Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης α_{max} του ταλαντωτή.

γ. Την αρχική φάση φ_0 αυτής της Α.Α.Τ.

δ. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή $t = 0$ που το αφήσαμε ελεύθερο θα περάσει ο ταλαντωτής από το κέντρο της ταλάντωσής του για πρώτη φορά.

ε. Να «κατασκευάσετε» την εξίσωση της συνισταμένης δύναμης που δέχεται αυτός ο ταλαντωτής σε συνάρτηση με τον χρόνο.

1.106 Ένα σώμα μάζας $m = 2$ kg, που αν διεγερθεί κατάλληλα μπορεί να εκτελέσει Α.Α.Τ., βρίσκεται αρχικά ακίνητο στη θέση ισορροπίας του Ο.

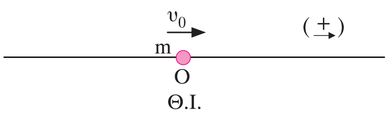


Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά $d = 0{,}4$ m και στη νέα θέση Β που έρχεται (δείτε το σχήμα) το σπρώχνουμε δίνοντάς του την ταχύτητα $\upsilon_1 = 4\ \frac{m}{s}$ με φορά προς τα δεξιά. Η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα στη συνέχεια είναι Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = 100\ \frac{N}{m}$. Να υπολογίσετε:

α. Το πλάτος Α της Α.Α.Τ.

β. Το μέτρο της μέγιστης δύναμης F_{max} που δέχεται το σώμα.

1.107 Το σώμα μάζας $m = 2$ kg του σχήματος ισορροπεί στη θέση Ο. Κάποια στιγμή ασκούμε στο σώμα την κατάλληλη ώθηση ώστε να αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\ \frac{m}{s}$ με την οποία αρχίζει να εκτελεί Α.Α.Τ. σταθεράς επαναφοράς $D = 200\ \frac{N}{m}$.

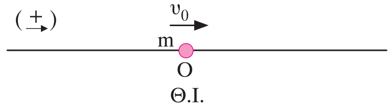


Να υπολογίσετε:

α. Τη μέγιστη ταχύτητα υ_{max} αυτής της Α.Α.Τ.

β. Το πλάτος ταλάντωσης Α.

1.108 Το σώμα του σχήματος έχει μάζα $m = 1$ kg και ισορροπεί στη θέση Ο. Κάποια στιγμή ασκούμε στο σώμα την κατάλληλη ώθηση ώστε να αποκτήσει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ με φορά προς τα δεξιά (δείτε και το σχήμα). Με την ταχύτητα αυτή το σώμα αρχίζει να εκτελεί Α.Α.Τ. σταθεράς επαναφοράς $D = 100\ \frac{N}{m}$ και πλάτους $A = 0{,}4$ m.



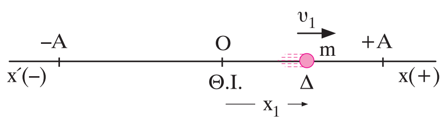
Να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$.

β. Ύστερα από πόσο χρόνο το σώμα θα περάσει ξανά από το σημείο Ο για πρώτη φορά.

γ. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $x = 0{,}2$ m.

1.109 Σώμα μάζας $m = 2$ kg εκτελεί Α.Α.Τ. πλάτους $A = 0{,}2\sqrt{2}$ m. Δίνεται ότι, όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $x_1 = 0{,}2$ m, έχει ταχύτητα $\upsilon_1 = 2\ \frac{m}{s}$.



Να υπολογίσετε:

α. Την περίοδο Τ της Α.Α.Τ.

β. Τη μέγιστη ταχύτητά της υ_{max}.

1.110 Σώμα μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. πλάτους $A = 0{,}2\ \text{m}$ και σταθεράς επαναφοράς $D = 800\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$. Αν η μέγιστη ταχύτητα της Α.Α.Τ. είναι $\upsilon_{max} = 4\pi\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$, να υπολογίσετε:

α. Την περίοδο T της Α.Α.Τ.

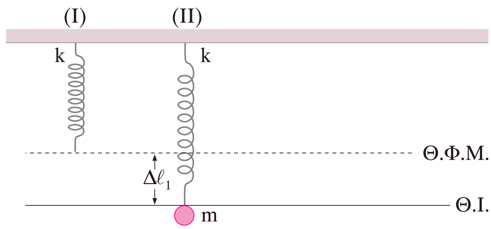
β. Τη μάζα m του σώματος ($\pi^2 \simeq 10$).

1.111 Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με περίοδο T. Κάποια στιγμή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση ($\upsilon > 0$). Ύστερα από πόσο χρόνο ο ταλαντωτής θα διέρχεται από τη θέση $x_1 = +\dfrac{A\sqrt{2}}{2}$ με $\upsilon > 0$ για πρώτη φορά;

1.112 Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με περίοδο T. Κάποια χρονική στιγμή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση ($\upsilon < 0$). Ύστερα από πόσο χρόνο ο ταλαντωτής θα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = -\dfrac{A}{2}$ με $\upsilon > 0$;

1.113 Σώμα μάζας $m = 1\ \text{kg}$ εκτελεί Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς $D = 100\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$. Κάποια στιγμή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας ($x = 0$) κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση ($\upsilon > 0$). Ύστερα από πόσο χρόνο ο ταλαντωτής θα διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση $x = +\dfrac{A}{2}$ με $\upsilon < 0$;

1.114 Κατακόρυφο (ιδανικό) ελατήριο σταθεράς $k = 200\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$ είναι ακλόνητα στερεωμένο στην οροφή.

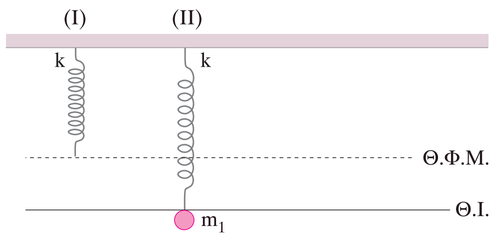


Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου έχουμε δέσει ένα σώμα μάζας $m = 2\ \text{kg}$. Εκτρέπουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατακόρυφα προς τα κάτω και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο.

α. Να αποδείξετε ότι από τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο και μετά το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Να υπολογίσετε την περίοδο T αυτής της Α.Α.Τ.

1.115 Κατακόρυφο (ιδανικό) ελατήριο σταθεράς $k = 100\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$ είναι ακλόνητα στερεωμένο στην οροφή. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου έχουμε δέσει ένα σώμα μάζας $m_1 = 2\ \text{kg}$.



Στη μάζα m_1 είναι προσαρμοσμένος ένας μικρός αβαρής γάντζος. Καθώς το σύστημα ισορροπεί, κρεμάμε χωρίς ταχύτητα στον γάντζο σώμα μάζας $m_2 = 2$ kg.

α. Να αποδείξετε ότι από τη στιγμή που θα το αφήσουμε ελεύθερο και μετά το σύστημα των μαζών m_1 και m_2 θα εκτελέσει Α.Α.Τ.

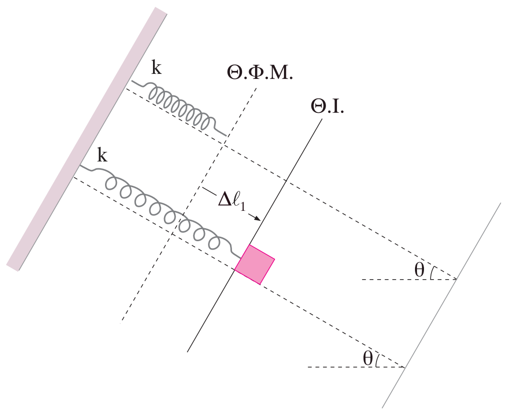
β. Να υπολογίσετε την περίοδο T αυτής της Α.Α.Τ.

γ. Να υπολογίσετε το πλάτος A της Α.Α.Τ. $\left(g = 10\ \dfrac{m}{s^2}.\right)$

δ. Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή που το αφήσαμε ελεύθερο και μετά το σύστημα των μαζών θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του;

ε. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}1\pi$ s αφότου αφήσαμε ελεύθερο το σύστημα.

1.116 Το (ιδανικό) ελατήριο του σχήματος σταθεράς $k = 900\ \dfrac{N}{m}$ είναι ακλόνητα στερωμένο.



Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου δέσαμε ένα σώμα μάζας $m = 9$ kg. Το σώμα μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\hat{\theta} = 30°$ και αρχικά ισορροπεί ακίνητο. Εκτρέπουμε το σώμα προς τα κάτω κατά $d = 0{,}2$ m κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου και στη συνέχεια τη χρονική στιγμή $t = 0$ το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα.

α. Να αποδείξετε ότι η κίνηση που θα κάνει το σώμα είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Να υπολογίσετε την περίοδο T και την κυκλική συχνότητα ω αυτής της Α.Α.Τ.

γ. Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

δ. Να υπολογίσετε ύστερα από πόσο χρόνο από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο το σώμα θα μηδενιστεί η ταχύτητά του στιγμιαία, για πρώτη φορά.

ε. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος $\left(\dfrac{dp}{dt}\right)$ τη στιγμή $t = 0$ s που ξεκινάει η Α.Α.Τ.

στ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος $\left(\dfrac{dK}{dt}\right)$, καθώς και τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης $\left(\dfrac{dU}{dt}\right)$ τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου για πρώτη φορά.

Δίνεται ότι $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$.

«Πνεύμα» Πανελληνίων

1ο-2ο ΘΕΜΑ

1.147 Υλικό σημείο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση υπό την επίδραση συνισταμένης δύναμης ΣF. Αν x είναι η απομάκρυνση του σημείου από τη θέση ισορροπίας του και D θετική σταθερά, για τη δύναμη ισχύει:

α. $\Sigma F = D$.
β. $\Sigma F = D \cdot x$.
γ. $\Sigma F = -D \cdot x$.
δ. $\Sigma F = 0$.

Εξετάσεις 2002 (Ημερήσιου Λυκείου)

1.148 Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα που αναφέρεται στην απλή αρμονική ταλάντωση και να συμπληρώσετε τα κενά με τα κατάλληλα μέτρα των φυσικών μεγεθών.

x (απομάκρυνση)	U (δυναμική ενέργεια)	K (κινητική ενέργεια)
0		
x_1	6 J	
x_2	5 J	4 J
A		

Εξετάσεις 2002 (Εσπερινού Λυκείου)

1.149 Δύο απλοί αρμονικοί ταλαντωτές A και B που εκτελούν αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις του ίδιου πλάτους έχουν σταθερές επαναφοράς D_A και D_B αντίστοιχα, με $D_A > D_B$. Ποιος έχει μεγαλύτερη ολική ενέργεια;

α. Ο ταλαντωτής A.
β. Ο ταλαντωτής B.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2002 (Αποδήμων)

1.150 Ο ωροδείκτης ενός ρολογιού έχει περίοδο σε ώρες (h).

α. 1 h.
β. 12 h.
γ. 24 h.
δ. 48 h.

Εξετάσεις 2003 (Ημερήσιου Λυκείου)

1.151 Σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση $x = A\eta\mu\omega t$, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης και ω η γωνιακή συχνότητα. Να αποδείξετε ότι η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα σε τυχαία θέση της τροχιάς του δίνεται από τη σχέση $F = -m\omega^2 x$.

Εξετάσεις 2003 (Ημερήσιου Λυκείου)

1.152 Ένα σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας:

α. η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν.
β. η επιτάχυνσή του είναι μέγιστη.
γ. η δύναμη επαναφοράς είναι μηδέν.
δ. η δυναμική του ενέργεια είναι μέγιστη.

Εξετάσεις 2003 (Εσπερινού Λυκείου)

1.153 Η σχέση που συνδέει την περίοδο (Τ) και τη συχνότητα (f) σε ένα περιοδικό φαινόμενο είναι:

α. $f^2 = T$.

β. $f \cdot T = 1$.

γ. $T^2 \cdot f = 1$.

δ. $T \cdot f^2 = 1$.

Εξετάσεις 2003 (Αποδήμων)

1.154 Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με ίσες μάζες ισορροπούν κρεμασμένα από κατακόρυφα ιδανικά ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα, που συνδέονται με τη σχέση $k_1 = \frac{k_2}{2}$. Απομακρύνουμε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 από τη θέση ισορροπίας τους κατακόρυφα προς τα κάτω κατά x και 2x αντίστοιχα και τα αφήνουμε ελεύθερα την ίδια χρονική στιγμή, οπότε εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Τα σώματα διέρχονται για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας τους:

α. ταυτόχρονα.

β. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές με πρώτο το Σ_1.

γ. σε διαφορετικές χρονικές στιγμές με πρώτο το Σ_2.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2004 (Ημερήσιου Λυκείου)

1.155 Σε μία γραμμική αρμονική ταλάντωση διπλασιάζουμε το πλάτος της. Τότε:

α. η περίοδος διπλασιάζεται.

β. η συχνότητα διαπλασιάζεται.

γ. η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή.

δ. η μέγιστη ταχύτητα διπλασιάζεται.

Εξετάσεις 2004 (Επαναληπτικές Εσπερινού Λυκείου)

1.156 Ένα σύστημα ελατηρίου - μάζας εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Αν τετραπλασιάσουμε την ολική ενέργεια της ταλάντωσης αυτού του συστήματος, τότε:

α. η συχνότητα ταλάντωσης θα διπλασιαστεί.

β. η σταθερά επαναφοράς θα τετραπλασιαστεί.

γ. το πλάτος της ταλάντωσης θα τετραπλασιαστεί.

δ. η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης θα διπλασιαστεί.

Εξετάσεις 2004 (Αποδήμων)

1.157 Σώμα μάζας Μ έχει προσδεθεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k του οποίου το άνω άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Απομακρύνουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά απόσταση α από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο να κάνει ταλάντωση. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα και με ένα άλλο ελατήριο σταθεράς $k' = 4k$.

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των δυναμικών ενεργειών των δύο ταλαντώσεων σε συνάρτηση με την απομάκρυνση στο ίδιο διάγραμμα.

Εξετάσεις 2005 (Ημερήσιου Λυκείου)

1.158 Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους Α. Η ταχύτητα του σώματος:

α. έχει την ίδια φάση με την επιτάχυνση α.

β. είναι μέγιστη στις ακραίες θέσεις.

γ. είναι μέγιστη, κατά μέτρο, στη θέση ισορροπίας.

δ. έχει πάντα αντίθετη φορά από τη δύναμη επαναφοράς.

Εξετάσεις 2005 (Αποδήμων)

1.159 Σώμα μάζας m που είναι προσδεδεμένο σε οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k, όταν απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας κατά A, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο T. Αν τετραπλασιάσουμε την απομάκρυνση A, η περίοδος της ταλάντωσης γίνεται:

α. 2T.

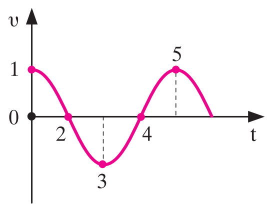
β. T.

γ. $\frac{T}{2}$.

δ. 4T.

Εξετάσεις 2005 (Εσπερινού Λυκείου)

1.160 Το διάγραμμα του σχήματος παριστάνει την ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με τον χρόνο. Στην περίπτωση αυτή:



α. στα σημεία 1 και 5 το σώμα βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση.

β. στα σημεία 2 και 4 το σώμα βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση.

γ. στα σημεία 4 και 5 το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας.

δ. στα σημεία 3 και 4 το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας.

Εξετάσεις 2006 (Εσπερινού Λυκείου)

1.161 Η συχνότητα ταλάντωσης f ενός συστήματος ελατηρίου - μάζας:

α. είναι ανεξάρτητη από τη σταθερά k του ελατηρίου.

β. είναι ανεξάρτητη από το πλάτος A της ταλάντωσης.

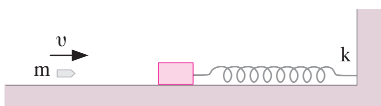
γ. εξαρτάται από την ενέργεια του ταλαντωτή.

δ. είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του ταλαντωτή.

Εξετάσεις 2006 (Αποδήμων)

3ο-4ο ΘΕΜΑ

1.162 Ακίνητο σώμα μάζας $M = 9 \cdot 10^{-2}$ kg βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι προσδεμένο στην άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 1.000\ \frac{N}{m}$. Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένη, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βλήμα μάζας $m = 1 \cdot 10^{-2}$ kg, που κινείται κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα υ, συγκρούεται με το ακίνητο σώμα μάζας M και σφηνώνεται σε αυτό. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}1$ m.



Α. Να υπολογίσετε:

α. την περίοδο T της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

β. την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

γ. την ταχύτητα υ, με την οποία το βλήμα προσκρούει στο σώμα μάζας M.

B. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης σε σχέση με τον χρόνο.

Εξετάσεις 2002 (Εσπερινού Λυκείου) (4ο θέμα)

1.163 Σώμα μάζας $m_1 = 3$ kg είναι στερεωμένο στην άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\ \frac{N}{m}$, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο T και πλάτος ταλάντωσης $A = 0{,}4$ m. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$, ένα σώμα μάζας $m_2 = 1$ kg που κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το σώμα μάζας m_1 και έχει ταχύτητα μέτρου $υ_2 = 8\ \frac{m}{s}$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με αυτό. Να υπολογίσετε:

α. την αρχική φάση της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1.

β. τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα μάζας m_1 τη στιγμή της σύγκρουσης.

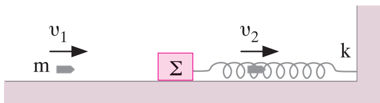
γ. την περίοδο ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ. την ενέργεια της ταλάντωσης μετά την κρούση.

Δίνονται: $ημ\frac{π}{6} = \frac{1}{2}$, $συν\frac{π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Εξετάσεις 2003 (Αποδήμων) (4ο θέμα)

1.164 Σώμα Σ μάζας $M = 0{,}1$ kg είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου και ηρεμεί. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι σταθερά συνδεμένο με κατακόρυφο τοίχο. Μεταξύ σώματος και οριζόντιου δαπέδου δεν εμφανίζονται τριβές. Βλήμα μάζας $m = 0{,}001$ kg κινούμενο κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα $υ_1 = 200\ \frac{m}{s}$ διαπερνά ακαριαία το σώμα Σ και κατά την έξοδό του η ταχύτητά του γίνεται $υ_2 = \frac{υ_1}{2}$.



Να βρεθούν:

α. Η ταχύτητα V με την οποία θα κινηθεί το σώμα Σ αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος.

β. Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου.

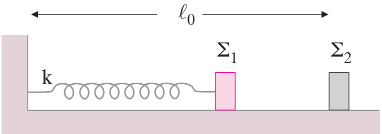
γ. Η περίοδος με την οποία ταλαντώνεται το σώμα Σ.

δ. Η ελάττωση της μηχανικής ενέργειας κατά την παραπάνω κρούση.

Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου $k = 1.000\ \frac{N}{m}$.

Εξετάσεις 2004 (Εσπερινού Λυκείου) (4ο θέμα)

1.165 Τα σώματα Σ_1 και Σ_2, αμελητέων διαστάσεων, με μάζες $m_1 = 1$ kg και $m_2 = 3$ kg αντίστοιχα, είναι τοποθετημένα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στη μία άκρη του ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ \dfrac{N}{m}$. Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένη.



Το ελατήριο με τη βοήθεια νήματος είναι συσπειρωμένο κατά 0,2 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το Σ_2 ισορροπεί στο οριζόντιο επίπεδο στη θέση που αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος ℓ_0 του ελατηρίου. Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα Σ_1 κινούμενο προς τα δεξιά συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_2. Θεωρώντας ως αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή της κρούσης και ως θετική φορά κίνησης την προς τα δεξιά, να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα του σώματος Σ_1 λίγο πριν την κρούση του με το σώμα Σ_2.

β. Τις ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμέσως μετά την κρούση.

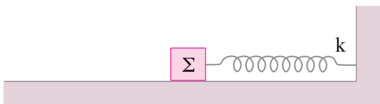
γ. Την απομάκρυνση του σώματος Σ_1, μετά την κρούση, σε συνάρτηση με τον χρόνο.

δ. Την απόσταση μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 όταν το σώμα Σ_1 ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά.

Δεχτείτε την κίνηση του σώματος Σ_1 τόσο πριν όσο και μετά την κρούση ως απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς k.
Δίνεται: $\pi = 3{,}14$.

Εξετάσεις 2006 (Ημερήσιου Λυκείου)
(3ο θέμα)

1.166 Το σώμα Σ του σχήματος είναι συνδεδεμένο στο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 900\ \dfrac{N}{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σύστημα ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο $T = \dfrac{\pi}{15}$ s. Το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με ταχύτητα $\upsilon = 6\ \dfrac{m}{s}$ κινούμενο προς τα δεξιά. Να βρείτε:



α. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.

β. Τη μάζα του σώματος.

γ. Την απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με τον χρόνο και να τη σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες για το χρονικό διάστημα από 0 έως $\dfrac{2\pi}{15}$ s.

δ. Για ποιες απομακρύνσεις ισχύει $K = 3U$, όπου K η κινητική ενέργεια και U η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Εξετάσεις 2006 (Εσπερινού Λυκείου)
(3ο θέμα)

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

2.53 **Σε ένα κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 20$ mH και ο πυκνωτής χωρητικότητα $C = 2$ μF. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο πυκνωτής είχε μέγιστο φορτίο $Q = 4$ μC.**
Να υπολογίσετε:

α. Τη μέγιστη ένταση I του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

β. Την ένταση i του ρεύματος κάποια στιγμή που το φορτίο στον πυκνωτή έχει τιμή $q = 2$ μC.

Μάθε να εφαρμόζεις την αρχή διατήρησης της ενέργειας στην ηλεκτρική ταλάντωση όταν δίνονται τα L και C.

λύση

α. Γνωρίζουμε ότι για την ολική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης ισχύει $E = U_{E_{max}} = U_{B_{max}}$. Επομένως:

$$U_{E_{max}} = U_{B_{max}} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I^2 = \frac{Q^2}{LC} \Rightarrow I = \pm\sqrt{\frac{Q^2}{LC}}$$

και κατά μέτρο:

$$I = \frac{Q}{\sqrt{LC}} \Rightarrow I = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{20 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}}\,A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-4}}\,A \Rightarrow I = 2 \cdot 10^{-2}\,A$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) για την ηλεκτρική ταλάντωση που εξετάζουμε, τη χρονική στιγμή για την οποία ο πυκνωτής έχει φορτίο $q = 2$ μC. Έχουμε:

$$E = U_E + U_B \xrightarrow{E=U_{E_{max}}} U_{E_{max}} = U_E + U_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\frac{Q^2}{C} = \cancel{\frac{1}{2}}\frac{q^2}{C} + \cancel{\frac{1}{2}}Li^2 \Rightarrow Li^2 = \frac{Q^2}{C} - \frac{q^2}{C} \Rightarrow$$

Εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ. για την ηλεκτρική ταλάντωση γνωρίζοντας τα L και C

- Όταν για μια ηλεκτρική ταλάντωση δίνεται το μέγιστο φορτίο Q ή η μέγιστη ένταση ρεύματος I, μπορούμε να βρούμε την ολική ενέργεια της ταλάντωσης από τη σχέση $E = U_{E_{max}} = U_{B_{max}}$, δηλαδή:

$$E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI^2$$

- Στη συνέχεια, γνωρίζοντας την ολική ενέργεια, από τη σχέση $E = U_E + U_B$, δηλαδή:

$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2$$

και γνωρίζοντας την τιμή του q ή του i, μπορούμε να βρούμε την τιμή του άλλου μεγέθους.

$$\Rightarrow i^2 = \frac{Q^2 - q^2}{LC} \Rightarrow i = \sqrt{\frac{Q^2 - q^2}{LC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \sqrt{\frac{(4 \cdot 10^{-6})^2 - (2 \cdot 10^{-6})^2}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}}\ \text{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-8}}}\ \text{A} \Rightarrow i = \sqrt{3} \cdot 10^{-2}\ \text{A}$$

Μάθε να εφαρμόζεις την Α.Δ.Ε.Τ. στην ηλεκτρική ταλάντωση αν αντί για τα L και C δίνεται μόνο η κυκλική συχνότητα ω.

2.54 **Ένα κύκλωμα L – C εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = 1.000\ \frac{rad}{s}$. Η μέγιστη ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι I = 0,4 A. Κάποια χρονική στιγμή το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα με ένταση i = 0,2 A. Να υπολογίσετε το φορτίο q του πυκνωτή τη στιγμή αυτή.**

Εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ. σε ηλεκτρική ταλάντωση αν αντί για τα L και C δίνεται η ω

Αν σε μια εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ. για ηλεκτρική ταλάντωση διαπιστώσετε ότι δε γνωρίζετε τις τιμές των L και C αλλά την κυκλική συχνότητα ω, να μη διστάσετε να λύσετε ως προς τον άγνωστο που υπάρχει στην Α.Δ.Ε.Τ. Στο τέλος θα προκύψει κάπου το γινόμενο LC, που σύμφωνα με τη σχέση:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

θα μπορέσετε να το αντικαταστήσετε με την κυκλική συχνότητα ω.

λύση

Εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε.Τ. για την ηλεκτρική ταλάντωση για τη χρονική στιγμή όπου το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα i = 0,2 A. Έχουμε:

$$E = U_E + U_B \xrightarrow{E = U_{B\max}} \cancel{\frac{1}{2}} LI^2 = \cancel{\frac{1}{2}}\frac{q^2}{C} + \cancel{\frac{1}{2}} Li^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{C} = LI^2 - Li^2 \Rightarrow \frac{q^2}{C} = L(I^2 - i^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = LC(I^2 - i^2) \qquad (1)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \sqrt{LC} = \frac{1}{\omega} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega^2} \qquad (2)$$

Έτσι, η σχέση (1) με τη βοήθεια της σχέσης (2) γίνεται $q^2 = \frac{1}{\omega^2}(I^2 - i^2)$ και με αντικατάσταση έχουμε:

$$q^2 = \frac{1}{(10^3)^2}(0{,}4^2 - 0{,}2^2) \Rightarrow q^2 = \frac{1}{10^6} \cdot 0{,}12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^2 = 12 \cdot 10^{-8}\ \text{C} \Rightarrow q = 2\sqrt{3} \cdot 10^{-4}\ \text{C}$$

2.55 **Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο σε μια ηλεκτρική ταλάντωση δίνεται από τη σχέση $i = -20ημωt$, όπου το t είναι σε s και το ρεύμα i σε A. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του φορτίου $\frac{dq}{dt}$ του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$ s.**

Ρυθμός μεταβολής φορτίου $\frac{dq}{dt}$ στην ηλεκτρική ταλάντωση.

λύση

Η ένταση του ρεύματος ορίζεται από τη σχέση $i = \frac{dq}{dt}$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή είναι κάθε στιγμή ίσος με την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Άρα έχουμε $\frac{dq}{dt} = i = -20ημωt$ (t σε s, i σε A). Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$ s θα είναι:

$$\frac{dq}{dt} = -20ημ\left(\frac{2π}{T}\cdot\frac{T}{6}\right) = -20ημ\frac{π}{3} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -10\sqrt{3}\ A$$

Ρυθμός μεταβολής φορτίου $\frac{dq}{dt}$ στην ηλεκτρική ταλάντωση

Η ένταση του ρεύματος ορίζεται από τη σχέση $i = \frac{dq}{dt}$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή είναι κάθε στιγμή ίσος με την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Δηλαδή:

$$\frac{dq}{dt} = i = -Iημωt$$

κάθε στιγμή.

2.56 **Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε μια ηλεκτρική ταλάντωση είναι $i = -4ημωt$ (S.I.). Ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 2\ μF$. Να υπολογίσετε:**

α. **Τον ρυθμό μεταβολής της τάσης $\frac{dV_C}{dt}$ στα άκρα του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12}$ s.**

β. **Τον ρυθμό μεταβολής της τάσης $\frac{dV_L}{dt}$ στα άκρα του πηνίου την ίδια χρονική στιγμή.**

Ρυθμός μεταβολής τάσης $\frac{dV_C}{dt}$ ή $\frac{dV_L}{dt}$ στην ηλεκτρική ταλάντωση.

λύση

α. Η τάση V_C στα άκρα του πυκνωτή δίνεται κάθε στιγμή από τη σχέση $V_C = \frac{q}{C}$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα του πυκνωτή κάθε στιγμή είναι:

Ρυθμός μεταβολής $\frac{dV_C}{dt}$ στην ηλεκτρική ταλάντωση

Η τάση V_C στα άκρα του πυκνωτή δίνεται κάθε στιγμή από τη σχέση $V_C = \frac{q}{C}$. Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι κάθε στιγμή:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\left(\frac{q}{C}\right)}{dt} = \frac{\frac{1}{C}dq}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt}$$

Αλλά $\frac{dq}{dt} = i$, οπότε τελικά:

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

Ρυθμός μεταβολής $\frac{dV_L}{dt}$ στην ηλεκτρική ταλάντωση

Στο κύκλωμα L – C κάθε χρονική στιγμή ισχύει ότι $V_L = V_C$. Επομένως και:

$$\frac{dV_L}{dt} = \frac{dV_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

κάθε στιγμή.

Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας $\frac{dU_E}{dt}$ στον πυκνωτή κάθε στιγμή.

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{d\left(\frac{q}{C}\right)}{dt} = \frac{\frac{1}{C}dq}{dt} \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{i}{C} \qquad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12}$ s η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα θα είναι:

$$i = -4\eta\mu\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} = -4\eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow i = -2\ \text{A}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε ότι:

$$\left(\frac{dV_C}{dt}\right)_{\frac{T}{12}} = \frac{-2\ \text{A}}{2 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} \Rightarrow \left(\frac{dV_C}{dt}\right)_{\frac{T}{12}} = -10^6\ \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

β. Στο κύκλωμα L – C κάθε χρονική στιγμή ισχύει ότι $V_L = V_C$.

Επομένως και $\left(\frac{dV_L}{dt}\right)_{\frac{T}{12}} = \left(\frac{dV_C}{dt}\right)_{\frac{T}{12}} = -10^6\ \frac{\text{V}}{\text{s}}$.

2.57 **Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε μια ηλεκτρική ταλάντωση είναι $i = -8\eta\mu\omega t$ (S.I.). Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή $\frac{dU_E}{dt}$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ s. Δίνεται ότι η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή τη στιγμή αυτή είναι $V_C = 4$ V.**

λύση

Γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας εκφράζει την ηλεκτρική ισχύ, η οποία με τη σειρά της ισούται με το γινόμενο της τάσης επί την ένταση. Έτσι:

$$\frac{dU_E}{dt} = P_E \Rightarrow \frac{dU_E}{dt} = V_C \cdot i \qquad (1)$$

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ s η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα θα είναι:

$$i = -8ημ\frac{2π}{T}\cdot\frac{T}{8} \Rightarrow i = -8ημ\frac{π}{4} \Rightarrow i = -4\sqrt{2}\ A$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1):

$$\left(\frac{dU_E}{dt}\right)_{\frac{T}{8}} = V_C \cdot i = 4\ V(-4\sqrt{2}\ A) \Rightarrow \left(\frac{dU_E}{dt}\right)_{\frac{T}{8}} = -16\sqrt{2}\ W$$

2.58 Για την ηλεκτρική ταλάντωση του παραδείγματος 2.57 να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου $\frac{dU_B}{dt}$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ s.

λύση

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας $U_B + U_E = E =$ σταθ. έχουμε ότι:

$$\frac{dU_B}{dt} + \frac{dU_E}{dt} = \frac{dE}{dt} \xRightarrow{\left(\frac{dE}{dt}=0\right)} \frac{dU_B}{dt} = -\frac{dU_E}{dt} \qquad (1)$$

Αλλά στο παράδειγμα 2.57 για τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ s είναι $\frac{dU_E}{dt} = -16\sqrt{2}$ W. Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$\left(\frac{dU_B}{dt}\right)_{\frac{T}{8}} = 16\sqrt{2}\ W$$

Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας $\frac{dU_E}{dt}$ στον πυκνωτή κάθε στιγμή

Ο ρυθμός μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας εκφράζει την ηλεκτρική ισχύ, η οποία με τη σειρά της ισούται με το γινόμενο της τάσης επί την ένταση. Έτσι:

$$\frac{dU_E}{dt} = P_E = V_C \cdot i$$

Δηλαδή:

$$\frac{dU_E}{dt} = V_C \cdot i$$

Ρυθμός μεταβολής της ενέργειας στο πηνίο $\frac{dU_B}{dt}$ κάθε στιγμή.

Ρυθμός μεταβολής ενέργειας $\frac{dU_B}{dt}$ στο πηνίο κάθε στιγμή

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας $U_B + U_E = E =$ σταθ. έχουμε:

$$\frac{dU_B}{dt} + \frac{dU_E}{dt} = \frac{dE}{dt} \qquad (1)$$

Αλλά αφού $E =$ σταθ., προκύπτει ότι $\frac{dE}{dt} = 0$. Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{dU_B}{dt} + \frac{dU_E}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = -\frac{dU_E}{dt} = -V_C \cdot i$$

κάθε στιγμή.

Ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος $\frac{di}{dt}$ στην ηλεκτρική ταλάντωση.

2.59 **Σε μια ηλεκτρική ταλάντωση L – C το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 4$ mH. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο πηνίο κάποια στιγμή που η (επαγωγική) τάση στα άκρα του είναι $V_L = 8$ V.**

λύση

Η Η.Ε.Δ. από αυτεπαγωγή που αναπτύσσεται στα άκρα ενός ιδανικού πηνίου όταν διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα δίνεται από τη σχέση $E_{αυτ} = V_L = -L\frac{di}{dt}$. Έτσι έχουμε:

$$V_L = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{V_L}{L}$$

και με αντικατάσταση:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{8\ \text{V}}{4\cdot 10^{-3}\ \text{H}} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -2\cdot 10^{3}\ \frac{\text{V}}{\text{H}}\ \text{ή}\ \left(\frac{\text{A}}{\text{s}}\right)$$

Ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος του πηνίου $\frac{di}{dt}$ στην ηλεκτρική ταλάντωση

Η Η.Ε.Δ από αυτεπαγωγή που αναπτύσεται στα άκρα ενός πηνίου όταν διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα δίνεται από τη σχέση $E_{αυτ} = -L\frac{di}{dt}$.

Όταν το πηνίο είναι ιδανικό, ισχύει ότι $E_{αυτ} = V_L$, οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$V_L = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{V_L}{L}$$

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

2.60 Σε ένα κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 10$ mA και ο πυκνωτής χωρητικότητα $C = 4\ \mu$F. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο πυκνωτής έχει μέγιστο φορτίο $Q = 12\ \mu$C. Να υπολογίσετε:

α. Τη μέγιστη ένταση I του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

β. Την ένταση i του ρεύματος κάποια στιγμή που το φορτίο στον πυκνωτή έχει τιμή $q = 8\ \mu$C.

2.61 Σε ένα κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 20$ mH και ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4}$ το πηνίο διαρρέεται από το μέγιστο ρεύμα έντασης $I = 2\cdot 10^{-2}$ A. Κάποια (τυχαία) χρονική στιγμή το φορτίο στον πυκνωτή είναι $q = 2\ \mu$C και η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι $i = \sqrt{3}\cdot 10^{-2}$ A. Να υπολογίσετε:

α. Τη χωρητικότητα C του πυκνωτή.
β. Το μέγιστο φορτίο Q του πυκνωτή.

2.62 Ένα κύκλωμα L – C εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = 200\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Η μέγιστη ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι $I = 4 \cdot 10^{-2}$ A. Κάποια χρονική στιγμή το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα με ένταση $i = 2 \cdot 10^{-2}$ A. Να υπολογίσετε το φορτίο q του πυκνωτή τη στιγμή αυτή.

2.63 Ένα κύκλωμα L – C εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = 400\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Κάποια χρονική στιγμή το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα $i = 0{,}1$ A και το φορτίο στον πυκνωτή είναι $q = \sqrt{3} \cdot 10^{-4}$ C. Να υπολογίσετε:
α. Το μέγιστο φορτίο Q στον πυκνωτή.
β. Τη μέγιστη ένταση ρεύματος I που διαρρέει το πηνίο.

2.64 Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο σε μια ηλεκτρική ταλάντωση δίνεται από τη σχέση $i = -10\sqrt{2}\eta\mu\omega t$ (t σε s, i σε mA). Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του φορτίου $\frac{dq}{dt}$ του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ s.

2.65 Η εξίσωση της μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή σε μια ηλεκτρική ταλάντωση είναι $q = 4 \cdot 10^{-6}\sigma\upsilon\nu 10^3 t$ (S.I.). Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του φορτίου $\frac{dq}{dt}$ του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12}$ s.

2.66 Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε μια ηλεκτρική ταλάντωση είναι $i = -2\sqrt{3}\eta\mu\omega t$ (S.I.). Ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C = 1,5 μF. Να υπολογίσετε:
α. Τον ρυθμό μεταβολής της τάσης $\frac{dV_C}{dt}$ στα άκρα του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$ s.
β. Τον ρυθμό μεταβολής της τάσης $\frac{dV_L}{dt}$ στα άκρα του πηνίου την ίδια χρονική στιγμή.

2.67 Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε μια ηλεκτρική ταλάντωση είναι $i = -6\eta\mu\omega t$ (S.I.). Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12}$ s η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι $V_C = 2$ V. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή $\frac{dU_E}{dt}$ αυτή τη χρονική στιγμή.

2.68 Η εξίσωση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε μια ηλεκτρική ταλάντωση είναι $i = -4\eta\mu 10^3 t$ (S.I.). Ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα C = 2 μF. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή $\frac{dU_E}{dt}$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$ s.

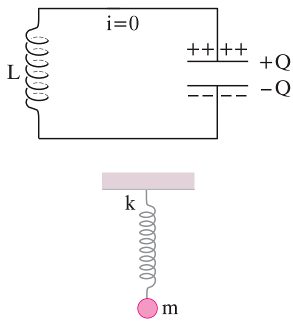
2.69 Η εξίσωση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε μια ηλεκτρική ταλάντωση είναι $i = -2\sqrt{2}ημωt$. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ s η τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι $V_C = 2$ V. Να υπολογίσετε:

α. Τον ρυθμό μεταβολής της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή $\frac{dU_E}{dt}$ αυτή τη χρονική στιγμή.

β. Τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου του πηνίου $\frac{dU_B}{dt}$ την ίδια χρονική στιγμή.

2.70 Σε μια ηλεκτρική ταλάντωση $L - C$ το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 2$ mH. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος στο πηνίο κάποια στιγμή που η (επαγωγικη) τάση στα άκρα του είναι $V_L = 6$ V.

Και άλλα λυμένα παραδείγματα σε δεύτερο επίπεδο



2.71 **Αντιστοιχία μεγεθών της Α.Α.Τ. μάζας ελατηρίου και της ηλεκτρικής ταλάντωσης $L - C$.**

Στο ηλεκτρομαγνητικό κύκλωμα $L - C$ του διπλανού σχήματος έχουμε $L = 4$ mH και $C = 2{,}5$ μF.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο T των ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων που θα εκτελέσει το κύκλωμα αν κλείσουμε τον διακόπτη.

β. Πόση πρέπει να είναι η σταθερά k ενός ελατηρίου ώστε το σύστημα ελατήριο - μάζα να έχει την ίδια ιδιοπερίοδο με το κύκλωμα $L - C$, όταν η μάζα είναι $m = 0{,}01$ kg;

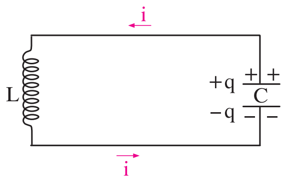
2.93 Για το κύκλωμα του προβλήματος 2.92 να υπολογίσετε την ένταση του ρεύματος που το διαρρέει τη στιγμή που το φορτίο στον πυκνωτή είναι $q = 100\ \mu C$. Να εξηγήσετε τη φυσική σημασία του διπλού προσήμου της έντασης του ρεύματος.

2.94 Ένα κύκλωμα $L - C$ εκτελεί αμείωτες ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις περιόδου T.

α. Να αποδείξετε ότι, όταν η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου είναι ίση με την ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, τότε η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι ίση με $i = \dfrac{I\sqrt{2}}{2}$.

β. Ποια χρονική στιγμή ισχύει για πρώτη φορά $U_E = U_B$;

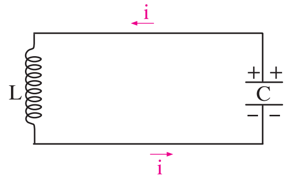
2.95 Για το κύκλωμα του σχήματος δίνεται ότι $L = 5\ mH$ και ότι η μέγιστη ένταση που το διαρρέει είναι $I = 2\ A$.



Χρονική στιγμή t.

Καθώς το κύκλωμα εκτελεί ταλαντώσεις, αυξάνουμε την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή και τότε η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος γίνεται $I' = 2\sqrt{2}\ A$. Η ωμική αντίσταση του κυκλώματος θεωρείται αμελητέα. Να υπολογίσετε το έργο W που δαπανήσαμε για να αυξήσουμε την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή.

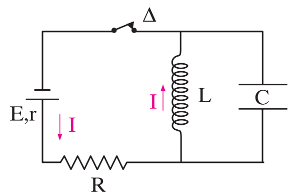
2.96 Για το κύκλωμα του σχήματος δίνεται ότι $L = 5\ mH$ και $C = 4\ \mu F$.



Χρονική στιγμή t.

Η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι $I = 2\ A$. Να υπολογίσετε πόσο είναι το φορτίο στον πυκνωτή τη στιγμή που η ένταση του ρεύματος γίνεται κατά μέτρο ίση με $i = \dfrac{I\sqrt{2}}{2}$. Θεωρήστε αμελητέα την ωμική αντίσταση του κυκλώματος.

2.97 Για το παρακάτω κύκλωμα δίνονται: $E = 20\ V$, $r = 0$, $R = 5\ \Omega$, $C = 4\ \mu F$ και το ιδανικό πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 10\ mH$. Αρχικά ο διακόπτης Δ είναι κλειστός και το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο έχει σταθεροποιηθεί. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγουμε ακαριαία τον διακόπτη Δ, οπότε το κύκλωμα $L - C$ αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις.



α. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ένταση ρεύματος I του πηνίου κατά τη διάρκεια μιας ηλεκτρικής ταλάντωσης.

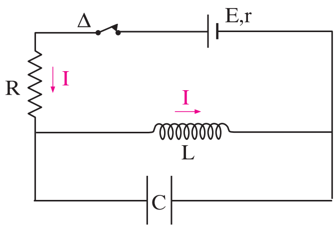
β. Να υπολογίσετε το μέγιστο φορτίο Q του πυκνωτή.

γ. Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις που δίνουν την ένταση i του ρεύματος και το φορτίο q του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο. (Θεωρήστε θετική τη φορά του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο πριν ανοίξουμε τον διακόπτη.)

δ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή $\frac{dq}{dt}$ τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$ s.

ε. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας $\frac{dU_E}{dt}$ στον πυκνωτή την ίδια χρονική στιγμή.

2.98 Για το κύκλωμα του σχήματος δίνονται: $E = 12$ V, $r = 0$, $R = 3\ \Omega$ και $L = 0{,}4$ mH.



Αρχικά ο διακόπτης Δ είναι κλειστός και το κύκλωμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα.

Α. Γνωρίζοντας ότι το πηνίο είναι ιδανικό, να εξηγήσετε γιατί με τον διακόπτη Δ κλειστό και το ρεύμα στο πηνίο σταθεροποιημένο ο πυκνωτής παραμένει αφόρτιστος.

Β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ανοίγουμε τον διακόπτη Δ, οπότε στο κύκλωμα $L - C$ ξεκινάει ηλεκτρική ταλάντωση.

i. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος στο πηνίο κατά τη διάρκεια μιας πλήρους ταλάντωσης.

ii. Ποια πρέπει να είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή ώστε η τάση στους οπλισμούς του να μην υπερβεί τα 8 V;

Γ. Έχοντας παραπάνω υπολογίσει και τη χωρητικότητα C του πυκνωτή:

i. Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις $i = f(t)$ και $q = f(t)$ γι' αυτή την ηλεκτρική ταλάντωση. (Θεωρήστε ως θετική τη φορά του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο πριν ανοίξουμε τον διακόπτη.)

ii. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής $\frac{dU_B}{dt}$ της ενέργειας του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12}$ s.

Σύμφωνα με τον ορισμό του χρόνου ημίσειας ζωής, τη χρονική στιγμή $t = \tau$ είναι $A = \dfrac{A_0}{2}$.

Άρα έχουμε:

$$A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t} \xrightarrow[A=\frac{A_0}{2}]{t=\tau} \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda\tau} \Rightarrow e^{-\Lambda\tau} = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

Έτσι, η σχέση (3) γίνεται λόγω της σχέσης (4):

$$(3) \overset{(4)}{\Longrightarrow} A_{t_2} = A_{t_1}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow A_{t_2} = \frac{A_{t_1}}{8} \Rightarrow A_{t_2} = 2\ \text{cm}$$

Λύσε και άλλες ασκήσεις σε δεύτερο επίπεδο

3.50 Δύο φθίνουσες αρμονικές ταλαντώσεις έχουν το ίδιο αρχικό πλάτος A_0 και την ίδια περίοδο T. Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t = 3T$ τα πλάτη A_1 και A_2 των δύο ταλαντώσεων συνδέονται με τη σχέση $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{16}{9}$. Να αποδείξετε ότι οι σταθερές τους Λ_1 και Λ_2 συνδέονται με τη σχέση:

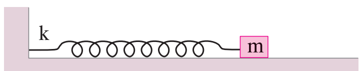
$$\Lambda_2 - \Lambda_1 = \frac{2}{3}\,\frac{\ell n4 - \ell n3}{T}$$

3.51 Ένας ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή t_1 έχει πλάτος A_1 και ενέργεια E_1. Πόσο τοις εκατό θα έχει μειωθεί η ενέργεια του ταλαντωτή τη χρονική στιγμή t_2 που το πλάτος της ταλάντωσης έχει γίνει $A_2 = \dfrac{A_1\sqrt{2}}{2}$;

3.52 Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται σε χρόνο $\Delta t = 3{,}5$ s. Σε πόσο χρόνο το πλάτος της υποτετραπλασιάζεται; (Δίνεται ότι $\ell n2 = 0{,}7$.)

3.53 Η ελάττωση του πλάτους μιας φθίνουσας μηχανικής ταλάντωσης γίνεται σύμφωνα με την εξίσωση $A_t = A_0 e^{-(\ell n8)t}$. Δίνεται ότι σε χρόνο $t = 3T$ το πλάτος της ταλάντωσης υποτετραπλασιάζεται. Να υπολογίσετε την περίοδο T της φθίνουσας αυτής ταλάντωσης.

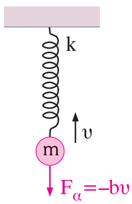
3.54 Στην ελεύθερη άκρη του οριζόντιου ελατηρίου του σχήματος σταθεράς $k = 4.000$ N/m στερεώσαμε σώμα μάζας m.



Απομακρύνουμε το σώμα κατά $A_0 = 0{,}4$ m από τη θέση ισορροπίας του και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει φθίνουσα ταλάντωση της οποίας το πλάτος ελαττώνεται, εξαιτίας των τριβών, κατά 20% σε κάθε πλήρη ταλάντωση. Πόσο θα μειωθεί η ολική ενέργεια της ταλάντωσης όταν θα έχουν ολοκληρωθεί δύο πλήρεις ταλαντώσεις του σώματος;

3.55 Το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης που εκτελεί ένα εκκρεμές κάποια χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $A_t = A_0 e^{-\Lambda t}$. Να προσδιορίσετε τη σταθερά Λ αν μέσα σε χρόνο $t = 20$ s το εκκρεμές χάνει το 75% της αρχικής ενέργειας ταλάντωσης.

3.56 Το κατακόρυφο ελατήριο του παρακάτω σχήματος έχει σταθερά $k = 200$ N/m και το πάνω άκρο του στερεωμένο.



Τυχαία στιγμή

Ενώ το ελατήριο βρίσκεται στη θέση του φυσικού του μήκους, τοποθετούμε στο ελεύθερο άκρο του σώμα με μάζα $m = 2$ kg και στη συνέχεια αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να ταλαντωθεί. Δίνεται ότι, καθώς το σύστημα ταλαντώνεται, το σώμα δέχεται αντίσταση από τον αέρα της μορφής $F_\alpha - b\upsilon$ (δείτε και το σχήμα).

α. Να αιτιολογήσετε ότι η κίνηση του σώματος είναι φθίνουσα ταλάντωση.

β. Πόσο είναι το αρχικό πλάτος αυτής της ταλάντωσης;

γ. Να παραστήσετε γραφικά το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο.

δ. Όταν η ταλάντωση σταματήσει, όλη η αρχική της ενέργεια θα έχει μετατραπεί σε θερμότητα;

ε. Να υπολογίσετε τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά τη συνολική κίνηση του σώματος.

(Δίνεται ότι $g = 10$ m/s^2.)

3.57 Ένα σώμα εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση. Το πλάτος της μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A_t = A_0 e^{-\Lambda t}$. Σε χρονικό διάστημα $t_1 = 40$ s πραγματοποιούνται $N_1 = 50$ ταλαντώσεις και στο μεταξύ το πλάτος υποτριπλασιάζεται. Τι κλάσμα του αρχικού πλάτους θα είναι το πλάτος της ταλάντωσης όταν πραγματοποιηθούν ακόμα 150 πλήρεις ταλαντώσεις;

3.58 Ένα σώμα εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση που το πλάτος της μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση:

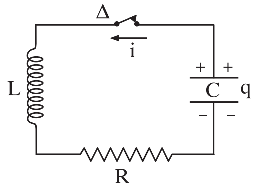
$$A_t = A_0 e^{-\Lambda t}$$

Δίνεται ότι το αρχικό πλάτος αυτής της ταλάντωσης υποδιπλασιάζεται σε χρόνο $\Delta t = 4$ s. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3$ s το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_1 = 12$ cm. Να υπολογίσετε το πλάτος A_2 της φθίνουσας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2 = 11$ s.

3.59 Ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους του φορτίου του πυκνωτή σε μια φθίνουσα ταλάντωση R – L – C είναι 3,8 ms. Να υπολογίσετε τον χρόνο που χρειάζεται για να μειωθεί κατά 75% το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή.

3.60 Για το κύκλωμα R – L – C του σχήματος έχουμε: $R = 4\,\Omega$ και $L = 20$ mH. Ο πυκνωτής έχει φορτιστεί με φορτίο $Q_0 = 20 \cdot 10^{-4}$ C και τη χρονική στιγμή $t = 0$ κλείνουμε τον διακόπτη Δ. Το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή στη φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση που ακολουθεί μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$Q = Q_0 \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \text{ (S.I.)}$$



Να υπολογίσετε:

α. Το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή τη χρονική στιγμή $t_1 = \ell n2 \cdot 10^{-2}$ s.

β. Τη χρονική στιγμή t_2 που η ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης έχει υποδιπλασιαστεί σε σχέση με την αρχική της τιμή.

«Πνεύμα» Πανελληνίων

1ο-2ο ΘΕΜΑ

3.61 Ένα σύστημα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση στην οποία η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας. Τότε:

α. η μηχανική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

β. το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο.

γ. η περίοδος του συστήματος μεταβάλλεται.

γ. ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση μειώνεται.

Εξετάσεις 2002 (Αποδήμων)

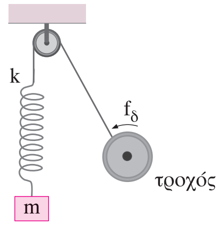
3.62 Σε μία φθίνουσα ταλάντωση ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση πα-

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

Κάποιες εκφράσεις παραπέμπουν έμμεσα σε συντονισμό.

4.38 Ο ταλαντωτής του διπλανού σχήματος αποτελείται από ένα ελατήριο σταθεράς $k = 200\ \frac{N}{m}$ και από τη μάζα $m = 2$ kg. Καθώς μεταβάλλουμε τη συχνότητα $f_δ$ του τροχού, παρατηρούμε ότι κάποια στιγμή η ταλάντωση του συστήματος ελατήριο - μάζα γίνεται πολύ έντονη. Να υπολογίσετε τη συχνότητα με την οποία περιστρέφεται ο τροχός τη στιγμή αυτή.



Όταν η εξαναγκασμένη ταλάντωση γίνεται πολύ έντονη

Όποτε σας αναφέρουν ότι κάποια εξαναγκασμένη ταλάντωση διεξάγεται **πολύ έντονα**, σημαίνει ότι **έχουμε συντονισμό**, επομένως η συχνότητα του διεγέρτη $f_δ$ θα είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή. Δηλαδή:

$$f_δ = f_0$$

Λύση

Τη στιγμή που η ταλάντωση του συστήματος ελατήριο - μάζα γίνεται πολύ έντονη, το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

Η συχνότητα $f_δ$ του τροχού αυτή τη στιγμή λοιπόν θα είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή. Αλλά εφόσον ο ταλαντωτής είναι σύστημα ελατηρίου σταθεράς k και μάζας m, έχουμε ότι η ιδιοσυχνότητά του είναι:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Έτσι:

$$f_δ = f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_δ = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{2}}\ \text{Hz} \Rightarrow f_δ = \frac{5}{\pi}\ \text{Hz}$$

Μάθε να διακρίνεις τον ρόλο των δυνάμεων που δρουν σε ένα σώμα που κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση.

4.39 Σώμα μάζας $m = 1$ kg εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Κάθε χρονική στιγμή στο σώμα δρουν τρεις δυνάμεις. Οι αλγεβρικές τιμές αυτών των δυνάμεων δίνονται από τις σχέσεις:

- **$F_1 = -100\,x$ (S.I.),**
- **$F_2 = -2υ$ (S.I.) και**
- **$F_3 = 20συν10t$ (S.I.),**

όπου x και υ είναι οι αλγεβρικές τιμές της ταχύτητας και της απομάκρυνσης αντίστοιχα.

α. Να προσδιορίσετε τον ρόλο καθεμιάς από τις τρεις δυνάμεις στην εξαναγκασμένη ταλάντωση που εκτελεί το σώμα.

β. Να υπολογίσετε την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης του σώματος.

γ. Να υπολογίσετε τη χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της δύναμης F_2 που δέχεται το σώμα.

δ. Είναι μέγιστο το πλάτος της διεξαγόμενης εξαναγκασμένης ταλάντωσης;

λύση

α. Όταν ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση, δρουν σε αυτό τρεις βασικές δυνάμεις:

- Η δύναμη επαναφοράς $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}$, όπου $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -Dx$. Με βάση τις εξισώσεις που δόθηκαν, στη συγκεκριμένη ταλάντωση δύναμη επαναφοράς είναι η $F_1 = -100x$ (S.I.). Συγκρίνοντας προκύπτει ότι $D = 100\ \frac{N}{m}$.
- Η δύναμη αντίστασης στην κίνηση της μορφής $F_{\alpha\nu\tau} = -b\upsilon$.
  Με βάση τις εξισώσεις που δόθηκαν, στη συγκεκριμένη ταλάντωση δύναμη αντίστασης είναι η $F_2 = -2\upsilon$ (S.I.). Συγκρίνοντας προκύπτει ότι $b = 2\ \frac{kg}{s}$.
- Η διεγείρουσα αρμονική δύναμη (που την ασκεί ο διεγέρτης). Στη συγκεκριμένη ταλάντωση η δύναμη αυτή είναι η:
  $$F_3 = 20\sigma\upsilon\nu 10t \qquad \text{(S.I.)}$$
  Από την εξίσωσή της προκύπτει ότι το πλάτος της είναι $F_0 = 20$ N και $\omega_\delta = 10\ \frac{rad}{s}$.

β. Η ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα δίνεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \xrightarrow[m=1\ kg]{D=100\ \frac{N}{m}} f_0 = \frac{5}{\pi}\ \text{Hz}$$

Μάθε να διακρίνεις τις δυνάμεις μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης

Όταν ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση, δρουν σε αυτό **τρεις** βασικές δυνάμεις.

1. Η δύναμη επαναφοράς $F_{\varepsilon\pi\alpha\nu} = -Dx$.
Είναι υπαίτια για την έναρξη και τη διεξαγωγή της αρμονικής ταλάντωσης.

2. Η δύναμη αντίστασης $F_{\alpha\nu\tau} = -b\upsilon$.
Είναι η δύναμη που δημιουργεί τις απώλειες ενέργειας καθιστώντας την ταλάντωση φθίνουσα.

3. Η διεγείρουσα αρμονική δύναμη μορφής $F = F_0\eta\mu\omega_\delta t$ ή $F = F_0\sigma\upsilon\nu\omega_\delta t$.
Είναι η δύναμη που αντισταθμίζει τις απώλειες ενέργειας μετατρέποντας την αρχικά ελεύθερη φθίνουσα ταλάντωση σε αμείωτη εξαναγκασμένη.

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις δυνάμεων που μας δίνονται κάθε φορά με αυτές των τριών βασικών, εύκολα θα διακρίνουμε ποια είναι η καθεμία!

γ. Η ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί ταλάντωση μηδενίζεται κάθε φορά που το σώμα διέρχεται από ακραία θέση.

Από τη σχέση $F_2 = -b\upsilon$ καταλαβαίνουμε ότι και η δύναμη F_2 θα μηδενίζεται όποτε ο ταλαντωτής διέρχεται από ακραία θέση.

Δύο διαδοχικοί μηδενισμοί της δύναμης λοιπόν θα προκύπτουν καθώς το σώμα διέρχεται διαδοχικά από δύο ακραίες θέσεις, οπότε η χρονική τους διάρκεια θα είναι:

$$\Delta t = \frac{T_\delta}{2} \qquad (1)$$

(Η εξαναγκασμένη ταλάντωση διεξάγεται με συχνότητα $f = f_\delta$ και περίοδο $T = T_\delta$.)

Αλλά $T_\delta = \dfrac{2\pi}{\omega_\delta} = \dfrac{2\pi}{10} \Rightarrow T_\delta = \dfrac{\pi}{5}$ s.

Έτσι η σχέση (1) δίνει: $\Delta t = \dfrac{\pi}{10}$ s.

δ. Η εξαναγκασμένη ταλάντωση διεξάγεται με συχνότητα $f = f_\delta$, όπου $f_\delta = \dfrac{\omega_\delta}{2\pi} = \dfrac{10}{2\pi} \Rightarrow f_\delta = \dfrac{5}{\pi}$ Hz.

Όμως και η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή μάς προέκυψε $f_0 = \dfrac{5}{\pi}$ Hz. Έχουμε λοιπόν $f_\delta = f_0$, οπότε το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

Η εξαναγκασμένη ταλάντωση λοιπόν θα διεξάγεται με μέγιστο πλάτος.

Βασικοί ενεργειακοί ρυθμοί στην εξαναγκασμένη ταλάντωση.

4.40 **Η κυκλική ιδιοσυχνότητα ενός ταλαντωτή είναι $\omega_0 = 10\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$. Ο ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση υπό την επίδραση μιας διεγείρουσας αρμονικής δύναμης με εξίσωση $F_\delta = 20$συν$10t$ (S.I.). Η εξίσωση της απομάκρυνσης αυτής της ταλάντωσης είναι:**

$$x = 0{,}4\,\eta\mu 10t \qquad \text{(S.I.)}$$

α. Να προσδιορίσετε τον ρυθμό P_δ με τον οποίο η διεγείρουσα δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σύστημα.

β. **Αν η δύναμη αντίστασης στην κίνηση του ταλαντωτή έχει τη μορφή $F_{αντ} = -5υ$ (S.I.), να προσδιορίσετε τον ρυθμό $P_{αντ}$ με τον οποίο αυτή η δύναμη αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα.**

γ. **Τι παρατηρείτε;**

λύση

α. Η δύναμη $F_δ$ προσφέρει ενέργεια με ρυθμό:

$$P_δ = F_δ \cdot υ \qquad (1)$$

(δείτε και δίπλα). Αφού η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής $x = 0{,}4ημ10t$ (S.I.), η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι της μορφής $υ = ωΑσυνωt$ και, αφού $A = 0{,}4$ m και $ω = 10\ \frac{rad}{s}$, έχουμε ότι:

$$υ = 4συν10t \text{ (S.I.)} \qquad (2)$$

Ακόμη δόθηκε ότι:

$$F_δ = 20συν10t \text{ (S.I.)} \qquad (3)$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) από τις σχέσεις (2) και (3) και έχουμε:

$$P_δ = F_δ \cdot υ = (20συν10t) \cdot (4συν10t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_δ = 80συν^2 10t \text{ (S.I.)}$$

β. Η δύναμη $F_{αντ}$ αφαιρεί ενέργεια από το σώμα με ρυθμό:

$$P_{αντ} = |F_{αντ}| \cdot υ$$

Αλλά $|F_{αντ}| = 5υ$ και $υ = 4συν10t$, οπότε:

$$P_{αντ} = 5υ \cdot υ = 5υ^2 \Rightarrow P_{αντ} = 5(4συν10t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{αντ} = 80συν^2 10t \text{ (S.I.)}$$

γ. Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ενέργεια στο σύστημα η δύναμη $F_δ$ **είναι ίσος** με τον ρυθμό με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα μέσω της δύναμης $F_{αντ}$.

ΘΥΜΗΣΟΥ

Έχουμε ότι:

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} \xRightarrow{\frac{dx}{dt}=υ} P_F = F \cdot υ$$

Έτσι, και:

$$P_δ = F_δ \cdot υ$$

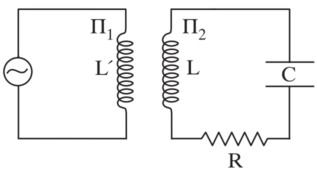
Ρυθμός ενέργειας κατά τον συντονισμό

Όταν ένα σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση βρίσκεται **σε συντονισμό, τότε και μόνο τότε** ο στιγμιαίος ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα μέσω του διεγέρτη **είναι ίσος** με τον ρυθμό με τον οποίο αφαιρείται ενέργεια από το σώμα μέσω της δύναμης αντίστασης. Γι' αυτό και η απόδοση του συστήματος είναι η μέγιστη δυνατή, οπότε παίρνει τη μέγιστη τιμή του και το πλάτος της ταλάντωσης.

Προσέξτε όμως! Αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωσή μας, όπου $\omega_\delta = \omega_0 = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, οπότε έχουμε συντονισμό!
(Να δείτε και το σχόλιο-«κλειδί»).

Ρυθμός προσφοράς ενέργειας στο κύκλωμα R – L – C κατά τη διάρκεια του συντονισμού.

4.41 **Στο διπλανό κύκλωμα το πηνίο Π_1 βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με το ιδανικό πηνίο Π_2. Το πηνίο Π_1 διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, οπότε μεταφέρεται ενέργεια και στο πηνίο Π_2 προκαλώντας εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η ωμική αντίσταση στο κύκλωμα του πηνίου Π_2 είναι $R = 8\ \Omega$ και κάποια στιγμή t_2 που η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο αυτό είναι $i_2 = 0{,}2$ A το κύκλωμα εκτελεί ταλάντωση μέγιστου πλάτους. Να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο παρέχεται ενέργεια στο κύκλωμα του πηνίου Π_2 τη στιγμή αυτή.**



Ρυθμός προσφοράς ενέργειας στην εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση κατά τον συντονισμό

Ένα κύκλωμα R – L – C εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση.
Αν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, τότε ο στιγμιαίος ρυθμός $\frac{dE_{\pi\rho o\sigma\varphi}}{dt}$ με τον οποίο του προσφέρεται ενέργεια από τον διεγέρτη είναι ίσος με τον ρυθμό $\frac{dQ_R}{dt} = i^2 \cdot R$ με τον οποίο του αφαιρείται ενέργεια από τον αντιστάτη R μέσω του φαινομένου Joule.
(i είναι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τότε το κύκλωμα.)

λύση

Εφόσον τη χρονική στιγμή t_2 το κύκλωμα του πηνίου Π_2 εκτελεί ταλάντωση μέγιστου πλάτους, σημαίνει ότι βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.
Επομένως, τη στιγμή αυτή, ο ρυθμός με τον οποίο του προσφέρεται ενέργεια από τον διεγέρτη είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο του αφαιρείται ενέργεια μέσω της αντίστασης R. Δηλαδή:

$$\frac{dE_{\pi\rho o\sigma\varphi}}{dt} = \frac{dQ_R}{dt} = i_2^2 \cdot R$$

και αντικαθιστώντας έχουμε:

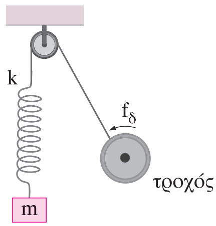
$$\frac{dE_{\pi\rho o\sigma\varphi}}{dt} = i_2^2 \cdot R = 0{,}2^2 \cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{\pi\rho o\sigma\varphi}}{dt} = 0{,}32\ \text{W}$$

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

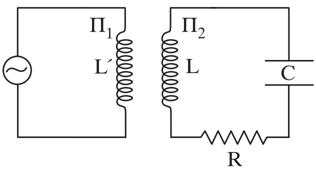
«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

4.42 Ο ταλαντωτής του σχήματος αποτελείται από ένα ελατήριο σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$ και από τη μάζα $m = 1$ kg.



Καθώς μεταβάλλουμε τη συχνότητα f_δ του τροχού, παρατηρούμε ότι κάποια στιγμή η ταλάντωση του συστήματος ελατήριο - μάζα γίνεται πολύ έντονη. Να υπολογίσετε τη συχνότητα με την οποία στρέφεται ο τροχός τη στιγμή αυτή.

4.43 Για το κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων $R - L - C$ του σχήματος έχουμε $L = 40$ mH και $C = 4$ μF.



Καθώς μεταβάλλουμε τη συχνότητα $f_{εναλλ}$ του κυκλώματος διεγέρτη, παρατηρούμε ότι κάποια στιγμή η εξαναγκασμένη ταλάντωση στο κύκλωμα $R - L - C$ γίνεται πολύ έντονη. Να υπολογίσετε τη συχνότητα $f_{εναλλ}$ του κυκλώματος διεγέρτη τη στιγμή αυτή.

4.44 Σώμα μάζας $m = 2$ kg εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Κάθε χρονική στιγμή στο σώμα δρουν τρεις δυνάμεις. Οι αλγεβρικές τιμές αυτών των δυνάμεων δίνονται από τις σχέσεις:

- $F_1 = -200x$ (S.I.),
- $F_2 = -6υ$ (S.I.) και
- $F_3 = 30συν10t$ (S.I.),

όπου x και υ είναι οι αλγεβρικές τιμές της ταχύτητας και της απομάκρυνσης αντίστοιχα.

α. Να προσδιορίσετε τον ρόλο καθεμιάς από τις τρεις δυνάμεις στην εξαναγκασμένη ταλάντωση που εκτελεί το σώμα.

β. Να υπολογίσετε την ιδιοσυχνότητα της ταλάντωσης του σώματος.

γ. Κάποια στιγμή, η δύναμη F_2 έχει μέγιστη τιμή. ΄Υστερα από πόσο χρόνο από τότε θα έχει για πρώτη φορά την τιμή μηδέν;

δ. Είναι μέγιστο το πλάτος της διεξαγόμενης ταλάντωσης;

4.45 Η κυκλική ιδιοσυχνότητα ενός ταλαντωτή είναι $ω_0 = 20\ \frac{rad}{s}$. Ο ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση μιας διεγείρουσας περιοδικής δύναμης με εξίσωση:

$$F = 20συν20t \qquad \text{(S.I.)}$$

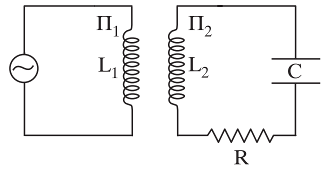
Η εξίσωση της απομάκρυνσης αυτής της ταλάντωσης είναι $x = 0{,}4ημ20t$ (S.I.).

α. Να προσδιορίσετε τον ρυθμό $P_δ$ με τον οποίο η διεγείρουσα δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σύστημα.

β. Αν η δύναμη αντίστασης στην κίνηση του ταλαντωτή έχει τη μορφή $F_{αντ} = -2{,}5υ$ (S.I.), να προσδιορίσετε τον ρυθμό $P_{αντ}$ με τον οποίο αυτή η δύναμη αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα.

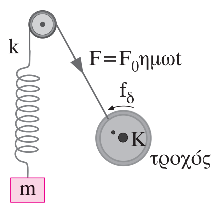
γ. Τι παρατηρείτε;

4.46 Στο παρακάτω κύκλωμα το πηνίο $Π_1$ βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με το ιδανικό πηνίο $Π_2$. Το πηνίο $Π_1$ διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα, οπότε μεταφέρεται ενέργεια και στο πηνίο $Π_2$ προκαλώντας εξαναγκασμένη ταλάντωση.



Η ωμική αντίσταση στο κύκλωμα του πηνίου $Π_2$ είναι $R = 20\ Ω$ και κάποια στιγμή t_2 που η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο αυτό είναι $i_2 = 0{,}4$ A, το κύκλωμα εκτελεί ταλάντωση μέγιστου πλάτους. Να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο παρέχεται ενέργεια στο κύκλωμα του πηνίου $Π_2$ τη στιγμή αυτή.

Και άλλα λυμένα παραδείγματα σε δεύτερο επίπεδο



4.47 Κατασκευή της εξίσωσης $x = f(t)$ στην εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Ένας ταλαντωτής αποτελείται από ελατήριο σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$ και από μάζα $m = 1$ kg (Δείτε το διπλανό σχήμα.) Ο ταλαντωτής εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}2$ m διεγειρόμενος από τον τροχό ο οποίος περιστρέφεται με κυκλική συχνότητα $ω_δ = 2π\ \frac{rad}{s}$. Θεωρήστε ως μηδέν την αρχική φάση του ταλαντωτή.

α. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο για την εξαναγκασμένη ταλάντωση αυτού του ταλαντωτή.

β. Να παραστήσετε γραφικά την εξίσωση $x = f(t)$ για τον χρόνο μιας περιόδου.

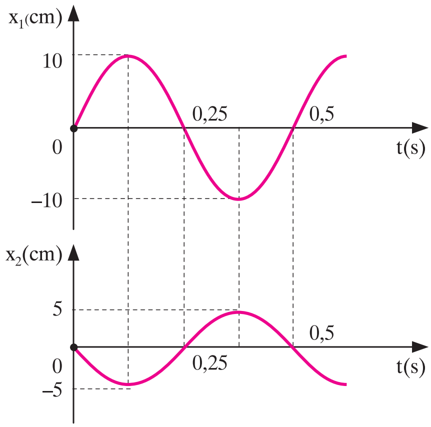
α. Οι ταλαντώσεις από τις οποίες προέκυψε το διακρότημα είχαν διαφορετικές διευθύνσεις.

β. Οι συνιστώσες αυτές ταλαντώσεις έχουν ακριβώς την ίδια περίοδο.

γ. Οι συνιστώσες ταλαντώσεις έχουν το ίδιο πλάτος, την ίδια διεύθυνση και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους.

δ. Καμιά από τις παραπάνω προτάσεις δεν είναι σωστή.

5.30 Στα διαγράμματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις απομάκρυνσης-χρόνου δύο αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης.



Να δώσετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης-χρόνου $x = f(t)$ και ταχύτητας-χρόνου $υ = f(t)$ για την κίνηση που θα κάνει ένα σώμα αν εκτελέσει ταυτόχρονα και τις δύο ταλαντώσεις.

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

Μέγιστη δύναμη F_{max} και μέγιστη δυναμική ενέργεια U_{max} στη σύνθετη ταλάντωση.

5.31 **Ένα σώμα μάζας $m = 1$ kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις (1) και (2) που διεξάγονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι ταλαντώσεις αυτές έχουν τις εξισώσεις:**

$$x_1 = 0{,}4ημ10t \qquad \text{(S.I.)}$$

και

$$x_2 = 0{,}2ημ10t \qquad \text{(S.I.)}$$

α. **Να προσδιορίσετε την εξίσωση $x = f(t)$ για τη σύνθετη κίνηση που εκτελεί το σώμα.**

β. **Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης δύναμης F_{max} που ασκείται στο σώμα καθώς ταλαντώνεται.**

γ. **Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων του μέτρου της δύναμης.**

δ. **Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος.**

λύση

α. Σύμφωνα με την αρχή της ανεξαρτησίας των κινήσεων, η σύνθετη ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα θα έχει απομάκρυνση:

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = 0{,}4ημ10t + 0{,}2ημ10t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0{,}6ημ10t \qquad (S.I.)$$

Το σώμα λοιπόν εκτελεί μια σύνθετη κίνηση που είναι και αυτή Α.Α.Τ. με πλάτος $A' = 0{,}6$ m και κυκλική συχνότητα $ω = 10 \ \frac{rad}{s}$.

β. Η δύναμη επαναφοράς που υπό την επίδρασή της ταλαντώνεται το σώμα δίνεται από τη σχέση $F = -Dx = -mω^2x$ και κατά μέτρο $F = mω^2x$.
Η δύναμη αυτή αποκτά μέγιστο μέτρο κάθε φορά που είναι $x = x_{max} = A'$, δηλαδή στις ακραίες θέσεις.
Επομένως:

$$F_{max} = mω^2A' \Rightarrow F_{max} = 60 \text{ N}$$

γ. Δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις του μέτρου της δύναμης θα γίνουν όταν το σώμα από τη μια ακραία θέση (π.χ. $x = +A'$) πάει στην άλλη ακραία θέση (π.χ. $x = -A'$). Η κίνηση αυτή όμως είναι μισή ταλάντωση και για να γίνει απαιτείται χρονικό διάστημα $Δt = \frac{T}{2}$ (1). Αλλά:

$$ω = \frac{2π}{T} \Rightarrow T = \frac{2π}{ω} = \frac{2π}{10} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{π}{5} \text{ s}$$

Έτσι η σχέση (1) γίνεται: $Δt = \frac{π}{10}$ s.

δ. Η δυναμική ενέργεια του σώματος δίνεται από τη σχέση:

Μέγιστη δύναμη F_{max} και μέγιστη δυναμική ενέργεια U_{max} στη σύνθετη ταλάντωση

Για τον υπολογισμό των F_{max} και U_{max} στη σύνθετη ταλάντωση ενός σώματος:

- Από τις συνιστώσες ταλαντώσεις προσδιορίζετε τη σχέση $x = f(t)$ για τη συνισταμένη ταλάντωση. Έστω ότι:

$$x = A'ημ(ωt + φ)$$

- Τη μέγιστη δύναμη F_{max} και τη μέγιστη δυναμική ενέργεια U_{max} το σώμα τις αποκτά στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του, δηλαδή όταν $x = A'$. Η σχέση $x = f(t)$ σας δίνει το A' και την ω. Έτσι:

$$F_{max} = DA' = mω^2A'$$

και

$$U_{max} = \frac{1}{2}DA'^2 \Rightarrow U_{max} = \frac{1}{2}mω^2A'^2$$

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 \xrightarrow{D=m\omega^2} U = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Η δυναμική ενέργεια γίνεται μέγιστη κάθε φορά που $x = x_{max} = A'$, άρα:

$$U_{max} = \frac{1}{2}m\omega^2A'^2 \Rightarrow U_{max} = 18\ J$$

Βασική μελέτη διακροτήματος.

5.32 **Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν εξισώσεις:**

$$\mathbf{x_1 = 0{,}4ημ202t} \qquad \text{(S.I.)}$$

και

$$\mathbf{x_2 = 0{,}4ημ198t} \qquad \text{(S.I.)}$$

α. **Πώς ονομάζεται η συνισταμένη κίνηση που εκτελεί το σώμα; Να γράψετε την εξίσωσή της.**

β. **Αν η συνισταμένη κίνηση είναι διακρότημα, να υπολογίσετε την περίοδό του $T_δ$ και τη συχνότητά του $f_δ$.**

γ. **Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{8}$ s.**

λύση

α. Το σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις ίδιου πλάτους που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση και οι συχνότητές τους διαφέρουν κατά πολύ λίγο.

Η σύνθετη κίνηση λοιπόν που εκτελεί είναι διακρότημα.

Η εξίσωση $x = f(t)$ αυτής της σύνθετης κίνησης προκύπτει με τη βοήθεια της αρχής της ανεξαρτησίας των κινήσεων. Έχουμε:

$$x = x_1 + x_2 = Aημ\omega_1 t + Aημ\omega_2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2Aσυν\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)ημ\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \qquad (1)$$

ΘΥΜΗΣΟΥ

$$ημα + ημβ = 2συν\frac{α-β}{2}ημ\frac{α+β}{2}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$A = 0{,}4\ \text{m},\ \omega_1 = 202\ \frac{\text{rad}}{\text{s}},\ \omega_2 = 198\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) προκύπτει:

$$x = 2 \cdot 0{,}4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{202-198}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{202+198}{2}t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0{,}8\sigma\upsilon\nu 2t\eta\mu 200t \qquad \text{(S.I.)}$$

β. Η συχνότητα του διακροτήματος δίνεται από τη σχέση:

$$f_\delta = |f_! - f_2| = \left|\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}\right| \Rightarrow f_\delta = \left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}\right| \Rightarrow f_\delta = \frac{2}{\pi}\ \text{Hz}$$

Από τη σχέση $T_\delta = \dfrac{1}{f_\delta}$ έχουμε ότι:

$$T_\delta = \frac{\pi}{2}\ \text{s}$$

γ. Αντικαθιστούμε στη σχέση $x = 0{,}8\sigma\upsilon\nu 2t\eta\mu 200t$ όπου $t = \dfrac{\pi}{8}$ s και έχουμε:

$$x = 0{,}8\sigma\upsilon\nu 2\frac{\pi}{8}\eta\mu 200\frac{\pi}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0{,}8\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\eta\mu 25\pi = 0{,}8\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu(24\pi + \pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0{,}4\sqrt{2} \cdot \eta\mu\pi \xrightarrow{\eta\mu\pi = 0} x = 0\ \text{m}$$

5.33 **Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν εξισώσεις:**

$$\mathbf{x_1 = 0{,}4\eta\mu 102t} \qquad \text{(S.I.)}$$

και

$$\mathbf{x_2 = 0{,}4\eta\mu 98t} \qquad \text{(S.I.)}$$

α. **Να γράψετε την εξίσωση $x = f(t)$ της συνισταμένης ταλάντωσης.**

Άλλη η συχνότητα διεξαγωγής της συνισταμένης κίνησης και άλλη η συχνότητα του διακροτήματος.

β. **Με ποια συχνότητα f και με ποια περίοδο T διεξάγεται η συνισταμένη ταλάντωση;**

γ. **Ποια είναι η συχνότητα f_δ και ποια η περίοδος T_δ του διεξαγόμενου διακροτήματος;**

λύση

α. Η συνισταμένη ταλάντωση θα έχει εξίσωση που δίνεται από τη σχέση:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

και με αντικατάσταση:

$$x = 0{,}8\sigma\upsilon\nu 2t\eta\mu 100t \qquad \text{(S.I.)}$$

β. Η κυκλική συχνότητα της συνισταμένης κίνησης είναι:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow \bar{\omega} = 100\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Έτσι, από τη σχέση $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$ προκύπτει ότι η συνισταμένη ταλάντωση διεξάγεται με συχνότητα:

$$\bar{f} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} \Rightarrow \bar{f} = \frac{50}{\pi}\ \text{Hz}$$

Επομένως η περίοδος $\bar{T}$ της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$\bar{T} = \frac{1}{\bar{f}} = \frac{\pi}{50}\ \text{s}$$

γ. • Για τη συχνότητα f_δ του διακροτήματος έχουμε:

$$f_\delta = |f_1 - f_2| = \left|\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_\delta = \left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}\right| = \left|\frac{102 - 98}{2\pi}\right| \Rightarrow f_\delta = \frac{2}{\pi}\ \text{Hz}$$

• Από τη σχέση $T_\delta = \frac{1}{f_\delta}$ προκύπτει ότι η περίοδος του διακροτήματος είναι $T_\delta = \frac{\pi}{2}$ s.

(Δείτε και το διπλανό σχόλιο-«κλειδί».)

Η συχνότητα ($\bar{f}$) διεξαγωγής της συνισταμένης κίνησης είναι διαφορετική από τη συχνότητα του διακροτήματος

Όταν η σύνθετη κίνηση που κάνει ένα σώμα είναι διακρότημα:

- Η συχνότητα $\bar{f}$ της διεξαγόμενης κίνησης προκύπτει από τη σχέση $\bar{f} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi}$, όπου $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, και είναι φυσικά η συχνότητα με την οποία εναλλάσσεται η διεξαγόμενη κίνηση.
- Η συχνότητα του διακροτήματος προκύπτει από τη σχέση $f_\delta = |f_1 - f_2| = \left|\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}\right| \Rightarrow f_\delta = \left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}\right|$ και είναι η συχνότητα με την οποία εμφανίζονται οι μηδενισμοί ή τα μέγιστα του μεταβλητού πλάτους της διεξαγόμενης σύνθετης κίνησης.

Τα αντίστοιχα ισχύουν και για την περίοδο. Άλλη η περίοδος $\bar{T}$ της διεξαγόμενης κίνησης και άλλη η περίοδος του T_δ του διακροτήματος.

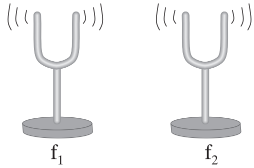
5.34 **Δύο διαπασών βρίσκονται το ένα κοντά στο άλλο και παράγουν αρμονικούς ήχους της ίδιας έντασης με συχνότητες $f_1 = 400$ Hz και $f_2 = 402$ Hz. Να υπολογίσετε:**

α. **Το είδος και τη συχνότητα του ήχου που προκύπτει από τη σύνθεση των δύο ήχων.**

β. **Τον χρόνο μεταξύ δύο μεγίστων ή δύο ελαχίστων έντασης του ήχου που προκύπτει.**

γ. **Τον αριθμό των μεγίστων και των ελαχίστων της έντασης του ήχου που ακούγεται σε χρόνο $t = 20$ s.**

Αριθμός μεγίστων και ελαχίστων διακροτήματος σε χρόνο t.



λύση

α. Αφού οι ήχοι των δύο διαπασών έχουν την ίδια ένταση, προκύπτει ότι οι αρμονικοί αυτοί ήχοι θα έχουν το ίδιο πλάτος. Δηλαδή θα είναι της μορφής:

$$x_1 = Αημ2πf_1t \quad \text{και} \quad x_2 = Αημ2πf_2t$$

- Οι συχνότητες διαφέρουν λίγο, άρα από τη σύνθεση των ήχων αυτών προκύπτει διακρότημα με συχνότητα:

$$f_δ = |f_1 - f_2| = |400 - 402| \Rightarrow f_δ = 2 \text{ Hz}$$

- Η συχνότητα του ήχου που ακούγεται είναι:

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = 401 \text{ Hz}$$

β. Ο χρόνος μεταξύ δύο μεγίστων ή δύο ελαχίστων της έντασης του ήχου που ακούγεται με συχνότητα $\bar{f}$ αντιστοιχεί στην **περίοδο του διακροτήματος**, που είναι:

$$T_δ = \frac{1}{f_δ} \Rightarrow T_δ = 0{,}5 \text{ s}$$

γ. Το διακρότημα έχει περίοδο $T_δ$. Συνεπώς από το ένα μέγιστο (ή ελάχιστο) ως το επόμενο μεσολαβεί χρόνος $T_δ$.

Επομένως, αν σε χρονο t ακούγονται k μέγιστα (ή ελάχιστα) έντασης ήχου, θα ισχύει ότι:

$$t = k \cdot T_δ \qquad (1)$$

Αριθμός μεγίστων ή ελαχίστων διακροτήματος σε χρόνο t

Ένα διακρότημα έχει περίοδο $T_δ$.
Συνεπώς από το ένα μέγιστο (ή ελάχιστο) ως το επόμενο μεσολαβεί χρόνος $T_δ$.
Επομένως, αν σε χρόνο t δημιουργούνται k μέγιστα (ή ελάχιστα), θα ισχύει ότι:

$$t = k \cdot T_δ$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$k = \frac{t}{T_\delta} = \frac{20}{0,5} \Rightarrow k = 40$$

(μέγιστα ή ελάχιστα).

Πλήθος (N) συνισταμένων ταλαντώσεων στον χρόνο T_δ του διακροτήματος.

5.35 **Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι συχνότητες αυτών των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι $f_1 = 101$ Hz και $f_2 = 99$ Hz.**

α. Να προσδιορίσετε την περίοδο T_δ του διακροτήματος που εμπεριέχεται στη συνισταμένη ταλάντωση που εκτελεί το σώμα.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό (N) των συνισταμένων ταλαντώσεων που πραγματοποιούνται από το σώμα στον χρόνο T_δ.

λύση

α. Έχουμε ότι:

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\delta = 0,5 \text{ s}$$

β. Το πλήθος N των συνισταμένων ταλαντώσεων σε χρόνο T_δ προκύπτει από την εμπειρική σχέση:

$$N = \frac{T_\delta}{\bar{T}} \qquad (1)$$

όπου $\bar{T}$ η περίοδος της διεξαγόμενης κίνησης.

Αλλά:

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2} = 100 \text{ Hz}$$

Έτσι, $\bar{T} = \frac{1}{\bar{f}} \Rightarrow \bar{T} = 0,01$ s.

Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε:

$$N = \frac{T_\delta}{\bar{T}} = \frac{0,5 \text{ s}}{0,01 \text{ s}} \Rightarrow N = 50 \text{ συνισταμένες ταλαντώσεις}$$

Υπολογισμός του πλήθους (N) των συνισταμένων ταλαντώσεων στον χρόνο T_δ του διακροτήματος

Η μία συνισταμένη ταλάντωση διαρκεί χρόνο $\bar{T}$. Επομένως σε χρόνο T_δ θα διεξάγονται:

$$N = \frac{T_\delta}{\bar{T}}$$

συνισταμένες ταλαντώσεις.

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

5.36 Ένα σώμα μάζας $m = 2$ kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις (1) και (2) που διεξάγονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι ταλαντώσεις αυτές έχουν τις εξισώσεις:

$$x_1 = 0{,}2ημ20t \qquad (S.I.)$$

και

$$x_2 = 0{,}3ημ20t \qquad (S.I.)$$

α. Να προσδιορίσετε την εξίσωση $x = f(t)$ για τη σύνθετη κίνηση που εκτελεί το σώμα.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης δύναμης F_{max} που ασκείται στο σώμα καθώς ταλαντώνεται.

γ. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε ένα μηδενισμό του μέτρου της δύναμης αυτής και στην αμέσως επόμενη μεγιστοποίησή του.

δ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη δυναμική ενέργεια U_{max} της ταλάντωσης του σώματος.

5.37 Ένα σώμα μάζας $m = 2$ kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις (1) και (2) που διεξάγονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι ταλαντώσεις αυτές έχουν τις εξισώσεις:

$$x_1 = 0{,}5ημ40t \qquad (S.I.)$$

και

$$x_2 = 0{,}3ημ40t \qquad (S.I.)$$

α. Να προσδιορίσετε την εξίσωση $x = f(t)$ για τη σύνθετη κίνηση που εκτελεί το σώμα.

β. Να κατασκευάσετε τη σχέση $υ = f(t)$ που δίνει την ταχύτητα της συνισταμένης κίνησης που εκτελεί το σώμα σε συνάρτηση με τον χρόνο.

γ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη κινητική ενέργεια K_{max} της ταλάντωσης του σώματος.

δ. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών μεγιστοποιήσεων της κινητικής ενέργειας του σώματος.

5.38 Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν εξισώσεις:

$$x_1 = 0{,}2ημ204t \qquad (S.I.)$$

και

$$x_2 = 0{,}2ημ196t \qquad (S.I.)$$

α. Πώς ονομάζεται η συνισταμένη κίνηση που εκτελεί το σώμα; Να γράψετε την εξίσωσή της.

β. Αν η συνισταμένη κίνηση είναι διακρότημα, να υπολογίσετε την περίοδό του $T_δ$ και τη συχνότητά του $f_δ$.

γ. Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{\pi}{16}$ s.

5.39 Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση και οι συχνότητές τους διαφέρουν κατά πολύ λίγο. Η εξίσωση της σύνθετης κίνησης που εκτελεί το σώμα είναι:

$$x = 0{,}6\text{συν}2t\,\text{ημ}100t \qquad (\text{S.I.})$$

α. Αν η εξίσωση της πρώτης από τις συνιστώσες κινήσεις είναι:

$$x_1 = 0{,}3\text{ημ}102t \qquad (\text{S.I.})$$

και δίνεται ότι $\omega_1 > \omega_2$, να προσδιορίσετε την εξίσωση $x_2 = f(t)$ της άλλης συνιστώσας κίνησης.

β. Να υπολογίσετε την περίοδο T_δ και τη συχνότητα f_δ του διεξαγόμενου διακροτήματος.

γ. Να υπολογίσετε την απομάκρυνση της σύνθετης κίνησης τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{8}$ s.

5.40 Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν εξισώσεις:

$$x_1 = 0{,}3\text{ημ}201\pi t \qquad (\text{S.I.})$$

και

$$x_2 = 0{,}3\text{ημ}199\pi t \qquad (\text{S.I.})$$

α. Να γράψετε την εξίσωση $x = f(t)$ της συνισταμένης ταλάντωσης.

β. Με ποια συχνότητα $\bar{f}$ και με ποια περίοδο $\bar{T}$ διεξάγεται η συνισταμένη ταλάντωση;

γ. Ποια είναι η συχνότητα f_δ και ποια η περίοδος T_δ του διεξαγόμενου διακροτήματος;

5.41 Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους που εξελίσσονται γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας στην ίδια διεύθυνση και οι συχνότητές τους διαφέρουν κατά πολύ λίγο. Η εξίσωση της σύνθετης κίνησης που εκτελεί το σώμα είναι:

$$x = 0{,}8\text{συν}2t\,\text{ημ}200t \qquad (\text{S.I.})$$

α. Αν η εξίσωση της πρώτης από τις συνιστώσες κινήσεις είναι:

$$x_1 = 0{,}4\text{ημ}202t \qquad (\text{S.I.})$$

και δίνεται ότι $\omega_1 > \omega_2$, να προσδιορίσετε την εξίσωση $x_2 = f(t)$ της άλλης συνιστώσας ταλάντωσης.

β. Με ποια συχνότητα $\bar{f}$ και με ποια περίοδο $\bar{T}$ διεξάγεται η συνισταμένη ταλάντωση;

γ. Ποια είναι η συχνότητα f_δ και ποια η περίοδος T_δ του διεξαγόμενου διακροτήματος;

5.42 Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι συχνότητες αυτών των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι $f_1 = 402$ Hz και $f_2 = 398$ Hz. Να υπολογίσετε:

α. Το είδος και τη συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης που προκύπτει.

β. Τον χρόνο μεταξύ δύο μεγιστοποιήσεων (ή μηδενισμών) του πλάτους της.

γ. Τον αριθμό των μεγιστοποιήσεων (ή μηδενισμών) του πλάτους της συνισταμένης ταλάντωσης σε χρόνο $t = 40$ s.

5.43 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις ίδιου πλάτους, γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας και στην ίδια διεύθυνση. Οι συχνότητες αυτών των συνιστωσών ταλαντώσεων είναι $f_1 = 201$ Hz και $f_2 = 199$ Hz.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο T_δ του διακροτήματος που προκύπτει.

β. Να υπολογίσετε τον αριθμό (N) των συνισταμένων ταλαντώσεων που πραγματοποιούνται από το σώμα στον χρόνο T_δ.

Και άλλα λυμένα παραδείγματα σε δεύτερο επίπεδο

5.44 Γεωμετρική σύνθεση.

Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο απλές αρμονικές ταλαντώσεις πάνω στην ίδια διεύθυνση, με εξισώσεις:

$$x_1 = 2\eta\mu\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)\ (\text{S.I.})\ \text{και}\ x_2 = 4\eta\mu\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ (\text{S.I.}).$$

Να προσδιορίσετε:

α. Την εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης.

β. Την εξίσωση της ταχύτητας της συνισταμένης ταλάντωσης.

γ. Την εξίσωση της επιτάχυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης. (Θεωρήστε ότι $\pi^2 \simeq 10$.)

(Πρώτα να μελετήσετε το σχόλιο που ακολουθεί.)

Δίνεται ότι ημθ $= 0{,}32 \rightarrow \theta \approx 19°$.

λύση

α. Σύμφωνα με το σχόλιο που ακολουθεί, η συνισταμένη ταλάντωση θα έχει απομάκρυνση της μορφής:

$$x = A\eta\mu[\pi t + (\text{μικρότερη φάση} + \theta)]$$

Δηλαδή:

$$x = A\eta\mu\left[\pi t + \left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\right] \tag{1}$$

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

Η συχνότητα ενός κύματος καθορίζεται από την πηγή του.

Συχνότητα κύματος – Συχνότητα πηγής

Η συχνότητα ενός αρμονικού κύματος καθορίζεται αποκλειστικά από την πηγή του κύματος που το παράγει και ισούται με τη συχνότητα της πηγής.
Δεν εξαρτάται από το μέσο στο οποίο διαδίδεται το κύμα, οπότε δεν αλλάζει αν το κύμα αλλάξει μέσο (υλικό) διάδοσης.

6.54 **Με ένα σταγονόμετρο ρίχνουμε ρυθμικά σταγόνες νερού στην επιφάνεια μιας μεγάλης λεκάνης. Έτσι δημιουργείται ένα κύμα. Αν ρίχνουμε με το σταγονόμετρο 30 σταγόνες το λεπτό, να βρείτε τη συχνότητα του κύματος που δημιουργείται.**

λύση

Η πηγή που δημιουργεί το κύμα είναι οι σταγόνες που πέφτουν ρυθμικά. Όμως, η συχνότητα ενός κύματος καθορίζεται από τη συχνότητα της πηγής που το παράγει και ισούται με αυτήν.
Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τη συχνότητα με την οποία πέφτουν οι σταγόνες. Έχουμε:

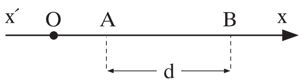
$$f = \frac{30 \text{ σταγόνες}}{1 \text{ min}} = \frac{30 \text{ σταγόνες}}{60 \text{ s}}$$

$$\text{ή } f = 0{,}5 \frac{\text{σταγόνες}}{1 \text{ s}} = 0{,}5 \text{ s}^{-1} \Rightarrow f = 0{,}5 \text{ Hz}$$

Επομένως η συχνότητα του κύματος που δημιουργείται στη λεκάνη είναι και αυτή ίση με:

$$f = 0{,}5 \text{ Hz}$$

Διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων συναρτήσει της απόστασής τους d.



6.55 **Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με μήκος κύματος $\lambda = 0{,}8$ m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα $x'Ox$ προς τη θετική κατεύθυνση. Τα σημεία Α και Β του άξονα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 1{,}6$ m, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης $\Delta\varphi$ μεταξύ αυτών των σημείων.**

λύση

Έστω x_1 και x_2 οι αποστάσεις των σημείων Α και Β αντίστοιχα από το μόριο αναφοράς Ο του ελαστικού μέσου το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ταλαντώνεται κινούμενο προς τη μέγιστη θετική απομάκρυνσή του. Η φάση του πρώτου σημείου Α θα είναι:

$$\varphi_A = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Η φάση του δεύτερου σημείου Β θα είναι:

$$\varphi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Α και Β θα είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B \xRightarrow[(2)]{(1)} \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{x_2}{\lambda} - 2\pi\frac{x_1}{\lambda} = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda}$$

και με αντικατάσταση:

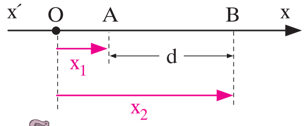
$$\Delta\varphi = 4\pi \text{ rad}$$

Ερμηνεία της διαφοράς φάσης Δφ

Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Α και Β είναι:

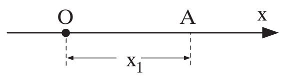
$$\Delta\varphi = 4\pi \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \cdot 2\pi \text{ rad}$$

Αφού σε φάση 2π rad αντιστοιχεί μία πλήρης ταλάντωση, η διαφορά φάσης $\Delta\varphi = 2 \cdot 2\pi$ σημαίνει ότι, τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Β (που υστερεί) διεγείροντάς το σε ταλάντωση, το σημείο Α (που προηγείται) έχει ήδη κάνει δύο ολόκληρες ταλαντώσεις.



Φάση ενός υλικού σημείου στην ευθεία διάδοσης του κύματος

Ένα υλικό σημείο Α βρίσκεται πάνω στην ευθεία διάδοσης ενός κύματος μήκους κύματος λ και απέχει απόσταση x_1 από το σημείο αναφοράς Ο ($x = 0$).



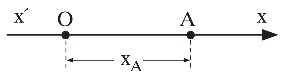
Η φάση του σημείου Α δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_A = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

6.56 **Εγκάρσιο αρμονικό κύμα μήκους κύματος $\lambda = 1$ m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο με ταχύτητα $\upsilon = 10\ \frac{m}{s}$ πάνω στον άξονα $x'Ox$ και προς τη θετική κατεύθυνση.**

α. Να υπολογίσετε την περίοδο T αυτού του κύματος.

Μεταβολή της φάσης του ίδιου σημείου μεταξύ δύο χρονικών στιγμών.



β. Ένα σημείο Α του ημιάξονα Οx απέχει απόσταση $x_A = 2\ \text{m}$ από το σημείο αναφοράς Ο του ελαστικού μέσου το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ταλαντώνεται κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση.

i. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή φτάνει το κύμα στο σημείο Α.

ii. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της φάσης του σημείου Α μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 0{,}3\ \text{s}$ και $t_2 = 0{,}35\ \text{s}$.

λύση

α. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\ \text{m}} \Rightarrow f = 10\ \text{Hz}$$

Από τη σχέση:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 0{,}1\ \text{s}$$

β. i. Έστω t_A η χρονική στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Α. Το κύμα διαδίδεται από το Ο προς το Α με τη σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Έτσι έχουμε ότι:

$$x_A = \upsilon t_A \Rightarrow t_A = \frac{x_A}{\upsilon} \Rightarrow t_A = \frac{2}{10} \text{ ή } t_A = 0{,}2\ \text{s}$$

ii. Επειδή $t_2 > t_1 > 0{,}2\ \text{s}$, τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0{,}3\ \text{s}$ και $t_2 = 0{,}35\ \text{s}$ το κύμα έχει φτάσει στο σημείο Α. (**Είναι απαραίτητος αυτός ο έλεγχος!**) Τη χρονική στιγμή t_1 η φάση του εξεταζόμενου σημείου θα είναι:

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

Τη χρονική στιγμή t_2 θα είναι:

$$\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (2)$$

Φάση ενός σημείου διάδοσης του κύματος κάποια χρονική στιγμή

Τη χρονική στιγμή t_1 η φάση ενός υλικού σημείου της ευθείας διάδοσης του κύματος που απέχει απόσταση x από το σημείο αναφοράς Ο δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_{t_1} = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Η μεταβολή της φάσης θα είναι:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} \Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{t_2 - t_1}{T} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{0{,}35 - 0{,}3}{0{,}1}\ \text{rad} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi\ \text{rad}$$

6.57 **Εγκάρσιο αρμονικό κύμα συχνότητας $f = 10$ Hz διαδίδεται σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο με ταχύτητα $\upsilon = 20\ \frac{m}{s}$ πάνω στον άξονα $x'Ox$ και προς τη θετική κατεύθυνση.**

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ αυτού του αρμονικού κύματος.

β. Δύο υλικά σημεία Α και Β του ημιάξονα Οx απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 4$ m. Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Συνθήκη ώστε δύο σημεία να βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

λύση

α. Από τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} \Rightarrow \lambda = 2\ \text{m}$$

β. Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», δύο σημεία θα βρίσκονται σε συμφωνία φάσης κάποια χρονική στιγμή, αν η διαφορά φάσης τους Δφ είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π, δηλαδή αν είναι:

$$\Delta\varphi = 2k\pi\ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Αλλά αν τα σημεία αυτά απέχουν απόσταση d, η διαφορά φάσης τους δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda}$$

(Να δείτε και το παράδειγμα 6.55.) Έτσι έχουμε:

$$\Delta\varphi = 2k\pi \Rightarrow 2\pi\frac{d}{\lambda} = 2k\pi \Rightarrow d = k\lambda\ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Συνθήκη ώστε δύο σημεία να βρίσκονται σε συμφωνία φάσης

- Δύο σημεία θα βρίσκονται σε συμφωνία φάσης κάποια χρονική στιγμή, **αν η διαφορά φάσης τους Δφ είναι άρτιο πολλαπλάσιο του π**, δηλαδή αν είναι:

$$\Delta\varphi = 2k\pi\ (k = 0, 1, 2, \ldots) \quad (1)$$

- Αλλά αν τα σημεία αυτά απέχουν απόσταση d, η διαφορά φάσης τους δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda} \quad (2)$$

Έτσι η σχέση (1) σε συνδυασμό με τη σχέση (2) γίνεται:

$$2\pi\frac{d}{\lambda} = 2k\pi \Rightarrow d = k\lambda$$

με $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Δηλαδή τα σημεία θα είναι σε συμφωνία φάσης κάποια στιγμή, αν η μεταξύ τους απόσταση είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος.

Τα σημεία Α και Β του ημιάξονα Οx απέχουν απόσταση $d = 4\ m = 2 \cdot 2\ m = k\lambda$ με $k = 2$.
Επομένως βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Συνθήκη ώστε δύο σημεία να βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

6.58 **Εγκάρσιο αρμονικό κύμα μήκους κύματος $\lambda = 3\ m$ διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα $x'Ox$ και προς τη θετική κατεύθυνση. Δύο σημεία Α και Β του θετικού ημιάξονα Οx απέχουν απόσταση $d = 4{,}5\ m$. Να αποδείξετε ότι, όταν για το σημείο Α θα είναι $y_A = +A$, τότε για το σημείο Β θα είναι $y_B = -A$.**

λύση

Θα αποδείξουμε ότι, όταν είναι $y_A = +A$, τότε $y_B = -A$, αν διαπιστώσουμε ότι τα σημεία Α και Β βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.
Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», δύο σημεία θα βρίσκονται σε αντίθεση φάσης κάποια χρονική στιγμή, αν η διαφορά φάσης τους Δφ είναι περιττό πολλαπλάσιο του π, δηλαδή αν είναι:

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \ (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

Αλλά όπως είδαμε:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda} \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε:

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \overset{(2)}{\Rightarrow} 2\pi\frac{d}{\lambda} = (2k+1)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Τα σημεία Α και Β του ημιάξονα Οx απέχουν απόσταση:

$$d = 4{,}5\ m = 3 \cdot 1{,}5 = 3 \cdot \frac{3}{2}\ m \Rightarrow d = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Τα σημεία αυτά λοιπόν απέχουν κατά περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος, επομένως βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

Συνθήκη ώστε δύο σημεία να βρίσκονται σε αντίθεση φάσης

- Δύο σημεία θα βρίσκονται σε αντίθεση φάσης κάποια χρονική στιγμή, αν οι φάσεις τους διαφέρουν κατά περιττό πολλαπλάσιο π, δηλαδή αν είναι:

$$\Delta\varphi = (2k+1)\pi \qquad (1)$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$

- Αλλά αν τα σημεία αυτά απέχουν μεταξύ τους κατά d, η διαφορά φάσης τους δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{d}{\lambda} \qquad (2)$$

Έτσι η σχέση (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$

$$2\pi\frac{d}{\lambda} = (2k+1)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

με $k = 0, 1, 2, \ldots$
Δηλαδή τα σημεία θα είναι σε αντίθεση φάσης κάποια στιγμή, αν η απόστασή τους d είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος.

6.59 **Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα x′Ox. Να βρείτε τη φορά διάδοσης του κύματος, αν για τις φάσεις των σημείων Α και Β του άξονα έχουμε κάποια στιγμή:**

Φορά διάδοσης του κύματος.

α. $\varphi_A = \frac{5\pi}{6}$ **rad και** $\varphi_B = \frac{3\pi}{6}$ **rad.**

β. $\varphi_A = \frac{2\pi}{5}$ **rad και** $\varphi_B = \frac{4\pi}{5}$ **rad.**

λύση

Η φάση φ ενός κύματος δίνεται από τη σχέση:

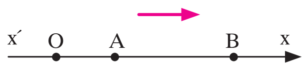
$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι σε μια ορισμένη χρονική στιγμή t η φάση φ ελαττώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση x από την πηγή του κύματος.
Επομένως, τη στιγμή αυτή **το κύμα θα έχει φορά από το σημείο που έχει τη μεγαλύτερη φάση προς το σημείο με τη μικρότερη φάση.**

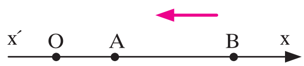
Φορά διάδοσης του κύματος

Κάθε χρονική στιγμή ένα αρμονικό κύμα που διαδίδεται πάνω σε έναν άξονα x′Ox θα έχει φορά από το σημείο που τη στιγμή αυτή έχει τη μεγαλύτερη φάση προς αυτό που έχει τη μικρότερη φάση. Η πηγή του κύματος έχει τη μεγαλύτερη φάση.

α. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε $\varphi_A = \frac{5\pi}{6}$ rad και $\varphi_B = \frac{3\pi}{6}$ rad, οπότε $\varphi_A > \varphi_B$.
Το κύμα λοιπόν διαδίδεται με φορά από το σημείο Α προς το σημείο Β.



β. Έχουμε ότι $\varphi_A = \frac{2\pi}{5}$ rad και $\varphi_B = \frac{4\pi}{5}$ rad, οπότε είναι $\varphi_B > \varphi_A$.
Το κύμα λοιπόν στην περίπτωση αυτή διαδίδεται με φορά από το σημείο Β προς το σημείο Α.



6.60 **Η απόσταση στην οποία εκτείνονται N = 11 κορυφές («όρη») ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος είναι d = 10 m. Αν το κύμα αυτό διαδίδεται με ταχύτητα** $\upsilon = 10\ \frac{m}{s}$**, να υπολογίσετε:**

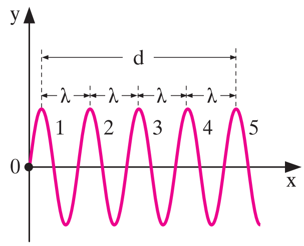
Υπολογισμός του μήκους κύματος λ από την απόσταση d N κορυφών του (εγκάρσιο) ή N πυκνωμάτων (διάμηκες).

α. **Το μήκος κύματος λ του αρμονικού κύματος.**

β. **Τη συχνότητά του f.**

γ. **Αν το πλάτος A = 0,4 m, να γράψετε την εξίσωση** $y = f(t, x)$ **αυτού του κύματος.**

Στο διάγραμμα φαίνεται ότι 3 διαδοχικές κορυφές του εγκάρσιου κύματος εκτείνονται σε απόσταση $d = 2\lambda$ ή $d = (3 - 1)\lambda$.



Οι 5 κορυφές του κύματος εκτείνονται σε απόσταση $d = 4\lambda$ ή $d = (5 - 1)\lambda$. Γενικεύοντας μπορούμε να πούμε ότι η απόσταση στην οποία εκτείνονται N διαδοχικές κορυφές ενός εγκάρσιου κύματος ή N διαδοχικά πυκνώματα ενός διαμήκους είναι:

$$d = (N - 1)\lambda \quad (1)$$

Γνωρίζοντας λοιπόν την απόσταση d στην οποία εκτείνονται N διαδοχικές κορυφές, μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος κύματος λ από τη σχέση (1).

Υπολογισμός της συχνότητας f από το πλήθος N των κορυφών του κύματος που διέρχονται από κάποιο σημείο σε χρόνο t.

Λύση

α. Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», η απόσταση d στην οποία εκτείνονται N διαδοχικές κορυφές («όρη») ενός εγκάρσιου κύματος μήκους κύματος λ δίνεται από τη σχέση:

$$d = (N - 1)\lambda \qquad (1)$$

Στο παράδειγμά μας, N = 11 κορυφές του κύματος εκτείνονται σε απόσταση d = 10 m. Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$(1) \Rightarrow 10 = (11 - 1)\lambda \Rightarrow \lambda = 1\ \text{m}$$

β. Από τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε ότι:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\ \text{m}} \Rightarrow f = 10\ \text{Hz}$$

γ. Από τη σχέση $f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 0{,}1$ s. Η εξίσωση του κύματος έχει τη μορφή:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$y = 0{,}4\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{0{,}1} - \frac{x}{1}\right) \Rightarrow y = 0{,}4\eta\mu 2\pi(10t - x)$$

(t σε s και y, x σε m).

6.61 Ένα παιδί μετράει τα κύματα!

Ένα παιδί ξαπλωμένο σε στρώμα θαλάσσης μέτρησε ότι σε χρονικό διάστημα Δt = 1 min δέχτηκε N = 61 τραντάγματα από το κύμα. Δίνεται ότι το στρώμα τραντάζεται κάθε φορά που το χτυπάει μια κορυφή κύματος.

Α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα f αυτού του κύματος.

Β. Αν 61 κορυφές αυτού του κύματος εκτείνονται σε απόσταση d = 60 m, να βρείτε:

α. **Το μήκος κύματος λ του κυματισμού της θάλασσας.**

β. **Την ταχύτητα υ αυτού του κύματος.**

λύση

Α. Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», σε 4, για παράδειγμα, κορυφές αντιστοιχούν 3, δηλαδή (4 – 1), πλήρη κύματα.

Κάθε τράνταγμα του στρώματος αντιστοιχεί και σε μία κορυφή κύματος. Τα N τραντάγματα αντιστοιχούν σε N κορυφές ή σε N – 1 πλήρη κύματα.

Η συχνότητα του κύματος εκφράζει το πλήθος των κυμάτων που διέρχονται από κάποιο σημείο στη μονάδα του χρόνου.

Επομένως:

$$f = \frac{\text{αριθμός κυμάτων}}{\text{χρόνος}} \text{ ή } f = \frac{N-1}{t}$$

και με αντικατάσταση:

$$f = \frac{61-1}{60\text{ s}} \Rightarrow f = 1\text{ Hz}$$

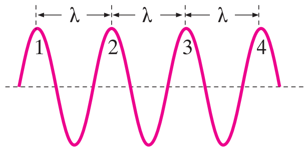
Β. **α.** Από τη σχέση:

$$d = (N-1)\lambda \Rightarrow 60 = (61-1)\lambda \Rightarrow \lambda = 1\text{ m}$$

β. Από τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε ότι:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Υπολογισμός της συχνότητας (f) από το πλήθος των κορυφών που διέρχονται από κάποιο σημείο σε χρόνο (t)



Όπως φαίνεται στο σχήμα, σε 4, για παράδειγμα, κορυφές κύματος αντιστοιχούν 3, δηλαδή (4 – 1), πλήρη κύματα. Κάθε τράνταγμα του στρώματος στο παράδειγμα αυτό ή, π.χ., μιας βάρκας, αντιστοιχεί και σε μια κορυφή. Τα N τραντάγματα αντιστοιχούν σε N κορυφές ή σε N – 1 πλήρη κύματα. Η συχνότητα του κύματος εκφράζει το πλήθος των κυμάτων που διέρχονται από κάποιο σημείο στη μονάδα του χρόνου. Επομένως:

$$f = \frac{\text{αριθμός κυμάτων}}{\text{χρόνος}}$$

$$\text{ή}\quad f = \frac{N-1}{t}$$

6.62 **Μια πηγή κυμάτων Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τις χρονικές στιγμές:**

α. $t_1 = \frac{3T}{4}$ **s.**

β. $t_2 = \frac{5T}{4}$ **s.**

Μάθε να σχεδιάζεις το στιγμιότυπο ενός κύματος.

Μάθε να σχεδιάζεις το στιγμιότυπο ενός κύματος

Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο ενός κύματος κάποια χρονική στιγμή (έστω t_1), εργαζόμαστε ως εξής:

- Από τη σχέση $x = \upsilon t$ βρίσκουμε σε ποια απόσταση έχει προχωρήσει το κύμα τη στιγμή t_1. Π.χ., αν $t_1 = \frac{T}{2}$, τότε:

$$x_1 = \upsilon t_1 \xRightarrow{\upsilon=\frac{\lambda}{T}} x_1 = \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{T}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{2}$$

- Βρίσκουμε την απομάκρυνση y_0 της πηγής τη χρονική στιγμή t_1 αντικαθιστώντας στη σχέση $y = A\eta\mu\omega t$ $\left(\text{όπου } \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$.
- Βρίσκουμε την απομάκρυνση y_1 στην οποία βρίσκεται το σημείο που απέχει $x_1' = \frac{\lambda}{4}$ από την πηγή. Αντικαθιστούμε γι' αυτόν τον λόγο στην εξίσωση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

όπου $t = t_1$ και όπου $x = x_1'$.

- Βρίσκουμε την απομάκρυνση y_2 την οποία έχει τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο στο οποίο έχει μόλις φτάσει το κύμα αυτή τη στιγμή. Αντικαθιστούμε και πάλι στη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

όπου $t = t_1$ και όπου $x = x_1$.

Με βάση τα παραπάνω, κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για τα x και y. Με τη βοήθεια και του πίνακα χαράσσουμε το στιγμιότυπο του κύματος.

⟶

Λύση

α.

- Από τη σχέση $x = \upsilon t$ βρίσκουμε σε ποια απόσταση έχει προχωρήσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{3T}{4}$ s. Έχουμε:

$$x_1 = \upsilon t_1 \xRightarrow{\upsilon=\frac{\lambda}{T}} x_1 = \frac{\lambda}{T}\frac{3T}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{3\lambda}{4}$$

- Βρίσκουμε την απομάκρυνση y_0 της πηγής τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{3T}{4}$. Αντικαθιστούμε στη σχέση $y = A\eta\mu\omega t$ όπου $t_1 = \frac{3T}{4}$ και όπου $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Έχουμε:

$$y_0 = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4} \Rightarrow y_0 = A\eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow y_0 = -A$$

- Βρίσκουμε την απομάκρυνση y_1 στην οποία βρίσκεται το σημείο που απέχει $x_1' = \frac{\lambda}{4}$ από την πηγή τη στιγμή t_1.

  Το σημείο αυτό ταλαντώνεται με την εξίσωση του κύματος:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1'}{\lambda}\right) \Rightarrow y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{\frac{3T}{4}}{T} - \frac{\frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow y_1 = A\eta\mu 2\pi\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = A\eta\mu\pi \xRightarrow{\eta\mu\pi=0} y = 0$$

- Βρίσκουμε την απομάκρυνση y_2 την οποία έχει τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο που απέχει $x_1 = \frac{3\lambda}{4}$ από την πηγή Ο (δηλαδή που βρίσκεται αυτή τη στιγμή το σημείο μέχρι το οποίο έχει προχωρήσει το κύμα).

  Έχουμε:

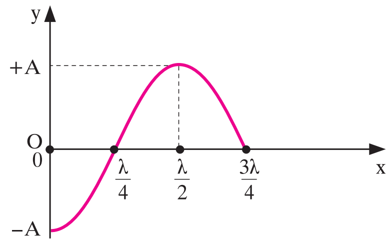
$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \Rightarrow y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{\frac{3T}{4}}{T} - \frac{\frac{3\lambda}{4}}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = A\eta\mu 0 \Rightarrow A = 0$$

- Με βάση τα παραπάνω, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{3\lambda}{4}$
y	$-A$	0	0

Με τη βοήθεια και του πίνακα προέκυψε το στιγμιότυπο του κύματος που ακολουθεί.



Στη διαδικασία αυτή, εφόσον έχουμε τοποθετήσει στους άξονες τα ζεύγη (x, y) του πίνακα τιμών, η χάραξη της καμπύλης προκύπτει με απλή λογική. Αν ωστόσο δυσκολεύεστε, πράγμα μάλλον απίθανο, τότε βρείτε και ένα ακόμα ζεύγος (x, y).

β.
- Βρίσκουμε σε ποια απόσταση έχει προχωρήσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{5T}{4}$ s. Έχουμε:

$$x_2 = \upsilon t_2 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda}{T}\cdot\frac{5T}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{5\lambda}{4}$$

- Η απομάκρυνση της πηγής τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{5T}{4}$ είναι:

$$y_0 = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{5T}{4} \Rightarrow y_0 = A\eta\mu\frac{5\pi}{2} \Rightarrow y_0 = +A$$

- Το σημείο που απέχει $x_1 = \frac{\lambda}{4}$ από την πηγή τη στιγμή t_2 έχει απομάκρυνση:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{\frac{5T}{4}}{4} - \frac{\frac{\lambda}{4}}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) = A\eta\mu 2\pi \Rightarrow y_1 = 0$$

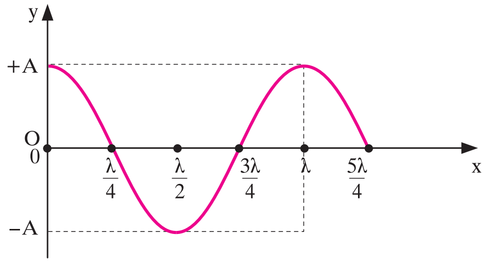
- Το σημείο που απέχει $x_2 = \frac{5\lambda}{4}$ από την πηγή τη στιγμή t_2 έχει απομάκρυνση:

$$y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{\frac{5T}{4}}{T} - \frac{\frac{5\lambda}{4}}{\lambda}\right) \Rightarrow y_2\eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = 0$$

x	0	$\frac{\lambda}{4}$	$\frac{5\lambda}{4}$
y	+A	0	0

- Με βάση τα παραπάνω, κατασκευάσαμε τον διπλανό πίνακα τιμών. Με τη βοήθεια και του πίνακα προέκυψε το στιγμιότυπο του κύματος που φαίνεται παρακάτω.

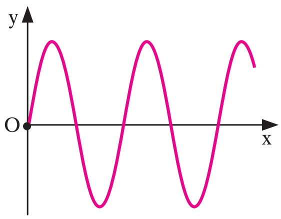


6.63 **Σε ένα ισότροπο ελαστικό μέσο διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα με εξίσωση:**

$$\mathbf{y = 10\eta\mu\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi x}{40}\right)} \quad \textbf{(t σε s και x, y σε cm)}$$

Να υπολογίσετε το πλάτος, την περίοδο, το μήκος κύματος, την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου. (Πρώτα να διαβάσετε το σχόλιο που ακολουθεί.)

Βασικοί υπολογισμοί πάνω στην εξίσωση του κύματος. Μέθοδος της αντιστοιχίας (ταυτοποίησης).



Λύση

Ως γνωστόν, η γενική εξίσωση του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{1}$$

Σύμφωνα και με το σχόλιο που ακολουθεί, θα μετατρέψουμε αλγεβρικά την εξίσωση του κύματος που δόθηκε στο πρόβλημα, έτσι ώστε να πάρει τη μορφή της γενικής εξίσωσης (1). Έχουμε:

$$y = 10\eta\mu\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi x}{40}\right) \Rightarrow y = 10\eta\mu 2\pi\left(\frac{\frac{\pi t}{2}}{2\pi} - \frac{\frac{\pi x}{40}}{2\pi}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 10\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{80}\right) \qquad (2)$$

Κάνουμε αντιστοίχιση (ταυτοποίηση) των όρων μεταξύ της ισοδύναμης μορφής (2) που πήρε η εξίσωση του κύματος του προβλήματος και της γενικής εξίσωσης (1), οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right) \\ \quad\;\; \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ y = 10\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{4} - \dfrac{x}{80}\right) \end{array}\right\}$$

Προκύπτουν τα εξής:

Το πλάτος του κύματος είναι $A = 10$ cm.

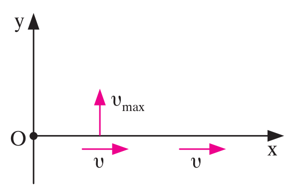
$$\frac{t}{4} = \frac{t}{T} \Rightarrow T = 4 \text{ s}$$

δηλαδή η περίοδος του κύματος είναι $T = 4$ s.

$$\frac{x}{80} = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 80 \text{ cm}$$

δηλαδή το μήκος κύματος είναι $\lambda = 80$ cm.

Την ταχύτητα υ του κύματος θα την υπολογίσουμε με τη βοήθεια της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής. Είναι:



$$\upsilon = \lambda f \xRightarrow{f=\frac{1}{T}} \upsilon = \frac{\lambda}{T}$$

και με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\upsilon = \frac{80 \text{ cm}}{4 \text{ s}} \Rightarrow \upsilon = 20 \ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου είναι:

$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow \upsilon_{max} = 2\pi f A \Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{2\pi}{T} A$$

και με αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\upsilon_{max} = \frac{2\pi}{4} 10 \ \frac{cm}{s} \Rightarrow \upsilon_{max} = 5\pi \ \frac{cm}{s}$$

Μέθοδος της αντιστοιχίας (ή ταυτοποίησης)

Αντιστοιχία:

$$\begin{cases} y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \text{(S.I.) (1)} \\ \ \ \updownarrow \qquad\quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ y = \alpha\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{\beta} - \frac{x}{\gamma}\right) \text{(S.I.) (2)} \end{cases}$$

Εξισώσεις που προκύπτουν:

$$A = \alpha \text{ m}$$

$$\frac{t}{T} = \frac{t}{\beta} \Rightarrow T = \beta \text{ s}$$

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{x}{\gamma} \Rightarrow \lambda = \gamma \text{ m}$$

όπου α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Υπολογισμοί πάνω στην εξίσωση του κύματος με τη μέθοδο της αντιστοίχισης των όμοιων όρων

Όταν σε πρόβλημα κυματικής δίνεται η εξίσωση ενός κύματος και ζητείται να υπολογίσουμε μεγέθη του κύματος σχετικά με την εξίσωσή του, τότε:

– *Αν η δοθείσα εξίσωση του κύματος δεν έχει τη γενική μορφή:*

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad (1)$$

τη μετατρέπουμε, με αλγεβρική διαδικασία, ώστε να πάρει τη μορφή αυτή. Προκύπτει, για την αρχικά δοθείσα εξίσωση, μια ισοδύναμη μορφή, έστω (2), όμοια με τη γενική μορφή (1).

– *Κάνουμε **αντιστοιχία** (ταυτοποίηση) των όρων μεταξύ των εξισώσεων (1) και (2). (Δείτε και δίπλα.) Έτσι δημιουργούνται απλές αλγεβρικές εξισώσεις, από τις οποίες προκύπτουν οι τιμές των **A**, **T** και λ. Ύστερα, με κατάλληλους χειρισμούς, υπολογίζουμε και οποιοδήποτε άλλο μέγεθος του κύματος πιθανόν ζητείται (π.χ. f, ω, υ κτλ.). (Δείτε περισσότερες λεπτομέρειες στην ανάπτυξη της λύσης του παραδείγματος 6.63.)*

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

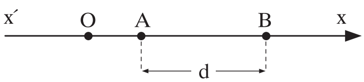
6.64 Με ένα σταγονόμετρο ρίχνουμε ρυθμικά σταγόνες νερού στην επιφάνεια μιας μεγάλης λεκάνης. Έτσι δημιουργείται ένα κύμα. Αν ρίχνουμε με το σταγονόμετρο 60 σταγόνες το λεπτό, να βρείτε τη συχνότητα του κύματος που δημιουργείται.

6.65 Στην ήρεμη επιφάνεια μιας λίμνης ρίχνουμε κατακόρυφα, και με τον ίδιο τρόπο το καθένα, 20 χαλικάκια κάθε 40 s. Το κύμα που παράγεται διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon = 10\ \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε:

α. Τη συχνότητα f αυτού του κύματος.

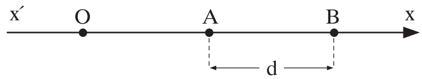
β. Το μήκος κύματός του λ.

6.66 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με μήκος κύματος $\lambda = 2$ m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα x′Ox προς τη θετική κατεύθυνση. Τα σημεία Α και Β του άξονα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 1$ m όπως στο σχήμα.



Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης Δφ μεταξύ αυτών των σημείων.

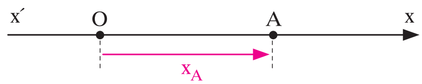
6.67 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με μήκος κύματος $\lambda = 1$ m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα x′Ox προς τη θετική κατεύθυνση. Τα σημεία Α και Β του άξονα απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = \frac{3}{4}$ m όπως στο σχήμα.



α. Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης Δφ μεταξύ αυτών των σημείων.

β. Η περίοδος αυτού του κύματος είναι $T = 0{,}2$ s. Αν κάποια χρονική στιγμή t_1 το σημείο Α βρίσκεται στη θέση με απομάκρυνση $y_A = +A$, ύστερα από πόσο χρόνο θα είναι για πρώτη φορά $y_B = +A$;

6.68 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα περιόδου $T = 0{,}2$ s διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα x′Ox προς τη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα $\upsilon = 20\frac{m}{s}$.

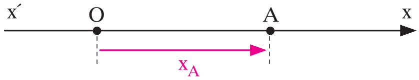


Ένα σημείο Α του ημιάξονα Ox απέχει απόσταση $x_A = 2$ m από το σημείο αναφοράς Ο του ελαστικού μέσου, το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ταλαντώνεται κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση.

α. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή φτάνει το κύμα στο σημείο Α.

β. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της φάσης του σημείου Α μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 0{,}2$ s και $t_2 = 0{,}35$ s.

6.69 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα μήκους κύματος $\lambda = 2$ m διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο με ταχύτητα $\upsilon = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ πάνω στον άξονα $x'Ox$ και προς τη θετική κατεύθυνση.



Α. Να υπολογίσετε την περίοδο T αυτού του κύματος.

Β. Ένα σημείο Α του ημιάξονα Ox απέχει απόσταση $x_A = 1$ m από το σημείο αναφοράς O του ελαστικού μέσου, το οποίο τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να ταλαντώνεται κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση.

i. Να υπολογίσετε ποια χρονική στιγμή φτάνει το κύμα στο σημείο Α.

ii. Να υπολογίσετε τη μεταβολή της φάσης του σημείου Α μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 0{,}4$ s και $t_2 = 0{,}5$ s.

6.70 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα συχνότητας $f = 20$ Hz διαδίδεται σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο με ταχύτητα $\upsilon = 60\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ πάνω στον άξονα $x'Ox$ και προς τη θετική κατεύθυνση.

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ αυτού του αρμονικού κύματος.

β. Δύο υλικά σημεία Α και Β του ημιάξονα Ox απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 6$ m. Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

6.71 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα συχνότητας $f = 50$ Hz διαδίδεται σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο με ταχύτητα $\upsilon = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ πάνω στον άξονα $x'Ox$ και προς τη θετική κατεύθυνση.

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ αυτού του αρμονικού κύματος.

β. Δύο υλικά σημεία Α και Β του ημιάξονα Ox απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = 8$ m. Να αποδείξετε ότι τη στιγμή που το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $y_A = +\frac{A\sqrt{3}}{2}$, με $\upsilon > 0$, το σημείο Β θα βρίσκεται και αυτό στη θέση $y_B = +\frac{A\sqrt{3}}{2}$, με $\upsilon > 0$.

6.72 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα μήκους κύματος $\lambda = 1$ m διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα $x'Ox$ και προς τη θετική κατεύθυνση. Δύο σημεία Α και Β του ημιάξονα Ox απέχουν απόσταση $d = 3{,}5$ m. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

6.73 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο πάνω στον άξονα $x'Ox$. Να βρείτε τη φορά διάδοσης του κύματος, αν για τις φάσεις των σημείων Α και Β του άξονα έχουμε κάποια στιγμή:

α. $\varphi_A = \frac{\pi}{4}$ rad και $\varphi_B = \frac{\pi}{6}$ rad.

β. $\varphi_A = \frac{2\pi}{7}$ rad και $\varphi_B = \frac{5\pi}{7}$ rad.

6.74 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο στον άξονα x′Ox όπως στο σχήμα.

Κάποια χρονική στιγμή το σημείο Α βρίσκεται στη θέση $y_A = +\frac{A\sqrt{3}}{2}$, με $\upsilon < 0$, για πρώτη φορά, ενώ την ίδια στιγμή το σημείο Β βρίσκεται στη θέση $y_B = +\frac{A\sqrt{3}}{2}$, με $\upsilon > 0$, για πρώτη φορά.

α. Να υπολογίσετε τις φάσεις φ_A και φ_B των σημείων Α και Β τη στιγμή αυτή.

β. Να βρείτε τη φορά διάδοσης του κύματος.

(Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ για το σημείο αναφοράς Ο όπου $x = 0$ είναι $y = 0$ και $\upsilon > 0$.)

6.75 Η απόσταση στην οποία εκτείνονται $N = 21$ κορυφές («όρη») ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος είναι $d = 10$ m. Αν το κύμα αυτό διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon = 10\ \frac{m}{s}$, να υπολογίσετε:

α. Το μήκος κύματος λ του αρμονικού κύματος.

β. Την περίοδό του T.

6.76 Η απόσταση στην οποία εκτείνονται $N = 31$ κορυφές ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος είναι $d = 30$ m. Αν το κύμα αυτό διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon = 20\ \frac{m}{s}$, να «κατασκευάσετε» την εξίσωση $y = f(t, x)$ αυτού του αρμονικού κύματος. (Το πλάτος του κύματος είναι $A = 0{,}5$ m.)

6.77 Ένας βαρκάρης βρίσκεται αγκυροβολημένος στα ανοιχτά και ψαρεύει. Κάποια στιγμή αρχίζει να μετράει τα κύματα και βρίσκει ότι σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 30$ s η βάρκα του δέχτηκε $N = 31$ τραντάγματα από το κύμα. Δίνεται ότι η βάρκα τραντάζεται κάθε φορά που τη χτυπάει μια κορυφή του κύματος.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα f αυτού του κύματος.

β. Αν το κύμα αυτό διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon = 10\ \frac{m}{s}$, να υπολογίσετε και το μήκος κύματος λ.

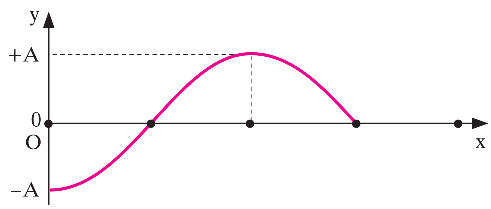
6.78 Μια πηγή κυμάτων Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να εκτελεστεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος που δημιουργείται τις χρονικές στιγμές:

α. $t_1 = \frac{T}{2}$.

β. $t_1 = T$.

γ. $t_1 = \frac{6T}{4}$.

6.79 Στο σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο ενός κύματος τη χρονική στιγμή t_1.



Με βάση αυτό, να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$.

γ. $10\ \dfrac{m}{s}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2004
(Επαναληπτικές Εσπερινού Λυκείου)

6.107 **Α.** Ημιτονοειδές κύμα με μήκος κύματος λ_1 διαδίδεται σε ένα μέσο με ταχύτητα υ_1. Όταν το κύμα εισέλθει σε δεύτερο μέσο, διαδίδεται με ταχύτητα υ_2 ($\upsilon_2 \neq \upsilon_1$). Το μήκος κύματος στο δεύτερο μέσο θα είναι:

α. $\lambda_2 = \lambda_1 \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$

β. $\lambda_2 = \lambda_1 \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$

γ. $\lambda_2 = \lambda_1$

Β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2006 (Εσπερινού Λυκείου)

3ο-4ο ΘΕΜΑ

6.108 Το σημείο Ο ομογενούς ελαστικής χορδής, τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = 0{,}05ημ8πt$ (S.I.) κάθετα στη διεύθυνση της χορδής. Το κύμα που παράγεται διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x′x, κατά μήκος της χορδής, που διέρχεται από το σημείο Ο με ταχύτητα μέτρου $20\ \dfrac{m}{s}$.

α. Να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται ένα υλικό σημείο του ελαστικού μέσου για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση.

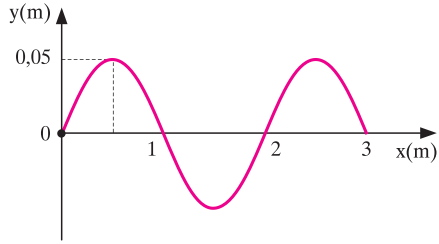
β. Να βρεθεί το μήκος κύματος του αρμονικού κύματος.

γ. Να γραφεί η εξίσωση του ίδιου κύματος.

δ. Να βρεθεί το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας με την οποία ταλαντώνεται ένα σημείο της χορδής.

Εξετάσεις 2002 (Ημερήσιου Λυκείου)
(3ο θέμα)

6.109 Η πηγή Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0{,}05$ m. Το αρμονικό κύμα που δημιουργείται διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, κατά τον άξονα Οx. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος μετά από χρόνο $t_1 = 0{,}3$ s, κατά τον οποίο το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση 3 m.



α. Να βρείτε την ταχύτητα υ διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο.

β. Να βρείτε την περίοδο Τ του αρμονικού κύματος.

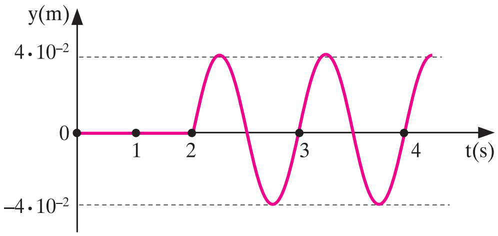
γ. Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

δ. Να απεικονίσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \dfrac{T}{4}$.

Εξετάσεις 2003 (Εσπερινού Λυκείου)

(3ο θέμα)

6.110 Η πηγή Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, που περιγράφεται από την εξίσωση $y = Aημωt$. Το κύμα που δημιουργεί διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου και κατά τη θετική φορά. Ένα σημείο Σ απέχει από την πηγή Ο απόσταση 10 m. Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί φαίνεται η απομάκρυνση του σημείου Σ από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με τον χρόνο.



Α. Να υπολογίσετε:

1. Τη συχνότητα του κύματος.

2. Την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

3. Τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Σ.

Β. Να γράψετε την εξίσωση αυτού του κύματος.

Εξετάσεις 2004 (Αποδήμων) (3ο θέμα)

6.111 Σε ένα σημείο μιας λίμνης, μια μέρα χωρίς αέρα, ένα σκάφος ρίχνει άγκυρα. Από το σημείο της επιφάνειας της λίμνης που πέφτει η άγκυρα ξεκινά ένα εγκάρσιο κύμα. Ένας άνθρωπος που βρίσκεται σε βάρκα παρατηρεί ότι το κύμα φτάνει σ' αυτόν 50 s μετά την πτώση της άγκυρας. Το κύμα έχει ύψος 10 cm πάνω από την επιφάνεια της λίμνης, η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κορυφές του κύματος είναι 1 m, ενώ μέσα σε χρόνο 5 s το κύμα φτάνει στη βάρκα 10 φορές.

Να υπολογίσετε:

α. Την περίοδο του κύματος που φτάνει στη βάρκα.

β. Την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

γ. Την απόσταση της βάρκας από το σημείο πτώσης της άγκυρας.

δ. Τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του ανθρώπου στη βάρκα.

Εξετάσεις 2005 (Εσπερινού Λυκείου) (3ο θέμα)

6.112 Δύο σημαδούρες Α και Β απέχουν μεταξύ τους απόσταση $(AB) = 13{,}5$ m και η ευθεία που διέρχεται από αυτές είναι κάθετη στην ακτογραμμή. Πλοίο που κινείται παράλληλα στην ακτογραμμή, μακριά από τις σημαδούρες δημιουργεί κύμα, με φορά διάδοσης από την Α προς τη Β, το οποίο θεωρούμε εγκάρσιο αρμονικό. Το κύμα διαδίδεται προς την ακτή. Εξαιτίας του κύματος η κάθε σημαδούρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της 30 φορές το λεπτό. Ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει ένα «όρος» του κύματος από τη σημαδούρα Α στη Β είναι 9 s. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης κάθε σημαδούρας είναι $\frac{\pi}{5}\,\frac{m}{s}$. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων τη σημαδούρα Α και ως αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή που η σημαδούρα Α βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και κινείται προς τα θετικά.

α. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος.

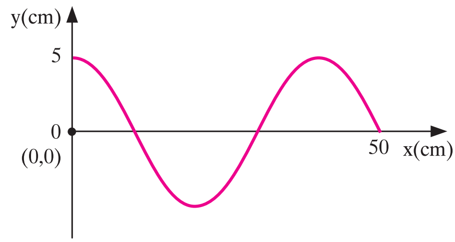
β. Πόσο απέχει η σημαδούρα Α από την ακτή, αν αυτή βρίσκεται για 21η φορά στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής της, όταν το κύμα φτάσει στην ακτή;

γ. Να γραφεί η εξίσωση ταλάντωσης της σημαδούρας Β, καθώς το κύμα διαδίδεται από τη σημαδούρα Α προς τη Β.

δ. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης της σημαδούρας Β κάποια χρονική στιγμή που η σημαδούρα Α βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της ταλάντωσής της.

Εξετάσεις 2006
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)
(3ο θέμα)

6.113 Το άκρο Ο γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του ημιάξονα Οx, αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή $t = 0$, σύμφωνα με την εξίσωση $y = A\eta\mu\frac{\pi}{2}t$ (y σε cm, t σε s). Το εγκάρσιο κύμα που δημιουργείται διαδίδεται κατά μήκος του γραμμικού ελαστικού μέσου. Κάποια χρονική στιγμή το στιγμιότυπο του κύματος απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να βρείτε το μήκος κύματος και την περίοδο του κύματος.

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

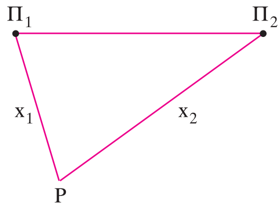
γ. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

δ. Να βρείτε την ενέργεια ενός πολύ μικρού τμήματος του ελαστικού μέσου μάζας $\Delta m = 8 \cdot 10^{-3}$ kg.

Δίνεται $\pi^2 \simeq 10$.

Εξετάσεις 2008 (Εσπερινού Λυκείου)
(3ο θέμα)

χύτητες $υ = 15$ m/s και ίδιες συχνότητες $f = 5$ Hz. Το σημείο Ρ του ελαστικού μέσου απέχει από τις δύο πηγές αποστάσεις x_1 και x_2 που η διαφορά τους είναι $x_2 - x_1 = 3$ m.



α. Κατά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Ρ συμβαίνει ενίσχυση ή απόσβεση;

β. Αν διπλασιαστεί ταυτόχρονα η συχνότητα των κυμάτων που εκπέμπουν οι δύο πηγές χωρίς να αλλάξει η ταχύτητά τους ή κάτι άλλο στο Ρ, θα εξακολουθεί να συμβαίνει ό,τι και πριν; (Ενίσχυση δηλαδή, αν συνέβαινε ενίσχυση, ή απόσβεση, αν συνέβαινε απόσβεση.)

7.26 Οι αποστάσεις του σημείου Ρ της ερώτησης 7.25α από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ είναι $x_1 = 30$ m και $x_2 = 33$ m, ενώ οι πηγές αρχίζουν να εκπέμπουν ταυτόχρονα δύο κύματα ίδιου πλάτους $A = 0{,}2$ m τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Α. Να βρείτε το πλάτος A' της ταλάντωσης του σημείου Ρ:

α. Τη στιγμή $t_1 = 1{,}6$ s αφότου άρχισαν να εκπέμπουν οι πηγές.

β. Τη στιγμή $t_2 = 2{,}1$ s.

γ. Τη στιγμή $t_3 = 2{,}4$ s.

Β. Να βρείτε την απομάκρυνση y της ταλάντωσης του σημείου Ρ κατά τις ίδιες χρονικές στιγμές.

Βασικά «κλειδιά»

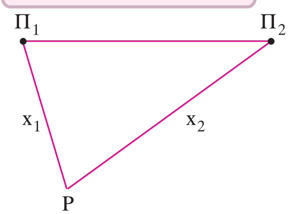
(με παραδείγματα)

7.27 **Στο σχήμα φαίνονται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ που δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν. Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $λ = 1$ m, η απόσταση μεταξύ των πηγών είναι $(Π_1Π_2) = 10$ m και το σημείο Ρ απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις $x_1 = 3$ m και $x_2 = 5$ m αντίστοιχα.**

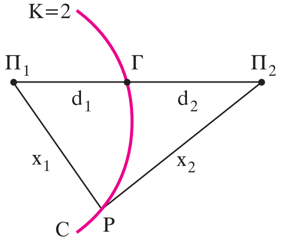
α. **Στο σημείο Ρ έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση;**

β. **Από ποιο σημείο της ευθείας $Π_1$ και $Π_2$ διέρχεται η υπερβολή ενισχυτικής ή αναιρετικής συμβολής που περνάει από το σημείο Ρ;**

Προσδιορισμός του σημείου τομής της ευθείας $Π_1Π_2$ των πηγών και της καμπύλης συμβολής που περνάει από συγκεκριμένο εξωτερικό σημείο.



λύση



α. Οι αποστάσεις του σημείου Ρ από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ διαφέρουν κατά:

$$x_2 - x_1 = 5\text{ m} - 3\text{ m} = 2\text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 2 \cdot 1\text{ m} \Rightarrow x_2 - x_1 = 2\lambda \quad (A)$$

Επομένως, αφού η διαφορά $x_2 - x_1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ ($x_2 - x_1 = 2\lambda$), στο σημείο Ρ έχουμε ενίσχυση (με $K = 2$).

β. Έστω ότι η υπερβολή ενίσχυσης c με $K = 2$ που διέρχεται από το σημείο Ρ τέμνει την ευθεία $Π_1Π_2$ στο σημείο Γ, το οποίο απέχει d_1 και d_2 αντίστοιχα από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$. Έχουμε:

- $d_1 + d_2 = (Π_1Π_2) \Rightarrow d_1 + d_2 = 10\text{ m}$ (1)
(όπως φαίνεται και στο σχήμα).
- Το σημείο Γ είναι σημείο και της υπερβολής ενίσχυσης c, επομένως επαληθεύει την εξίσωσή της (A), στην οποία όμως όπου x_1 και x_2 θα θέσουμε d_1 και d_2, αφού αυτές είναι οι αποστάσεις του Γ από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$. Έτσι η σχέση (A) γράφεται:

$$d_2 - d_1 = 2\lambda \Rightarrow d_2 - d_1 = 2 \cdot 1\text{ m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_2 - d_1 = 2\text{ m} \quad (2)$$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), οπότε προκύπτει:

$$(1) + (2) \Rightarrow d_2 + d_1 + (d_2 - d_1) = 10\text{ m} + 2\text{ m} \Rightarrow$$

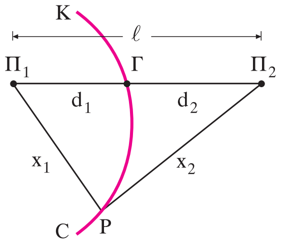
$$\Rightarrow 2d_2 = 12\text{ m} \Rightarrow d_2 = 6\text{ m}$$

Τέλος, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$d_1 = 4\text{ m}$$

Επομένως η υπερβολή ενισχυτικής συμβολής που διέρχεται από το σημείο Ρ τέμνει την ευθεία $Π_1Π_2$ των πηγών σε ένα σημείο Γ, το οποίο απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις $d_1 = 4\text{ m}$ και $d_2 = 6\text{ m}$ αντίστοιχα.

Προσδιορισμός σημείου τομής ευθείας πηγών και καμπύλης συμβολής που περνάει από συγκεκριμένο εξωτερικό σημείο



Το σημείο τομής Γ της καμπύλης C που διέρχεται από το σημείο Ρ και της ευθείας $Π_2Π_2$ των πηγών το προσδιορίζουμε ως εξής:

- Αφού το Γ ανήκει στην ευθεία $Π_1Π_2$, έχουμε:

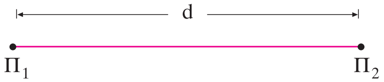
$$d_1 + d_2 = \ell \quad (1)$$

- Αφού το Γ ανήκει και στην καμπύλη συμβολής, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} |d_1 - d_2| &= K\lambda \text{ ή} \\ |d_1 - d_2| &= (2K+1)\frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

- Γνωρίζοντας τις τιμές των ℓ, K και λ, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2), οπότε βρίσκοντας τις τιμές των d_1 και d_2 προσδιορίσαμε τη θέση του σημείου Γ.

7.28 **Οι σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ του σχήματος δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν. Τα κύματα αυτά έχουν μήκος κύματος $λ = 0{,}4$ m και η απόσταση των πηγών είναι $d = 0{,}8$ m.**



1) Μάθε να βρίσκεις τα σημεία ενισχυτικής συμβολής πάνω στην ευθεία των πηγών.
2) Μάθε να αριθμείς και να σχεδιάζεις τις καμπύλες ενίσχυσης.

α. **Να προσδιορίσετε όλα τα εσωτερικά σημεία της ευθείας $Π_1Π_2$ στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.**

β. **Να σχεδιάσετε και να αριθμήσετε τις υπερβολές ενίσχυσης που διέρχονται από αυτά τα σημεία.**

λύση

α. Τα σημεία της ενισχυτικής συμβολής ικανοποιούν τη σχέση:

$$|x_1 - x_2| = Kλ \quad ή \quad x_1 - x_2 = \pm Kλ \qquad (1)$$

με $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (Δείτε και το παρακάτω σχήμα.)

- Όταν αυτά τα σημεία είναι εσωτερικά της ευθείας $Π_1Π_2$, ισχύει επιπλέον:

$$x_1 + x_2 = d \qquad (2)$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$(x_1 - x_2) + (x_1 + x_2) = \pm Kλ + d \Rightarrow 2x_1 = \pm Kλ + d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm K\frac{λ}{2} + \frac{d}{2}$$

με $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε έχουμε $λ = 0{,}4$ m και $d = 0{,}8$ m, οπότε $x_1 = \pm K \cdot 0{,}2 + 0{,}4$ (S.I.), με $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Περιορισμός

Πρέπει να είναι $0 \leq x_1 \leq d$ ή εδώ $0 \leq x_1 \leq 0{,}8$ m.

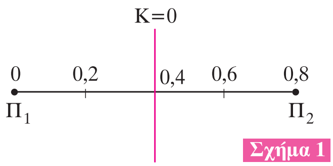
- Με βάση όλα τα παραπάνω, έχουμε:
  - Για $K = 0$: $x_1 = +0{,}4$ m (μέσο του τμήματος $\Pi_1\Pi_2$).
  - Για $K = 1$: $x_1 = \pm 0{,}2 + 0{,}4$, δηλαδή $x_1 = 0{,}6$ m και $x_1 = 0{,}2$ m.
  - Για $K = 2$: $x_1 = \pm 0{,}4 + 0{,}4$, δηλαδή $x_1 = 0{,}8$ m και $x_1 = 0$.

  Προέκυψε δηλαδή ότι τα σημεία των πηγών είναι σημεία ενισχυτικής συμβολής.
  - Για $K \geq 3$ προκύπτουν λύσεις έξω από τον περιορισμό $0 \leq x_1 \leq 0{,}8$ m, οπότε απορρίπτονται.
- Ας συγκεντρώσουμε τα αποτελέσματα της μελέτης μας:

  Τα σημεία της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή απέχουν από την πηγή Π_1 αποστάσεις: $x_1 = 0$ m, $x_1 = 0{,}2$ m, $x_1 = 0{,}4$ m, $x_1 = 0{,}6$ m και $x_1 = 0{,}8$ m.

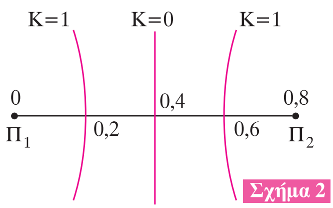
β. Η σχεδίαση και η αρίθμηση των υπερβολών ενίσχυσης θα γίνουν με τη βοήθεια της μελέτης που κάναμε στο ερώτημα (α).

– Η υπερβολή με $K = 0$ απέχει $x_1 = 0{,}4$ m από το Π_1, επομένως διέρχεται από το μέσο της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ και δε θα είναι υπερβολή αλλά ευθεία (μεσοκάθετος). (Δείτε δίπλα το σχήμα 1.)



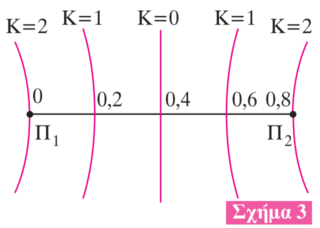
Σχήμα 1

– Οι υπερβολές ενίσχυσης με $K = 1$ είναι δύο: αυτή που απέχει $x_1 = 0{,}2$ m από το Π_1 (η αριστερά της $K = 0$) και αυτή που απέχει $x_1 = 0{,}6$ m από το Π_1 (η δεξιά της $K = 0$). (Δείτε δίπλα το σχήμα 2.)



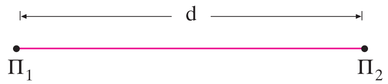
Σχήμα 2

– Οι υπερβολές ενίσχυσης με $K = 2$ είναι δύο: αυτή που απέχει $x_1 = 0$ από το Π_1, άρα διέρχεται από αυτό, και αυτή που απέχει απόσταση $x_1 = 0{,}8$ m από το Π_1, άρα διέρχεται από την άλλη άκρη, την Π_2 (πηγή Π_2). (Δείτε δίπλα το σχήμα 3.)



Σχήμα 3

7.29 **Οι σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ του σχήματος δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν.**



Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $λ = 0{,}4$ m και η απόσταση των πηγών είναι $d = 0{,}8$ m.

α. **Να προσδιορίσετε όλα τα εσωτερικά σημεία της ευθείας $Π_1Π_2$ στα οποία συμβαίνει αναιρετική (ή ακυρωτική) συμβολή.**

β. **Να σχεδιάσετε και να αριθμήσετε τις υπερβολές απόσβεσης που διέρχονται από αυτά τα σημεία.**

1) Μάθε να βρίσκεις τα σημεία ακυρωτικής συμβολής πάνω στην ευθεία των πηγών.
2) Μάθε να αριθμείς και να σχεδιάζεις τις καμπύλες απόσβεσης.

λύση

α. • Τα σημεία αναιρετικής συμβολής ικανοποιούν τη σχέση:

$$|x_1 - x_2| = (2K+1)\frac{λ}{2} \quad \text{ή}$$

$$x_1 - x_2 = \pm(2K+1)\frac{λ}{2} \qquad (1)$$

με $K = 0, 1, 2, 3, \dots$

• Όταν αυτά τα σημεία είναι εσωτερικά της ευθείας $Π_1Π_2$, ισχύει επιπλέον:

$$x_1 + x_2 = d \qquad (2)$$

• Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε:

$$2x_1 = \pm(2K+1)\frac{λ}{2} + d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm(2K+1)\frac{λ}{4} + \frac{d}{2}$$

με $K = 0, 1, 2, 3, \dots$

Στην περίπτωσή μας έχουμε $λ = 0{,}4$ m και $d = 0{,}8$ m, οπότε:

$$x_1 = \pm(2K+1)0{,}1 + 0{,}4 \qquad (\text{S.I.})$$

με $K = 0, 1, 2, 3, \dots$

Περιορισμός

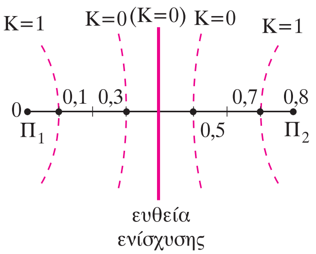
Πρέπει να είναι $0 \leq x_1 \leq d$ ή εδώ $0 \leq x_1 \leq 0{,}8$ m.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε:

– Για $K = 0$: $x_1 = 0{,}3$ m και $x_1 = 0{,}5$ m.
– Για $K = 1$: $x_1 = 0{,}1$ m και $x_1 = 0{,}7$ m.
– Για $K \geq 2$ προκύπτουν λύσεις έξω από τον περιορισμό $0 \leq x_1 \leq 0{,}8$ m, οπότε απορρίπτονται.

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα της μελέτης μας, προκύπτει ότι τα σημεία της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$, στην οποία συμβαίνει αναιρετική συμβολή, απέχουν από την άκρη Π_1 αποστάσεις: $x_1 = 0{,}1$ m, $x_1 = 0{,}3$ m, $x_1 = 0{,}5$ m και $x_1 = 0{,}7$ m.

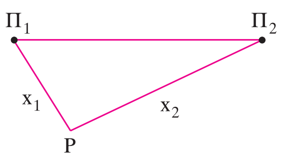
β. Να μελετήσετε πάλι την αναλυτική διαδικασία με την οποία προέκυψε η σχεδίαση των καμπυλών συμβολής (ενίσχυσης) στο παράδειγμα 7.28.



Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει το διπλανό σχήμα, στο οποίο απεικονίζονται οι υπερβολές απόσβεσης που διέρχονται από τα σημεία αναιρετικής συμβολής της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$.

Γραφική παράσταση y=f(t) στην επαλληλία.

7.30 **Οι πηγές Π_1 και Π_2 του διπλανού σχήματος είναι σύγχρονες και δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού δύο κύματα τα οποία συμβάλλουν. Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $\lambda = 4$ m, η περίοδός τους $T = 2$ s και το πλάτος τους $A = 1{,}8$ m. Να παραστήσετε γραφικά την απομάκρυνση y του σημείου P του σχήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο:**



α. **Αν $x_1 = 8$ m και $x_2 = 16$ m.**

β. **Αν $x_1 = 8$ m και $x_2' = 14$ m.**

λύση

α. • Βρίσκουμε πρώτα την ταχύτητα υ διάδοσης των κυμάτων. Έχουμε:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \upsilon = 2\ \frac{m}{s}$$

- Το κύμα από την πηγή Π_1 φτάνει στο σημείο Ρ ύστερα από χρόνο:

$$t_1 = \frac{x_1}{\upsilon} \Rightarrow t_1 = 4\ s$$

Το κύμα από την πηγή Π_2 φτάνει στο σημείο Ρ ύστερα από χρόνο:

$$t_2 = \frac{x_2}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = 8\ s$$

- Ελέγχουμε αν στο σημείο Ρ έχουμε ενισχυτική ή ακυρωτική συμβολή:

$$x_2 - x_1 = 16\ m - 8\ m = 8\ m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 2 \cdot 4 = K\lambda$$

με $K = 2$. Επομένως στο σημείο Ρ έχουμε ενισχυτική συμβολή. Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε για το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Ρ:

– Από $t_0 = 0$ s έως $t_1 = 4$ s το σημείο Ρ ηρεμεί, εφόσον δεν έχει φτάσει ακόμα κανένα από τα δύο κύματα σε αυτό. Δηλαδή:

$$A' = 0$$

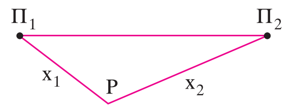
– Από $t_1 = 4$ s έως $t_2 = 8$ s το σημείο Ρ ταλαντώνεται υπό την επίδραση του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_1. (Το άλλο κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο Ρ.) Έτσι:

$$A' = A = 1{,}8\ m$$

– Από $t \geq 8$ s το σημείο Ρ ταλαντώνεται υπό την επίδραση και των δύο κυμάτων που προέρχονται από τις πηγές Π_1 και Π_2. Επιπλέον, το σημείο Ρ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής. Έτσι:

$$A' = 2A = 3{,}6\ m$$

Γραφική παράσταση $y = f(t)$ στην επαλληλία

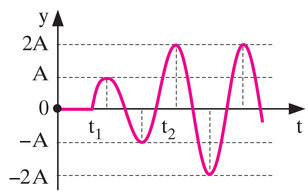


Έστω ότι $x_1 < x_2$.

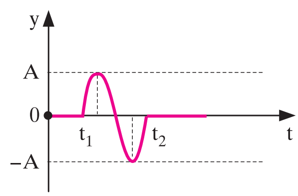
- Από $t_0 = 0$ έως $t_1 = \frac{x_1}{\upsilon}$ το σημείο Ρ ηρεμεί. Επομένως $A' = 0$.
- Από $t_1 = \frac{x_1}{\upsilon}$ έως $t_2 = \frac{x_2}{\upsilon}$ το σημείο Ρ ταλαντώνεται υπό την επίδραση μόνο του κύματος της πηγής Π_1. Έτσι $A' = A$.
- Από $t \geq t_2 = \frac{x_2}{\upsilon}$ το Ρ ταλαντώνεται υπό την επίδραση και των δύο κυμάτων.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

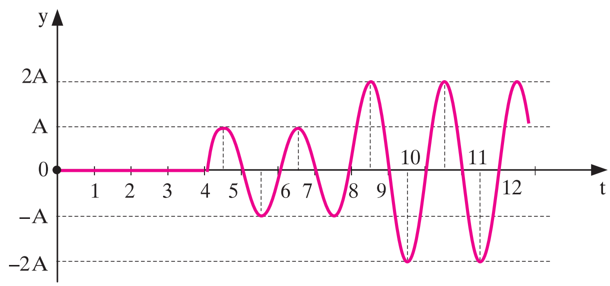
α. Αν $x_2 - x_1 = K\lambda$, τότε στο Ρ έχουμε ενισχυτική συμβολή και είναι $A' = 2A$.
Η γραφική παράσταση έχει ποιοτικά τη μορφή:



β. Αν $x_2 - x_1 = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$, τότε στο Ρ έχουμε ακυρωτική συμβολή, οπότε $A' = 0$. Η γραφική παράσταση $y = f(t)$ έχει ποιοτικά τη μορφή:



- Από όλα τα παραπάνω προκύπτει εύκολα και λογικά η γραφική παράσταση που ακολουθεί.



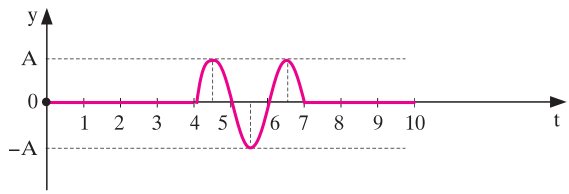
β. • Το κύμα από την πηγή $Π_1$ είδαμε ότι φτάνει στο σημείο Ρ ύστερα από χρόνο $t_1 = 4$ s.
Το κύμα από την πηγή $Π_2$ φτάνει στο σημείο Ρ ύστερα από χρόνο $t_2 = \dfrac{x_2'}{υ_2} \Rightarrow t_2 = 7$ s.

- Ελέγχουμε αν στο σημείο Ρ έχουμε ενισχυτική ή ακυρωτική συμβολή:

$$x_2' - x_1 = 14 \text{ m} - 8 \text{ m} = 6 \text{ m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_2' - x_1 = 3 \cdot 2 = 3 \cdot \frac{4}{2} = 3 \cdot \frac{λ}{2} = (2K+1)\frac{λ}{2}$$

με $K = 1$. Επομένως στο σημείο Ρ, σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ακυρωτική συμβολή. Συνοψίζοντας έχουμε για το πλάτος του σημείου Ρ:
– Από $t = 0$ s έως $t_1 = 4$ s το σημείο Ρ ηρεμεί.
– Από $t_1 = 4$ s έως $t_2 = 7$ s έχουμε $A' = A = 1{,}8$ m.
– Από $t \geq 7$ s έχουμε $A' = 0$.

- Από όλα τα παραπάνω προκύπτει η γραφική παράσταση που ακολουθεί.



7.31 **Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων Π_1 και Π_2 που δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού όμοια κύματα τα οποία συμβάλλουν. Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $\lambda = 1$ m, το πλάτος τους $A = 0{,}4$ m και διαδίδονται με ταχύτητα $\upsilon = 2\ \frac{m}{s}$. Η απόσταση μεταξύ των πηγών είναι $(\Pi_1\Pi_2) = 12$ m και το σημείο P απέχει από τις Π_1 και Π_2 αποστάσεις $x_1 = 5$ m και $x_2 = 7$ m αντίστοιχα.**

α. **Στο σημείο P έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση;**

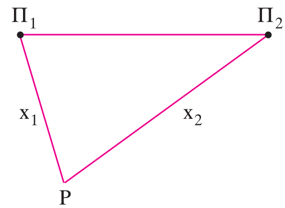
β. **Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Γ της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ από το οποίο διέρχεται η υπερβολή ενισχυτικής ή ακυρωτικής συμβολής που περνάει από το P.**

γ. **Να υπολογίσετε τον αριθμό των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ μεταξύ του σημείου Γ και της πηγής Π_1 στα οποία εμφανίζεται ακυρωτική συμβολή.**

δ. **Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης-χρόνου $y = f(t)$, ταχύτητας-χρόνου $\upsilon = f(t)$ και επιτάχυνσης-χρόνου $\alpha = f(t)$ για το σημείο P από τη στιγμή και μετά που συμβάλλουν τα δύο κύματα σε αυτό.**

(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$.)

- Εξισώσεις $y=f(t)$, $\upsilon=f(t)$, $\alpha=f(t)$ σημείου ενισχυτικής συμβολής.
- Πλήθος σημείων ηρεμίας σε γνωστή απόσταση d από την πηγή Π_1.

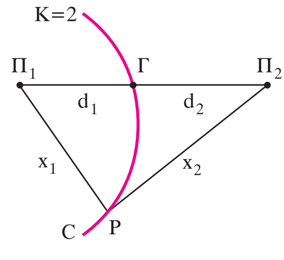


λύση

α. Έχουμε:

$$x_2 - x_1 = 7\text{ m} - 5\text{ m} = 2\text{ m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_2 - x_1 = 2 \cdot 1\text{ m} \Rightarrow x_2 - x_1 = 2\lambda \qquad (A)$$

Επομένως στο σημείο P έχουμε ενίσχυση με $K = 2$.



β. • Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία $\Pi_1\Pi_2$. Επομένως:

$$d_1 + d_2 = (\Pi_1\Pi_2) \Rightarrow d_1 + d_2 = 12 \qquad (1)$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα δίπλα.

• Το σημείο Γ είναι σημείο και της υπερβολής ενίσχυσης c, επομένως επαληθεύει την εξίσωσή της (A). Έτσι η σχέση (A):

$$(A) \Rightarrow d_2 - d_1 = 2\lambda \Rightarrow d_2 - d_1 = 2 \qquad (2)$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και έχουμε: $2d_2 = 14 \Rightarrow d_2 = 7$ m, ενώ από τη σχέση (1) έχουμε $d_1 = 5$ m. Επομένως το σημείο Γ της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ από το οποίο διέρχεται η καμπύλη ενισχυτικής συμβολής c απέχει απόσταση $d_1 = 5$ m από την πηγή Π_1.

γ. Τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ μεταξύ της πηγής Π_1 και του σημείου Γ που είναι ακίνητα (ακυρωτική συμβολή) ικανοποιούν τη σχέση:

$$|x_1' - x_2'| = (2K + 1)\frac{\lambda}{2}$$

όπου x_1' και x_2' οι αποστάσεις τους από τις Π_1 και Π_2 αντίστοιχα.
Επειδή $x_1' < x_2'$ είναι:

$$x_2' - x_1' = (2K + 1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_2' - x_1' = (2K + 1) \cdot 0{,}5 \text{ m} \quad (3)$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$x_1' + x_2' = d \Rightarrow x_1' + x_2' = 12 \text{ m} \qquad (4)$$

Αφαιρώντας από τη σχέση (4) την (3), έχουμε:

$$2x_1' = 11{,}5 - K \Rightarrow x_1' = 5{,}75 - 0{,}5K \qquad (5)$$

με $K = 0, 1, 2, \ldots$ Με τη σχέση (5) υπολογίζουμε την απόσταση από την πηγή Π_1 των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ στα οποία εμφανίζεται ακυρωτική συμβολή.
Το σημείο Γ απέχει από την πηγή απόσταση $d_1 = 5$ m. Επομένως πρέπει:

$$0 < x_1' < 5 \Rightarrow 0 < 5{,}75 - 0{,}5K < 5 \text{ m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -5{,}75 < -0{,}5K < -0{,}75 \Rightarrow 11{,}5 > K > 1{,}5 \text{ ή}$$
$$1{,}5 < K < 11{,}5$$

Αφού ο K είναι ακέραιος, οι δυνατές τιμές του είναι:

$$K = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

Ο K δηλαδή μπορεί να πάρει δέκα ακέραιες τιμές.

Σημείωση
Στη διπλή ανισότητα $0 < x_1' < 5$ m δε συμπεριλαμβάνεται και το =, γιατί στο σημείο 0, δηλαδή στη θέση της πηγής Π_1, έχουμε ενισχυτική συμβολή, αφού τα σημεία των πηγών είναι σημεία ενισχυτικής συμβολής (δείτε το παράδειγμα 7.28). Αλλά και το σημείο Γ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής.

Έτσι προκύπτει ότι μεταξύ του σημείου Γ και της πηγής Π_1 υπάρχουν **10 σημεία ακυρωτικής συμβολής**.

δ. • *Εξίσωση $y = f(t)$ για το P*

Το σημείο P είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, επομένως το πλάτος ταλάντωσής του θα είναι:

$$A_P = 2A \Rightarrow A_P = 0{,}8 \text{ m}$$

Η εξίσωση της συνισταμένης ταλάντωσης του σημείου P είναι:

$$y_P = A_P \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}\right) \qquad (1)$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{\upsilon} \Rightarrow T = 0{,}5 \text{ s}$$

Έτσι η σχέση γίνεται:

$$y_P = 0{,}8\eta\mu 2\pi(2t - 6) \qquad \text{(S.I.)}$$

• *Περιορισμός χρόνου*

Το κύμα από την πηγή Π_2 που βρίσκεται πιο μακριά φτάνει στο σημείο P τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{x_2}{\upsilon} \Rightarrow t_2 = 3{,}5$ s. Επομένως η εξίσωση πλήρης γίνεται:

$$y_P = 0{,}8\eta\mu 2\pi(2t - 6) \qquad \text{(S.I.)}$$

με $t \geq 3{,}5$ s.

• *Εξίσωση $\upsilon = f(t)$ για το P*

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου P είναι:

$$\upsilon_{max} = \omega A_P \Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{2\pi}{T}A_P \Rightarrow \upsilon_{max} = 3{,}2\pi\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου P είναι:

$$\upsilon_P = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_P = 3{,}2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi(2t - 6) \qquad \text{(S.I.)}$$

με $t \geq 3{,}5$ s.

- *Εξίσωση $a = f(t)$ για το P*

  Η μέγιστη επιτάχυνση ταλάντωσης του σημείου P είναι:

$$\alpha_{max} = \omega^2 A_P = \frac{4\pi^2}{T^2} A_P \Rightarrow \alpha_{max} = 128 \ \frac{m}{s^2}$$

  Η εξίσωση της επιτάχυνσης ταλάντωσης του σημείου P είναι:

$$\alpha_P = -\alpha_{max} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow$$

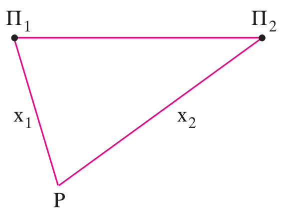
$$\Rightarrow \alpha_P = -128 \eta\mu 2\pi (2t - 6) \qquad \text{(S.I.)}$$

  με $t \geq 3{,}5$ s.

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

7.32 Στο σχήμα φαίνονται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων Π_1 και Π_2 που δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν.

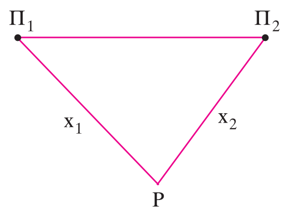


Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $\lambda = 1{,}5$ m, η απόσταση μεταξύ των πηγών είναι $(\Pi_1\Pi_2) = 9$ m και το σημείο P απέχει από τις Π_1 και Π_2 αποστάσεις $x_1 = 7$ m και $x_2 = 10$ m αντίστοιχα.

α. Στο σημείο P έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση;

β. Από ποιο σημείο της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ διέρχεται η υπερβολή ενισχυτικής ή αναιρετικής συμβολής που περνάει από το P;

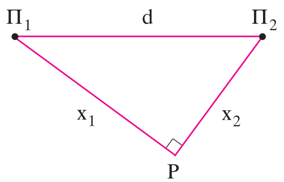
7.33 Στο σχήμα φαίνονται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων Π_1 και Π_2 που δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν. Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $\lambda = 1$ m, η απόσταση μεταξύ των πηγών είναι $(\Pi_1\Pi_2) = 7{,}5$ m και το σημείο P απέχει από τις Π_1 και Π_2 αποστάσεις $x_1 = 8$ m και $x_2 = 5{,}5$ m αντίστοιχα.



α. Στο σημείο P έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση;

β. Από ποιο σημείο της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ διέρχεται η υπερβολή ενισχυτικής ή αναιρετικής συμβολής που περνάει από το Ρ;

7.34 Στο σχήμα φαίνονται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων Π_1 και Π_2 που δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν.



Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $\lambda = 2$ m, το πλάτος τους $A = 0{,}8$ m και η περίοδός τους $T = 0{,}2$ s. Το σημείο Ρ απέχει από τις Π_1 και Π_2 αποστάσεις $x_1 = 8$ m και $x_2 = 6$ m αντίστοιχα, ενώ η γωνία $\Pi_1\mathrm{P}\Pi_2 = 90°$.

Α. i. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Ρ εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_1.

ii. Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Ρ εξαιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_2.

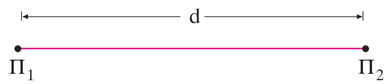
Β. Με βάση και το ότι η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελούν οι πηγές είναι $T = 0{,}2$ s, να υπολογίσετε:

i. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Ρ ύστερα από χρόνο $t_1 = 1{,}6$ s από τότε που άρχισαν να ταλαντώνονται οι πηγές.

ii. Τη φάση φ_1 του σημείου Ρ τη στιγμή t_1.

Γ. Από ποιο σημείο της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ διέρχεται η υπερβολή ενισχυτικής ή αναιρετικής συμβολής που περνάει από το Ρ;

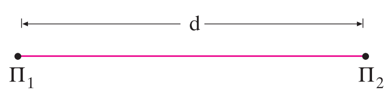
7.35 Οι σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων Π_1 και Π_2 του σχήματος δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν. Τα κύματα αυτά έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0{,}2$ m και η απόσταση των πηγών είναι $d = 1$ m.



α. Να προσδιορίσετε όλα τα εσωτερικά σημεία της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

β. Να σχεδιάσετε και να αριθμήσετε τις υπερβολές ενίσχυσης που διέρχονται από αυτά τα σημεία.

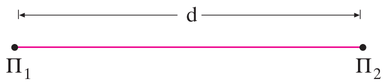
7.36 Οι σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων Π_1 και Π_2 του σχήματος δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν. Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $\lambda = 0{,}2$ m και η απόσταση των πηγών είναι $d = 1$ m.



α. Να προσδιορίσετε όλα τα εσωτερικά σημεία της ευθείας $\Pi_1\Pi_2$ στα οποία συμβαίνει αναιρετική συμβολή.

β. Να σχεδιάσετε και να αριθμήσετε τις υπερβολές απόσβεσης που διέρχονται από αυτά τα σημεία.

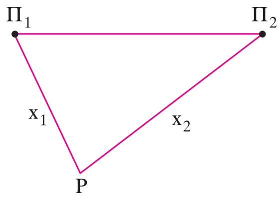
7.37 Οι σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ του σχήματος δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού κύματα τα οποία συμβάλλουν. Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $λ = 0{,}4$ m και η απόσταση των πηγών είναι $d = 1{,}2$ m.



α. Να προσδιορίσετε όλα τα εσωτερικά σημεία της ευθείας $Π_1Π_2$ στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.
β. Να προσδιορίσετε όλα τα εσωτερικά σημεία της ευθείας $Π_1Π_2$ στα οποία συμβαίνει αναιρετική συμβολή.
γ. Να σχεδιάσετε και να αριθμήσετε τις υπερβολές απόσβεσης και τις υπερβολές ενίσχυσης που διέρχονται από αυτά τα σημεία.
δ. Η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται οι πηγές $Π_1$ και $Π_2$ είναι $f = 10$ Hz. Να υπολογίσετε την απομάκρυνση y_P ενός σημείου P που απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις $x_1 = 11$ m και $x_2 = 6$ m τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s από τότε που άρχισαν να ταλαντώνονται οι πηγές.

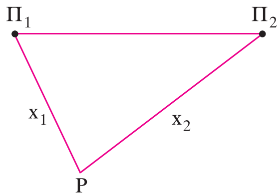
(Θεωρήστε γνωστό το πλάτος A των ταλαντώσεων που εκτελούν οι πηγές $Π_1$ και $Π_2$.)

7.38 Οι πηγές $Π_1$ και $Π_2$ του παρακάτω σχήματος είναι σύγχρονες και δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού δύο κύματα τα οποία συμβάλλουν. Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $λ = 2$ m, η περίοδός τους $T = 1$ s και το πλάτος τους $A = 0{,}8$ m.



Να παραστήσετε γραφικά την απομάκρυνση y του σημείου P του σχήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο:
α. Αν $x_1 = 10$ m και $x_2 = 16$ m.
β. Αν $x_1 = 10$ m και $x_2 = 13$ m.

7.39 Στο σχήμα φαίνονται δύο σύγχρονες πηγές αρμονικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ που δημιουργούν στην επιφάνεια ενός υγρού όμοια κύματα τα οποία συμβάλλουν. Το μήκος κύματος αυτών των κυμάτων είναι $λ = 2$ m, το πλάτος τους $A = 0{,}6$ m και διαδίδονται με ταχύτητα $υ = 2\ \frac{m}{s}$. Η απόσταση μεταξύ των πηγών είναι $(Π_1Π_2) = 14$ m και το σημείο P απέχει από τις $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις $x_1 = 5$ m και $x_2 = 7$ m αντίστοιχα.



α. Στο σημείο P έχουμε ενίσχυση ή απόσβεση;
β. Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Γ της ευθείας $Π_1Π_2$ από το οποίο διέρχεται η υπερβολή ενισχυτικής ή ακυρωτικής συμβολής που περνάει από το P.
γ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος

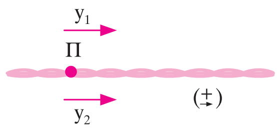
$\Pi_1\Pi_2$ μεταξύ του σημείου Γ και της πηγής Π_1 στα οποία εμφανίζεται ακυρωτική συμβολή.

δ. Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης-χρόνου $y = f(t)$, ταχύτητας-χρόνου $\upsilon = f(t)$ και επιτάχυνσης-χρόνου $\alpha = f(t)$ για το σημείο Ρ από τη στιγμή και μετά που συμβάλλουν τα δύο κύματα σε αυτό.

(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$.)

Και άλλα λυμένα παραδείγματα σε δεύτερο επίπεδο

7.40 Γενικό πρόβλημα συμβολής δύο κυμάτων.



Κατά μήκος ενός σύρματος διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα κατά τη θετική φορά. Η εγκάρσια απομάκρυνση των δύο κυμάτων περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = 0{,}4\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = 0{,}4\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

αντίστοιχα (όπου t σε s και y, x σε m).

α. **Να υπολογίσετε την περίοδο Τ, το μήκος κύματος λ και τη διαφορά φάσης Δφ των δύο κυμάτων.**

β. **Να προσδιορίσετε την εξίσωση $y = f(t, x)$ του συνιστάμενου κύματος.**

γ. **Πόση είναι η απομάκρυνση y ενός σωματιδίου Μ του σύρματος, σε απόσταση $x = 2\lambda$ από το σημείο Π του σύρματος, τη χρονική στιγμή $t = 8$ s, όταν τα δύο κύματα περνούν από το Π τη χρονική στιγμή $t = 0$;**

λύση

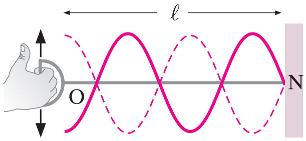
α. Τα δύο κύματα έχουν την ίδια περίοδο Τ και ίδιο μήκος κύματος λ. Θα τα υπολογίσουμε αντιστοιχίζοντας την εξίσωση του πρώτου κύματος (ως πιο απλή) στη βασική της θεωρίας:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 0{,}4\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{2}\right) \\ y &= A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{aligned}\right\}$$

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

Στάσιμο κύμα που προέρχεται από ανάκλαση ενός αρμονικού κύματος.



8.40 **Δείτε προσεκτικά το διπλανό σχήμα. Θέτοντας με το χέρι μας τη λαβή της ελεύθερης άκρης του σχοινιού σε μια κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση, δημιουργούμε πάνω στο σχοινί ένα αρμονικό κύμα. Το κύμα αυτό πέφτει κάθετα στο σημείο Ν του τοίχου και ανακλώμενο συμβάλλει κάθε φορά με το επόμενο κύμα που έρχεται προς τον τοίχο, δημιουργώντας έτσι ένα στάσιμο κύμα πάνω στο σχοινί, του οποίου ένα στιγμιότυπο φαίνεται.**

α. **Να αιτιολογήσετε τη μορφή που παρουσιάζει αυτό το στάσιμο κύμα στις άκρες του.**

β. **Πόση είναι η μεταβολή της φάσης του προσπίπτοντος κύματος στο σημείο Ν;**

γ. **Αν το σχοινί έχει μήκος $\ell = 7$ m, να βρείτε το μήκος κύματος λ του τρέχοντος αρμονικού κύματος που δημιουργήσαμε στο σχοινί με την ταλάντωση του χεριού μας.**

δ. **Αν το παραπάνω τρέχον αρμονικό κύμα διαδίδεται στο σχοινί με ταχύτητα $\upsilon = 4\ \frac{m}{s}$, να βρείτε τη συχνότητά του f.**

Λύση

α.
- Στο σημείο Ν του τοίχου το τρέχον κύμα ανακλάται σε ακίνητο εμπόδιο. Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», εφόσον στο Ν το κύμα προσπίπτει σε ακίνητο εμπόδιο, στο σημείο αυτό δημιουργείται δεσμός.
- Στο σημείο Ο η ανάκλαση γίνεται σε εμπόδιο που κινείται, επομένως αυτό το σημείο ανάκλασης είναι κοιλία του στάσιμου κύματος.

β. Στο σημείο Ν του τοίχου το τρέχον κύμα ανακλάται σε ακίνητο λείο εμπόδιο.

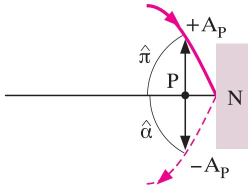
Στάσιμο κύμα που προέρχεται από ανάκλαση ενός αρμονικού κύματος

Θεωρήστε ένα στάσιμο κύμα που προέρχεται από ανάκλαση ενός αρμονικού κύματος. Τότε:

α. Αν η ανάκλαση γίνεται σε **ακλόνητο** εμπόδιο, κατά την ανάκλαση έχουμε μεταβολή της φάσης του προσπίπτοντος κύματος κατά π rad. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο της ανάκλασης είναι **δεσμός** του στάσιμου κύματος.

β. Αν η ανάκλαση γίνεται σε εμπόδιο **που μπορεί να κινείται**, δεν έχουμε μεταβολή της φάσης του προσπίπτοντος κύματος. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο της ανάκλασης είναι **κοιλία** του στάσιμου κύματος.

Σύμφωνα με τον νόμο της ανάκλασης των κυμάτων, το κύμα θα ανακλαστεί κατά γωνία ανάκλασης $\hat{\alpha}$ ίση με τη γωνία πρόσπτωσης $\hat{\pi}$. (Δείτε και το σχήμα.)



Έτσι, ένα σημείο P του σχοινιού που πριν από την ανάκλαση βρισκόταν, π.χ., στη θέση $y_P = +A_P$, αμέσως μετά την ανάκλαση θα είναι στη θέση $y_P = -A_P$. Η φάση του σημείου P λοιπόν έχει αναστραφεί, εξαιτίας της ανάκλασης, κατά π.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η ανάκλαση γίνεται σε ακλόνητο εμπόδιο, έχουμε μεταβολή της φάσης του προσπίπτοντος κύματος κατά π rad (οπότε νομοτελειακά στο σημείο αυτό δημιουργείται δεσμός).

γ. Στο σχοινί έχουν σχηματιστεί $k = 3{,}5$ στάσιμα κύματα. Το καθένα από αυτά έχει μήκος κύματος $\frac{\lambda}{2}$, οπότε το μήκος του σχοινιού και το μήκος κύματος θα συνδέονται με την πρακτική σχέση:

$$\ell = k\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \ell = 3{,}5\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2\ell}{3{,}5} \Rightarrow \lambda = 4\ \text{m}$$

δ. Από τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} \Rightarrow f = \frac{4\ \text{m/s}}{4\ \text{m}} \Rightarrow f = 1\ \text{Hz}$$

8.41 **Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο με τον κατάλληλο τρόπο δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα. Στη θέση $x = 0$ εμφανίζεται κοιλία και το σημείο O του μέσου στη θέση αυτή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο $x = 0$ βρίσκεται στη θέση μηδενικής απομάκρυνσης κινούμενο κατά τη θετική φορά. Η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης του σημείου O είναι 0,2 m. Το σημείο αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 20 φορές κάθε δευτερόλεπτο και απέχει κατά τον άξονα x απόσταση 0,1 m από τον πλησιέστερο δεσμό.**

α. Να υπολογίσετε την περίοδο T του κύματος.

Στάσιμο κύμα
- Πλάτος από την απόσταση των ακραίων θέσεων σημείου του μέσου.
- Συχνότητα από το πλήθος περασμάτων από τη θέση ισορροπίας.

Περίοδος από το πλήθος περασμάτων ανά 1 s από τη Θ.Ι.
Καθώς ταλαντώνεται ένα σημείο του μέσου στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, σε χρόνο μιας περιόδου T διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 2 φορές. Επομένως στα N περάσματα από τη Θ.Ι. αντιστοιχούν $\frac{N}{2}$ περίοδοι, δηλαδή ο χρόνος του 1 s στον οποίο γίνονται τα N περάσματα αντιστοιχεί σε $\frac{N}{2}$ περιόδους T. Δηλαδή:

$$\frac{N}{2} \cdot T = 1\ s$$

Από την τελευταία σχέση υπολογίζεται η περίοδος T του κύματος.

Υπολογισμός του πλάτους από την απόσταση των ακραίων θέσεων σημείου-κοιλίας του στάσιμου κύματος
Δείτε προσεκτικά το στιγμιότυπο στάσιμου κύματος του διπλανού σχήματος (ερώτημα γ). Σε αυτό φαίνεται ότι οι αποστάσεις K και Λ της ταλάντωσης του σημείου-κοιλίας O απέχουν μεταξύ τους απόσταση $(K\Lambda) = 2A'$. Αλλά επειδή $A' = 2A$, προκύπτει ότι $(K\Lambda) = 4A$ (1). Έτσι, αν δίνεται η απόσταση των ακραίων θέσεων ενός σημείου-κοιλίας στάσιμου κύματος, με τη βοήθεια της σχέσης (1) βρίσκουμε το πλάτος A των τρεχόντων κυμάτων που από τη συμβολή τους προκύπτει το στάσιμο κύμα.

β. **Να υπολογίσετε το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων από τα οποία δημιουργείται το στάσιμο.**

γ. **Να προσδιορίσετε το πλάτος A αυτών των τρεχόντων κυμάτων.**

δ. **Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.**

λύση

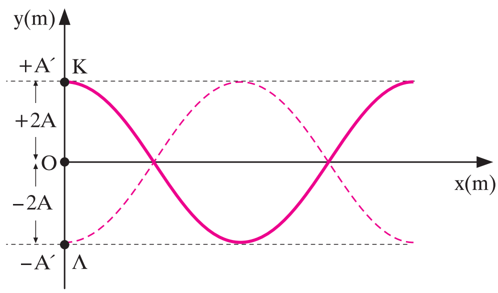
α. Το σημείο που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 20 φορές κάθε 1 s. Μέσα σε χρόνο μιας περιόδου το σημείο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 2 φορές, άρα στα 20 περάσματα αντιστοιχούν 10 περίοδοι, δηλαδή ο χρόνος του 1 s στον οποίο γίνονται τα 20 περάσματα αντιστοιχεί σε 10 περιόδους T. Άρα:

$$10T = 1\ s \Rightarrow T = 0{,}1\ s$$

β. Η απόσταση μιας κοιλίας από τον πλησιέστερό της δεσμό είναι ίση με $\frac{\lambda}{4}$ και επομένως στην περίπτωσή μας ισχύει ότι:

$$\frac{\lambda}{4} = 0{,}1\ m \Rightarrow \lambda = 0{,}4\ m$$

γ. Παρατηρήστε προσεκτικά το στιγμιότυπο στάσιμου κύματος του σχήματος.



Σε αυτό φαίνεται ότι οι ακραίες θέσεις K και Λ της ταλάντωσης του σημείου-κοιλίας O απέχουν μεταξύ τους απόσταση $(K\Lambda) = 2A'$. Αλλά επειδή $A' = 2A$, προκύπτει ότι:

$$(K\Lambda) = 4A \Rightarrow 4A = 0{,}2\ m \Rightarrow A = 0{,}05\ m$$

δ. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος έχει τη μορφή:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi}{T} t$$

Γνωρίζοντας ότι $A = 0{,}05$ m, $\lambda = 0{,}4$ m και $T = 0{,}1$ s, αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$y = 2 \cdot 0{,}05\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x}{0{,}4} \eta\mu \frac{2\pi}{0{,}1} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0{,}1\sigma\upsilon\nu 5\pi x \eta\mu 20\pi t \qquad \text{(S.I.)}$$

8.42 **Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο δημιουργείται στάσιμο κύμα μήκους κύματος $\lambda_{\sigma\tau} = 0{,}2$ m. Στην αρχή μέτρησης των αποστάσεων ($x = 0$) σχηματίζεται κοιλία. Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση $x_\Sigma = +0{,}68$ m (απέχει απόσταση 0,68 m από το Ο προς τη θετική κατεύθυνση).**

α. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των δεσμών που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ.

β. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των κοιλιών που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ.

γ. Να βρείτε τις αποστάσεις των δεσμών και των κοιλιών από την αρχή Ο μέτρησης των αποστάσεων (θέση με $x = 0$).

Μάθε να προσδιορίζεις τον αριθμό δεσμών και κοιλιών που υπάρχουν σε δεδομένη απόσταση d από το σημείο αναφοράς Ο (x=0).

λύση

α. Αφού το μήκος κύματος του στάσιμου κύματος είναι $\lambda_{\sigma\tau} = 0{,}2$ m, το μήκος κύματος λ των τρεχόντων αρμονικών κυμάτων που από τη συμβολή τους προκύπτει το στάσιμο θα είναι $\lambda = 2\lambda_{\sigma\tau} \Rightarrow \lambda = 0{,}4$ m.

Για τις θέσεις των δεσμών ισχύει:

$$x_\delta = (2K + 1)\frac{\lambda}{4}, \quad \mu\varepsilon\ K = 0, 1, 2, \ldots$$

(παίρνουμε μόνο θετικές τιμές του Κ, εφόσον πρόκειται για τον θετικό ημιάξονα).

Πρέπει όμως να ισχύει:

$$0 \le x_\delta \le x_\Sigma \text{ ή } 0 \le (2K+1)\cdot 0{,}1 \le 0{,}68 \text{ ή}$$

$$0 \le 0{,}2K + 0{,}1 \le 0{,}68 \text{ ή } -0{,}1 \le 0{,}2K \le 0{,}58 \text{ ή}$$

$$-0{,}5 \le K \le 2{,}9$$

επομένως οι ακέραιες τιμές του K είναι:

$$K = 0, 1, 2$$

Σχηματίζονται δηλαδή **τρεις δεσμοί**, ένας για κάθε τιμή του K.

β. Για τις θέσεις των κοιλιών ισχύει:

$$x_\kappa = K\cdot\frac{\lambda}{2}, \text{ με } K = 0, 1, 2, \ldots$$

(παίρνουμε θετικές τιμές για το K, εφόσον πρόκειται για τον θετικό ημιάξονα).

Πρέπει όμως να ισχύει:

$$0 \le x_\kappa \le x_\Sigma \text{ ή } 0 \le K\cdot 0{,}2 \le 0{,}68 \text{ ή } 0 \le K \le 3{,}4$$

επομένως $K = 0, 1, 2, 3$, δηλαδή σχηματίζονται **4 κοιλίες** (μαζί με το O).

γ. • *Θέσεις των δεσμών*

Στο σημείο O έχουμε κοιλία. Τις αποστάσεις των τριών δεσμών από το O θα μας τις δώσει η σχέση:

$$x = (2K+1)\frac{\lambda}{4} \text{ για } K = 0,\ K = 1 \text{ και } K = 2$$

– Για $K = 0$ έχουμε:

$$x_{\Delta_1} = (2\cdot 0 + 1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} = \frac{0{,}4}{4} \Rightarrow x_{\Delta_1} = 0{,}1 \text{ m}$$

– Για $K = 1$:

$$x_{\Delta_2} = (2\cdot 1 + 1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_{\Delta_2} = 0{,}3 \text{ m}$$

– Για $K = 2$:

$$x_{\Delta_3} = (2\cdot 2 + 1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_{\Delta_3} = 0{,}5 \text{ m}$$

Αριθμός δεσμών ή κοιλιών που υπάρχουν σε δεδομένη απόσταση

• Τον αριθμό των δεσμών που υπάρχουν σε δεδομένη απόσταση d από το σημείο O ($x = 0$) τον προσδιορίζουμε βρίσκοντας πόσες τιμές του ακεραίου K επαληθεύουν τη διπλή ανισότητα:

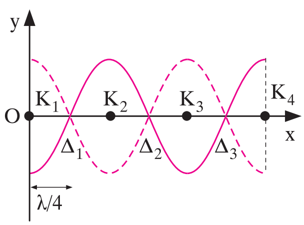
$$0 \le (2K+1)\frac{\lambda}{4} \le d$$

$K = 0, 1, 2, 3, \ldots$

• Τον αριθμό των κοιλιών που υπάρχουν σε δεδομένη απόσταση d από το σημείο O ($x = 0$) τον προσδιορίζουμε βρίσκοντας πόσες τιμές του ακεραίου K επαληθεύουν τη διπλή ανισότητα:

$$0 \le K\frac{\lambda}{2} \le d$$

με $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$



- *Θέσεις των κοιλιών*

  Τις αποστάσεις των τεσσάρων κοιλιών από το Ο θα μας τις δώσει η σχέση $x = K \cdot \frac{\lambda}{2}$ για $K = 0, 1, 2, 3$.

  – Για $K = 0$:
  $$x_{K_1} = 0 \cdot \frac{\lambda}{2} = 0\ \text{m}\ (\text{σημείο O})$$
  – Για $K = 1$:
  $$x_{K_2} = 1 \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_{K_2} = 0{,}2\ \text{m}$$
  – Για $K = 2$:
  $$x_{K_3} = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_{K_3} = 0{,}4\ \text{m}$$
  – Για $K = 3$:
  $$x_{K_4} = 3 \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_{K_4} = 0{,}6\ \text{m}$$

8.43 **Σε γραμμικό ελαστικό μέσο δημιουργείται στάσιμο κύμα συχνότητας $f = 10$ Hz και μέγιστου πλάτους $A' = 0{,}2$ m. Στην αρχή Ο μέτρησης των αποστάσεων ($x = 0$) σχηματίζεται κοιλία, ενώ ο πλησιέστερος στο Ο δεσμός απέχει από αυτό απόσταση $x_1 = 0{,}1$ m.**

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ και την ταχύτητα διάδοσης υ των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος στον θετικό ημιάξονα Οx τη στιγμή που τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας και το σημείο Ο στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

Μάθε να σχεδιάζεις το στιγμιότυπο στάσιμου κύματος.

λύση

α. Ο πλησιέστερος δεσμός απέχει από το Ο απόσταση $\frac{\lambda}{4}$, επομένως $\frac{\lambda}{4} = 0{,}1\ \text{m} \Rightarrow \lambda = 0{,}4$ m. Από τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε:
$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = 0{,}4\ \text{m} \cdot 10\ \text{s}^{-1} \Rightarrow \upsilon = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β. Για το στιγμιότυπο του κύματος εργαζόμαστε ως εξής:

- Ερμηνεύουμε την έκφραση: «*Τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε μέγιστη δυναμική ενέργεια*». Η έκφραση αυτή σημαίνει ότι βρίσκονται στη θέση μέγιστης θετικής ή αρνητικής απομάκρυνσης που μπορεί να φτάσει το καθένα. Το σημείο Ο ($x = 0$) που είναι κοιλία δόθηκε ότι είναι στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσής του.
- Βρίσκουμε τα σημεία των δεσμών στον θετικό ημιάξονα Ox (δηλαδή βρίσκουμε τις αποστάσεις τους από το Ο).

  Οι αποστάσεις αυτές προκύπτουν από τη σχέση:

  $$x_\delta = (2K+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_\delta = (2K+1)\cdot 0{,}1 \qquad \text{(S.I.)}$$

  με $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$

  Για $K = 0$: $x_\delta = 0{,}1$ m $\quad \Delta_1$

  Για $K = 1$: $x_\delta = 0{,}3$ m $\quad \Delta_2$

  Για $K = 2$: $x_\delta = 0{,}5$ m $\quad \Delta_3$

  Για $K = 3$: $x_\delta = 0{,}7$ m $\quad \Delta_4$

  Για $K = 4$: $x_\delta = 0{,}9$ m $\quad \Delta_5$ κτλ.

  (αύξηση από δεσμό σε δεσμό κατά 0,2 m).
- Βρίσκουμε τα σημεία των κοιλιών στον θετικό ημιάξονα Ox (δηλαδή βρίσκουμε τις αποστάσεις τους από το Ο).

  Οι αποστάσεις αυτές προκύπτουν από τη σχέση:

  $$x_\kappa = K\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_\kappa = K\cdot 0{,}2 \qquad \text{(S.I.)}$$

  με $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$

  Για $K = 0$: $x_\kappa = 0$ m $\quad$ (σημείο Ο) K_1

  Για $K = 1$: $x_\kappa = 0{,}2$ m $\quad K_2$

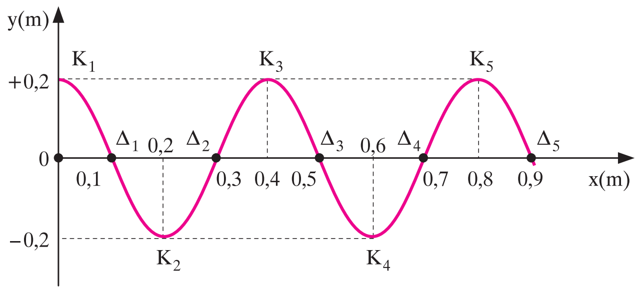
  Για $K = 2$: $x_\kappa = 0{,}4$ m $\quad K_3$

  Για $K = 3$: $x_\kappa = 0{,}6$ m $\quad K_4$

  Για $K = 4$: $x_\kappa = 0{,}8$ m $\quad K_5$ κτλ.

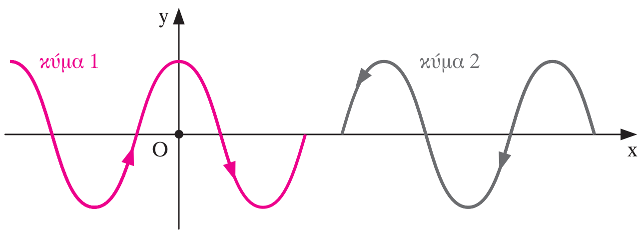
  (αύξηση κατά 0,2 m από κοιλία σε κοιλία).

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει εύκολα το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος που φαίνεται παρακάτω.



8.44 **Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα πλάτους $A = 0,2$ m, περιόδου $T = 0,1$ s, με αντίθετες κατευθύνσεις, με ταχύτητες ίσου μέτρου $υ = 20\ \frac{m}{s}$, όπως στο σχήμα.**

Πώς θα βρίσκεις αν είναι δεσμός ή κοιλία ένα σημείο Κ με γνωστή τετμημένη x_K.



Στο σημείο αναφοράς Ο ($x = 0$) οι απομακρύνσεις κάθε κύματος ξεχωριστά περιγράφονται από την εξίσωση:

$$y = Aημ\frac{2π}{T}t$$

α. **Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ των αρμονικών κυμάτων.**

β. **Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή τους.**

γ. **Να διερευνήσετε αν τα σημεία Β ($x_B = -1,5$ m) και Γ ($x_Γ = +2,5$ m) είναι κοιλίες ή δεσμοί.**

δ. **Να κάνετε το ίδιο και για τα σημεία Κ ($x_K = -2$ m) και Λ ($x_Λ = +3$ m).**

Λύση

α. Επειδή τα δύο τρέχοντα κύματα έχουν ίδια ταχύτητα και ίδια περίοδο, θα έχουν και ίδιο μήκος κύματος λ. Από τον θεμελιώδη νόμο της κυματικής έχουμε:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow \upsilon = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = \upsilon T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 20\ \frac{m}{s} \cdot 0{,}1\ s \Rightarrow \lambda = 2\ m$$

β. Η γενική σχέση που περιγράφει το στάσιμο κύμα με τις αρχικές συνθήκες αυτού του προβλήματος είναι:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\lambda}x\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$$

Αντικαθιστούμε σ' αυτήν όπου $A = 0{,}2$ m, $\lambda = 2$ m, $T = 0{,}1$ s και έχουμε:

$$y = 0{,}4\sigma\upsilon\nu\pi x\eta\mu 20\pi t \qquad (S.I.)$$

Πώς θα βρίσκετε αν είναι δεσμός ή κοιλία ένα σημείο Κ με γνωστή τετμημένη x_K

Ένας τρόπος για να βρίσκουμε αν ένα σημείο είναι δεσμός ή κοιλία είναι να αντικαθιστούμε στη σχέση του πλάτους:

$$|A'| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\right|$$

όπου x την τετμημένη αυτού του σημείου.

- Αν προκύψει $|A'| = 0$, το σημείο αυτό θα είναι δεσμός.
- Αν προκύψει $|A'| = 2A$, το σημείο αυτό θα είναι κοιλία.
- Αν προκύψει $0 < |A'| < 2A$, τότε το σημείο αυτό είναι ενδιάμεσο, δηλαδή ούτε δεσμός ούτε κοιλία. (Ταλαντώνεται με ενδιάμεσο πλάτος.)

γ. Το πλάτος A' του στάσιμου κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$|A'| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu\pi x| \qquad (1)$$

- Για $x = x_B = -1{,}5$ m έχουμε:

$$|A'_B| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu\pi(-1{,}5)| = 0{,}4\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow A'_B = 0$$

Επομένως το σημείο Β είναι δεσμός.

- Για $x = x_\Gamma = +2{,}5$ m έχουμε:

$$|A'_\Gamma| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu\pi(2{,}5)| = 0{,}4\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{2} \Rightarrow A'_\Gamma = 0$$

Επομένως και το σημείο Γ με $x_\Gamma = +2{,}5$ m είναι δεσμός.

δ. • Για $x = x_K = -2$ m, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$|A'_K| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu\pi(-2)| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu(-2\pi)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'_K = 0{,}4\ m = 2 \cdot 0{,}2 = 2A = A'$$

Επομένως το σημείο Κ με $x_K = -2$ m είναι κοιλία.

- Για $x = x_\Lambda = +3$ m έχουμε:

$$|A'_\Lambda| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu\pi(3)| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu3\pi| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A'_\Lambda| = 0{,}4\text{ m} = 2A = A'$$

Άρα και το σημείο Λ με $x_\Lambda = +3$ m είναι κοιλία.

8.45 **Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με εξίσωση:**

$$\mathbf{y = 0{,}4\sigma\upsilon\nu2\pi x\eta\mu20\pi t} \qquad \text{(S.I.)}$$

Ένα υλικό σημείο Λ του γραμμικού μέσου απέχει απόσταση $x_\Lambda = +0{,}125$ m από το σημείο Ο (x = 0). Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σημείου Λ τη στιγμή που η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής της.

Εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ. στα στάσιμα κύματα.

λύση

Να δείτε οπωσδήποτε και το διπλανό σχόλιο-«κλειδί».

- Βρίσκουμε πρώτα ποια είναι η μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο Λ (συμμετέχοντας στη συλλογική ταλάντωση των σημείων του γραμμικού μέσου, που είναι το στάσιμο κύμα).

  Έχουμε:

$$|A'| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu2\pi x| \xRightarrow{(x=x_\Lambda)} |A'_\Lambda| = |0{,}4\sigma\upsilon\nu2\pi x_\Lambda| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A'_\Lambda| = |0{,}4\cdot\sigma\upsilon\nu2\pi\cdot0{,}125| =$$

$$= |0{,}4\sigma\upsilon\nu0{,}25\pi| = \left|0{,}4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A'_\Lambda| = 0{,}4\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |A'_\Lambda| = 0{,}2\sqrt{2}\text{ m}$$

Τη στιγμή στην οποία αναφερόμαστε έχουμε ότι:

$$y_\Lambda = \frac{1}{2}|A'_\Lambda| \Rightarrow y_\Lambda = 0{,}1\sqrt{2}\text{ m}$$

Εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ. στα στάσιμα κύματα

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός υλικού σημείου του μέσου στο οποίο εξελίσσεται στάσιμο κύμα κάποια στιγμή:

- Αντικαθιστούμε την τετμημένη x_K του σημείου στη σχέση:

$$|A'_K| = \left|2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$$

στη θέση του x.
Έτσι βρίσκουμε με τι πλάτος συμμετέχει στη συλλογική ταλάντωση του στάσιμου κύματος το σημείο Κ.

- Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ενέργειας ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) για την ταλάντωση του σημείου Κ:

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dy_K^2 = \frac{1}{2}D|A'_K|^2$$

- Λύνουμε ως προς υ ή, αν δίνεται η ταχύτητα υ, ως προς y_K.

- Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ενέργειας ταλάντωσης (Α.Δ.Ε.Τ.) για την ταλάντωση του σημείου Λ. Έχουμε:

$$K + U = E_{ολ} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dy_\Lambda^2 = \frac{1}{2}D|A'_\Lambda|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y_\Lambda^2 = \frac{1}{2}m\omega^2|A'_\Lambda|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \pm\omega\sqrt{|A'_\Lambda|^2 - y_\Lambda^2}$$

Το μέτρο της ταχύτητας που ζητάμε θα είναι:

$$\upsilon = \omega\sqrt{|A'_\Lambda|^2 - y_\Lambda^2}$$

Επειδή όμως είναι $y_\Lambda = \dfrac{|A'_\Lambda|}{2}$, έχουμε:

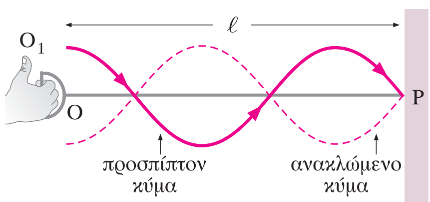
$$\upsilon = 20\pi\sqrt{|A'_\Lambda|^2 - \frac{|A'_\Lambda|^2}{4}} \Rightarrow \upsilon = 20\pi\frac{|A'_\Lambda|}{2}\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = 20\pi \cdot 0{,}1\sqrt{2}\sqrt{3}\ \frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon = 2\sqrt{6}\pi\ \frac{m}{s}$$

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

8.46 Δείτε προσεκτικά το παρακάτω σχήμα. Θέτοντας με το χέρι μας τη λαβή της ελεύθερης άκρης του σχοινιού σε μια κατακόρυφη αρμονική ταλάντωση, δημιουργήσαμε πάνω στο σχοινί ένα αρμονικό κύμα.



Το κύμα αυτό πέφτει κάθετα στο σημείο Ρ του τοίχου και ανακλώμενο συμβάλλει κάθε φορά με το επόμενο κύμα που έρχεται προς τον τοίχο, δημιουργώντας έτσι ένα στάσιμο κύμα πάνω στο σχοινί, του οποίου ένα στιγμιότυπο φαίνεται.

α. Να αιτιολογήσετε τη μορφή που παρουσιάζει αυτό το στάσιμο κύμα στις άκρες του.

β. Πόση είναι η μεταβολή της φάσης του προσπίπτοντος κύματος στο σημείο Ρ;

γ. Αν το σχοινί έχει μήκος $\ell = 5$ m, να βρείτε το μήκος κύματος λ του τρέχοντος αρμονικού κύματος που δημιουργήσαμε στο σχοινί με την ταλάντωση του χεριού μας.

δ. Αν το παραπάνω τρέχον αρμονικό κύμα διαδίδεται στο σχοινί με ταχύτητα $\upsilon = 2\ \frac{m}{s}$, να βρείτε τη συχνότητά του f.

ε. Αν η απόσταση $(OO_1) = 0{,}4$ m, να γράψετε την εξίσωση $y = f(t, x)$ για το ανακλώμενο κύμα. (Δείτε πάλι το σχήμα.)

8.47 Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο, με τον κατάλληλο τρόπο δημιουργείται ένα στάσιμο κύμα. Στη θέση $x = 0$ εμφανίζεται κοιλία και το σημείο Ο του μέσου στη θέση αυτή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο $x = 0$ βρίσκεται στη θέση μηδενικής απομάκρυνσης κινούμενο κατά τη θετική φορά. Η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσής του είναι 0,4 m. Το σημείο αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 10 φορές κάθε δευτερόλεπτο και απέχει κατά τον άξονα x απόσταση 0,05 m από τον πλησιέστερο δεσμό.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο Τ του κύματος.

β. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος των τρεχόντων κυμάτων από τα οποία δημιουργείται το στάσιμο.

γ. Να προσδιορίσετε το πλάτος Α αυτών των τρεχόντων κυμάτων.

δ. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

8.48 Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο δημιουργήθηκε ένα στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = A'\sigma\upsilon\nu 2\pi x\eta\mu 20\pi t \qquad (S.I.)$$

Στο σημείο Ο $(x = 0)$ εμφανίζεται κοιλία και η απόσταση των ακραίων θέσεων της αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σημείο αυτό είναι 0,6 m.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο Τ του κύματος.

β. Να υπολογίσετε την απόσταση d μεταξύ του σημείου Ο $(x = 0)$ και του τρίτου δεσμού του στάσιμου κύματος κατά τη θετική κατεύθυνση Οx.

γ. Αν καθένα από τα τρέχοντα κύματα που από τη συμβολή τους προέκυψε το στάσιμο εξαναγκάζει το σημείο Ο σε ταλάντωση της μορφής $y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$, να γράψετε τις εξισώσεις $y = f(t, x)$ αυτών των δύο τρεχόντων κυμάτων.

8.49 Σε γραμμικό ελαστικό μέσο δημιουργείται στάσιμο κύμα μήκους κύματος $\lambda_{\sigma\tau} = 0{,}1$ m. Στην αρχή Ο μέτρησης των αποστάσεων $(x = 0)$ σχηματίζεται κοιλία. Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση $x_\Sigma = +0{,}52$ m.

α. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των δεσμών που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ.

β. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των κοιλιών που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ.

8.50 Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο δημιουργήθηκε ένα στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = 0{,}4\sigma\upsilon\nu 5\pi x\eta\mu 10\pi t \qquad (S.I.)$$

Στο σημείο Ο $(x = 0)$ εμφανίζεται κοιλία και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αυτό βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο T και τη συχνότητα f αυτού του κύματος.

β. Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση $x_Σ = +0{,}82$ m. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των δεσμών και τον αριθμό των κοιλιών που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ.

γ. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Κ με $x_K = -0{,}68$ m και Λ με $x_Λ = +0{,}94$ m.

8.51 Σε γραμμικό ελαστικό μέσο δημιουργείται στάσιμο κύμα, συχνότητας $f = 20$ Hz και μέγιστου πλάτους $A' = 0{,}4$ m. Στην αρχή Ο μέτρησης των αποστάσεων ($x = 0$) σχηματίζεται κοιλία, ενώ ο πλησιέστερος στο Ο δεσμός απέχει από αυτό απόσταση $x_1 = 0{,}05$ m.

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ και την ταχύτητα διάδοσης υ των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

β. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος στον θετικό ημιάξονα Οx τη στιγμή που τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας και το σημείο Ο στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

8.52 Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο δημιουργείται στάσιμο κύμα συχνότητας $f = 5$ Hz. Το σημείο Ο, με $x = 0$, εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση $y = Aημ\frac{2π}{T}t$, η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης που εκτελεί είναι 0,4 m και η απόστασή του από τον πιο κοντινό δεσμό είναι $x_1 = 0{,}1$ m.

α. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης υ των τρεχόντων κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

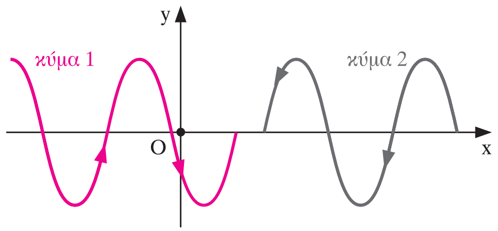
β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

γ. Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση $x_Σ = +0{,}74$ m. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των δεσμών και τον αριθμό των κοιλιών που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ.

δ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος στον θετικό ημιάξονα Οx τη στιγμή που τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε θέση μέγιστης δυναμικής ενέργειας και το σημείο Ο στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

ε. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος στον θετικό ημιάξονα Οx τη στιγμή που τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται σε θέση μέγιστης κινητικής ενέργειας.
Για μια απόσταση $d = 2λ$, να προσδιορίσετε τη φορά κίνησης των σημείων του μέσου στα οποία εμφανίζεται κοιλία σχεδιάζοντας μικρά βελάκια.

8.53 Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους $A = 0{,}15$ m, περιόδου $T = 0{,}2$ s, με αντίθετες ταχύτητες μέτρου $υ = 10\ \frac{m}{s}$ όπως στο σχήμα.



Στο σημείο αναφοράς Ο (x = 0) οι απομακρύνσεις κάθε κύματος ξεχωριστά περιγράφονται από την εξίσωση:

$$y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$$

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος λ των αρμονικών κυμάτων.

β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από τη συμβολή τους.

γ. Να διερευνήσετε αν το σημείο Β ($x_B = -3{,}5$ m) και το σημείο Γ ($x_\Gamma = +0{,}5$ m) είναι κοιλίες ή δεσμοί.

δ. Να κάνετε το ίδιο και για τα σημεία Κ ($x_K = -3$ m) και Λ ($x_\Lambda = +1$ m).

ε. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των δεσμών που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Κ και Λ.

8.54 Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = 0{,}2\sigma\upsilon\nu 10\pi x\eta\mu 10\pi t \qquad \text{(S.I.)}$$

Ένα υλικό σημείο Λ του γραμμικού μέσου απέχει απόσταση $x_\Lambda = +0{,}025$ m από το σημείο Ο (x = 0). Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σημείου Λ τη στιγμή που η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής της.

8.55 Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = 0{,}4\sigma\upsilon\nu 2\pi x\eta\mu 20\pi t \qquad \text{(S.I.)}$$

Ένα υλικό σημείο Κ του γραμμικού μέσου απέχει απόσταση $x_1 = +0{,}125$ m από το σημείο Ο. Να υπολογίσετε την απομάκρυνση y_K του σημείου Κ από τη θέση ισορροπίας του κάποια στιγμή που η ταχύτητά του έχει μέτρο $\upsilon_K = 2\sqrt{6}\pi\ \frac{m}{s}$.

8.56 Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο δημιουργήθηκε ένα στάσιμο κύμα. Στη θέση x = 0 εμφανίζεται κοιλία και το σημείο Ο του μέσου στη θέση αυτή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σημείο x = 0 βρίσκεται στη θέση μηδενικής απομάκρυνσης κινούμενο κατά τη θετική φορά. Η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσής του είναι 0,2 m. Το σημείο αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 20 φορές κάθε δευτερόλεπτο και απέχει κατά τον άξονα x απόσταση 0,1 m από την αμέσως επόμενη κοιλία.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο Τ του κύματος.

β. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης υ των τρεχόντων κυμάτων από τα οποία δημιουργείται το στάσιμο.

γ. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

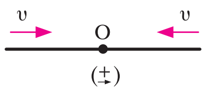
δ. Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση $x_\Sigma = +0{,}78$ m. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των δεσμών και των κοιλιών που σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ.

ε. Να διερευνήσετε αν το σημείο Β ($x_B = -0{,}25$ m) και το σημείο Γ ($x_Γ = +0{,}35$ m) είναι δεσμοί.

στ. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή που το μέτρο της δύναμης επαναφοράς που δέχονται τα σημεία που ταλαντώνονται είναι μέγιστο και το σημείο Ο βρίσκεται στη μέγιστη θετική του απομάκρυνση.

ζ. Ένα υλικό σημείο Λ του γραμμικού μέσου απέχει απόσταση $x_Λ = +0{,}025$ m από το σημείο Ο. Η μάζα αυτού του υλικού σημείου είναι $m = 4 \cdot 10^{-4}$ kg. Να υπολογίσετε την κινητική του ενέργεια τη στιγμή που η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του ισούται με το μισό της μέγιστης τιμής της. ($\pi^2 \simeq 10$.)

Και άλλα λυμένα παραδείγματα σε δεύτερο επίπεδο



8.57 Δημιουργία ενός στάσιμου κύματος.

Κατά μήκος ενός σχοινιού κινούνται δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα σε αντίθετες διευθύνσεις. Καθένα από αυτά έχει πλάτος $A = 0{,}2$ m, ταχύτητα $υ = 0{,}2$ m/s και μήκος κύματος $λ = 0{,}1$ m. Η αρχική φάση και των δύο κυμάτων είναι $φ_0 = 0$.

α. **Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των δύο κυμάτων που διατρέχουν το σχοινί.**

β. **Να προσδιορίσετε την εξίσωση του κύματος που προκύπτει στο σχοινί.**

γ. **Να σχεδιάσετε το σχήμα (στιγμιότυπο) ενός τμήματος του σχοινιού με μήκος ίσο με ένα μήκος κύματος τη χρονική στιγμή $t = 0{,}625$ s.**

λύση

α. Το ένα κύμα κινείται κατά τη θετική φορά και θα έχει εξίσωση:

$$y_1 = Aημ2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{λ}\right) \qquad (1)$$

Το άλλο κύμα κινείται κατά την αρνητική φορά, οπότε θα έχει εξίσωση:

δ. έχουν την ίδια φάση.

Εξετάσεις 2006 (Ημερήσιου Λυκείου)

8.72 Τα σημεία ενός γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου στο οποίο έχει δημιουργηθεί στάσιμο εγκάρσιο κύμα και τα οποία βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών έχουν:

α. διαφορετική περίοδο ταλάντωσης.
β. διαφορετική συχνότητα ταλάντωσης.
γ. διαφορά φάσης π (rad).
δ. ίδια φάση.

Εξετάσεις 2006 (Αποδήμων)

3ο-4ο ΘΕΜΑ

8.73 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους 0,08 m και μήκους κύματος 2 m διαδίδεται κατά τη θετική φορά σε οριζόντια ελαστική χορδή που εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x′x. Θεωρούμε ότι το σημείο της χορδής στη θέση $x = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει μηδενική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του και θετική ταχύτητα. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $100\ \frac{m}{s}$.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται τα σημεία της χορδής.
β. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος στο S.I.
γ. Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης στοιχειώδους τμήματος της χορδής μάζας 0,002 kg. (Να θεωρήσετε το στοιχειώδες τμήμα της χορδής ως υλικό σημείο.)
δ. Έστω ότι στην παραπάνω χορδή διαδίδεται ταυτόχρονα άλλο ένα κύμα πανομοιότυπο με το προηγούμενο, αλλά αντίθετης φοράς, και δημιουργείται στάσιμο κύμα με κοιλία στη θέση $x = 0$. Να υπολογίσετε στον θετικό ημιάξονα τη θέση του 11ου δεσμού του στάσιμου κύματος από τη θέση $x = 0$.
Δίνεται $\pi^2 = 10$.

Εξετάσεις 2003
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)
(3ο θέμα)

8.74 Η μία άκρη ενός τεντωμένου σχοινιού είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο και η ελεύθερη άκρη εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, οπότε σχηματίζεται στάσιμο κύμα με εξίσωση:

$$y = 0{,}4\sigma\upsilon\nu 10\pi x \eta\mu 40\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Α. Να υπολογίσετε το πλάτος και το μήκος κύματος για το κύμα, από το οποίο προκύπτει το στάσιμο.
Β. Να υπολογίσετε σε πόση απόσταση από την ελεύθερη άκρη του σχοινιού σχηματίζεται ο τρίτος δεσμός του στάσιμου κύματος.

Εξετάσεις 2003 (Αποδήμων)
(3ο θέμα)

8.75 Ένα τεντωμένο οριζόντιο σχοινί ΟΑ μήκους L εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x. Το άκρο του Α είναι στερεωμένο ακλόνητα στη θέση $x = L$, ενώ το άκρο Ο που βρίσκεται στη θέση $x = 0$ είναι ελεύθερο, έτσι ώστε με κατάλληλη διαδικασία να δημιουργείται στάσιμο κύμα με 5 συνολικά κοιλίες.

Στη θέση x = 0 εμφανίζεται κοιλία και το σημείο του μέσου στη θέση αυτή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σημείο x = 0 βρίσκεται στη θέση μηδενικής απομάκρυνσης κινούμενο κατά τη θετική φορά. Η απόσταση των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης αυτού του σημείου του μέσου είναι 0,1 m. Το συγκεκριμένο σημείο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του 10 φορές κάθε δευτερόλεπτο και απέχει κατά τον άξονα x απόσταση 0,1 m από τον πλησιέστερο δεσμό.

α. Να υπολογίσετε την περίοδο του κύματος.

β. Να υπολογίσετε το μήκος L του σχοινιού.

γ. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

δ. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου του μέσου x = 0 κατά τη χρονική στιγμή που η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας έχει τιμή y = +0,03 m.

Δίνεται π = 3,14.

Εξετάσεις 2004
(Ημερήσιου Λυκείου)
(3ο θέμα)

8.76 Κατά μήκος του άξονα x′x εκτείνεται ελαστική χορδή. Στη χορδή διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Η εγκάρσια απομάκρυνση ενός σημείου Π_1 της χορδής περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y_1 = A\eta\mu 30\pi t \quad (S.I.)$$

ενώ η εγκάρσια απομάκρυνση ενός σημείου Π_2, που βρίσκεται 6 cm δεξιά του σημείου Π_1, περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y_2 = A\eta\mu\left(30\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \quad (S.I.)$$

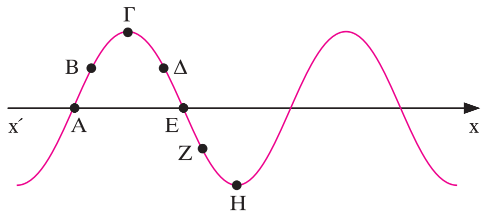
Η απόσταση μεταξύ των σημείων Π_1 και Π_2 είναι μικρότερη από ένα μήκος κύματος.

α. Ποια είναι η φορά διάδοσης του κύματος;

β. Ποια είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος;

γ. Αν η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων της χορδής, να υπολογίσετε το πλάτος του κύματος.

δ. Στο σχήμα που ακολουθεί, απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο του κύματος.



Εκείνη τη στιγμή σε ποια από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ και Η η ταχύτητα ταλάντωσης είναι μηδενική και σε ποια είναι μέγιστη (κατ’ απόλυτη τιμή); Ποια είναι η φορά της ταχύτητας της ταλάντωσης των σημείων Β, Δ και Ζ;

ε. Να γράψετε την εξίσωση του κύματος που, όταν συμβάλλει με το προηγούμενο, δημιουργεί στάσιμο κύμα.

Δίνεται π = 3,14.

Εξετάσεις 2005
(Ημερήσιου Λυκείου)
(3ο θέμα)

ρίσετε την εξίσωση της μεταβολής της μαγνητικής έντασης του αρμονικού κύματος κατά τη διεύθυνση x.

9.48 Ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει συχνότητα $f = 10^{10}$ Hz και πλάτος ηλεκτρικού πεδίου $E_{max} = 1.200\ \frac{N}{C}$. Η ταχύτητά του είναι $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$. Δίνεται ότι τα πλάτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου συνδέονται με τη σχέση $\frac{E_{max}}{B_{max}} = c$. Να γράψετε τις εξισώσεις $E = f(t,\ x)$ και $B = f(t,\ x)$ που περιγράφουν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

9.49 Ένας πομπός εκπέμπει με συχνότητα $f = 120$ MHz. Η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$.

α. Να προσδιορίσετε σε ποιο μήκος κύματος εκπέμπει ο σταθμός.

β. Η μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου του εκπεμπόμενου από τον σταθμό κύματος σε κάποια θέση είναι $E_{max} = 6 \cdot 10^{-3}\ \frac{V}{m}$. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου του κύματος σε εκείνη τη θέση.

γ. Ο δέκτης που επικοινωνεί με αυτόν τον πομπό περιλαμβάνει ηλεκτρικό κύκλωμα LC στο οποίο το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 25$ mH. Ποια τιμή πρέπει να έχει η χωρητικότητα του μεταβλητού πυκνωτή ώστε να συντονίζεται ο δέκτης σ' αυτόν τον σταθμό;

(Θεωρήστε ότι $\pi^2 \simeq 10$.)

9.50 Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox ενός τρισορθογώνιου συστήματος αξόνων Oxyz. Το μαγνητικό πεδίο του ηλεκτρομαγνητικού κύματος έχει τη διεύθυνση του άξονα των z και η μαγνητική του ένταση στην αρχή O των αξόνων δίνεται από τη σχέση:

$$B_z = 2 \cdot 10^{-6} ημ(2 \cdot 10^{10} \pi t) \qquad \text{(S.I.)}$$

Η ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$ και δίνεται ότι τα πλάτη E_{max} και B_{max} συνδέονται με τη σχέση $\frac{E_{max}}{B_{max}} = c$.

α. Να προσδιορίσετε τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος και να γράψετε την εξίσωση της έντασης του πεδίου αυτού σε ένα τυχαίο σημείο του άξονα Ox που απέχει απόσταση x από την πηγή O.

β. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ηλεκτρική δύναμη που δέχεται ηλεκτρικό φορτίο $q = 1\ \mu C$ το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα των x.

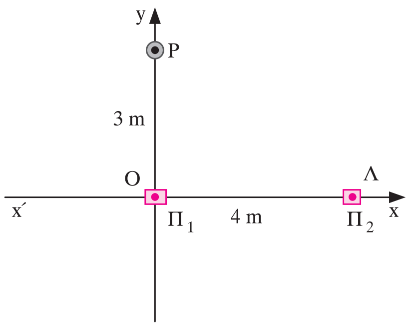
γ. Πόση είναι η μέγιστη δύναμη Lorentz που ασκείται σ' αυτό το ηλεκτρικό φορτίο q, αν κινηθεί στιγμιαία κατά μήκος του άξονα των x με ταχύτητα $\upsilon = 10^4\ \frac{m}{s}$;

9.51 ***Κινητή τηλεφωνία.*** Σε ένα δίκτυο κινητής τηλεφωνίας, μια κεραία μικροκυμάτων εκπέμπει ένα ημιτονοειδές ηλεκτρομαγνητικό κύμα με πλάτος ηλεκτρικού πεδίου $E_{max} = 4{,}5 \cdot 10^{-2}\ \frac{V}{m}$ σε κάποια θέση και μήκος κύματος $\lambda = 4$ cm. Το κύμα αυτό μεταδίδεται στο κενό με ταχύτητα $c = 3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε:

α. Τη συχνότητα f του κύματος.

β. Το πλάτος B_{max} του μαγνητικού πεδίου.

9.52 ***Συμβολή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.*** Δύο σύγχρονες πηγές ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων $Π_1$ και $Π_2$ βρίσκονται στη διεύθυνση του άξονα x′Ox όπως στο σχήμα.



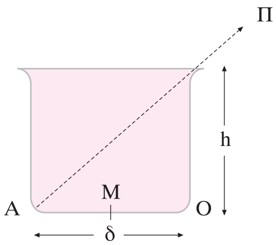
Οι δύο πηγές απέχουν απόσταση $(Π_1Π_2) = 4$ m. Ένας ανιχνευτής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων βρίσκεται στη θέση P πάνω στον θετικό ημιάξονα Oy. Η θέση αυτή απέχει από το O απόσταση (OP) = 3 m και είναι η πλησιέστερη θέση στο σημείο O, πάνω στον άξονα Oy, όπου ο ανιχνευτής εντοπίζει μέγιστο έντασης λόγω συμβολής των κυμάτων. Μεταξύ των πηγών, πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα OΛ υπάρχουν πέντε σημεία ενισχυτικής συμβολής. Η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό είναι $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος κύματος των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

β. Τη συχνότητά τους f.

Ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι $n_b = \frac{4}{3}$. Να υπολογίσετε την πραγματική γωνία στην οποία βρίσκεται ο ήλιος ως προς την κατακόρυφο.

10.64 Το δοχείο του σχήματος έχει ύψος $h = 10$ cm και διάμετρο βάσης $\delta = 10$ cm.



Όταν το δοχείο είναι άδειο, από τη θέση που βρίσκεται ο παρατηρητής Π βλέπει την άκρη Α του πυθμένα. Γεμίζουμε το δοχείο με υγρό και τότε, χωρίς να μετακινηθεί καθόλου ο παρατηρητής, βλέπει το μέσο Μ του πυθμένα. Να υπολογίσετε τον δείκτη διάθλασης του υγρού με το οποίο γεμίσαμε το δοχείο.

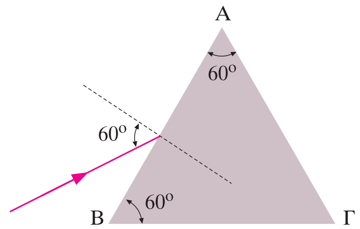
10.65 Μονοχρωματική ακτίνα μήκους κύματος στον αέρα $\lambda_0 = 560$ nm προσπίπτει προερχόμενη από τον αέρα σε ένα διαφανές μέσο. Η γωνία πρόσπτωσης είναι $\hat{\theta}_\alpha = 60°$ και η γωνία διάθλασης $\hat{\theta}_b = 45°$. Η ταχύτητα της ακτίνας στον αέρα είναι $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Να υπολογίσετε:

α. Τη συχνότητα της ακτίνας.

β. Το μήκος κύματος λ της ακτίνας στο διαφανές μέσο.

γ. Την ταχύτητά της στο διαφανές μέσο.

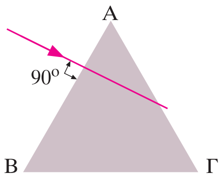
10.66 Πρίσμα από γυαλί έχει τομή ισόπλευρο τρίγωνο. Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού αυτού για το ιώδες είναι $n_\iota = 1{,}53$ και για το ερυθρό φως είναι $n_\varepsilon = 1{,}51$.



Λευκό φως προσπίπτει στο πρίσμα και η γωνία πρόσπτωσης είναι $\theta_\alpha = 60°$.
Να υπολογίσετε τη γωνία εκτροπής, δηλαδή τη γωνία που σχηματίζουν η ακτίνα του ιώδους με αυτή του ερυθρού όταν εξέρχονται από το πρίσμα.
(Υπόδειξη:
Εργαζόμενοι ανάλογα με το παράδειγμα 10.56 να υπολογίσετε τη γωνία φ_ι εξόδου του ιώδους και τη γωνία φ_ε εξόδου του ερυθρού από το πρίσμα. Είναι $\Delta\varphi = \varphi_\iota - \varphi_\varepsilon$.)

10.67 Να υπολογίσετε με τι τιμές γωνίας πρέπει να προσπέσει μια μονοχρωματική ακτίνα στη διαχωριστική επιφάνεια ενός διαφανούς υλικού και του αέρα ώστε να μην μπορεί να βγει από το υλικό αυτό στον αέρα. Ο δείκτης διάθλασης του υλικού είναι $n_\alpha = 1{,}6$ και δίνεται ότι ημ38,7° = 0,625.

10.68 Ακτίνα μονοχρωματικού φωτός προερχόμενη από τον αέρα πέφτει κάθετα στην πλευρά ΑΒ διαφανούς πρίσματος με τομή ισόπλευρο τρίγωνο όπως στο σχήμα. Από ποια πλευρά και με τι γωνία θα εξέλθει η ακτίνα:



α. Αν ο δείκτης διάθλασης του υλικού του πρίσματος είναι $n = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

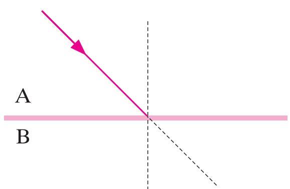
β. Αν ο δείκτης διάθλασης του υλικού του πρίσματος είναι $n = \sqrt{2}$;

10.69 Μονοχρωματική ακτίνα φωτός στο νερό έχει μήκος κύματος $\lambda_\nu = 600$ nm και σε έναν τύπο γυαλιού $\lambda_\gamma = 500$ nm. Να υπολογίσετε την οριακή γωνία ολικής ανάκλασης στη διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-νερού γι' αυτή τη μονοχρωματική δέσμη. Δίνεται ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού $n_\gamma = \frac{4}{3}$.

«Πνεύμα» Πανελληνίων

1ο-2ο ΘΕΜΑ

10.70 Ακτίνα μονοχρωματικού φωτός που διαδίδεται στο οπτικό μέσο Α με δείκτη διάθλασης n_A προσπίπτει με γωνία μικρότερη της κρίσιμης στη διαχωριστική επιφάνεια με άλλο διαφανές οπτικό μέσο Β με δείκτη διάθλασης n_B, όπου $n_B < n_A$.



Α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να σχεδιάσετε τη διαθλώμενη ακτίνα.

Β. Ποια από τις δύο γωνίες είναι μεγαλύτερη;

α. Η γωνία προσπτώσεως.

β. Η γωνία διαθλάσεως.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2002 (Ημερήσιου Λυκείου)

10.71 Το βάθος μιας πισίνας φαίνεται από παρατηρητή μικρότερο από το πραγματικό, λόγω του φαινομένου της:

α. ανάκλασης

β. διάθλασης

γ. διάχυσης

δ. ολικής εσωτερικής ανάκλασης

Εξετάσεις 2003
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

10.72 Μονοχρωματική ακτινοβολία που διαδίδεται στο γυαλί προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια του γυαλιού με τον αέρα, με γωνία πρόσπτωσης $\hat{\theta}_\alpha$ τέτοια ώστε ημ$\theta_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι $n_\alpha = \sqrt{2}$. Η ακτινοβολία θα:

α. διαθλαστεί και θα εξέλθει στον αέρα.

β. κινηθεί παράλληλα προς τη διαχωριστική επιφάνεια.

γ. ανακλαστεί ολικά από τη διαχωριστική επιφάνεια.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2004 (Ημερήσιου Λυκείου)

10.73 Τα φαινόμενα της ανάκλασης και της διάθλασης:

α. περιορίζονται μόνο στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που ανιχνεύει ο ανθρώπινος οφθαλμός.

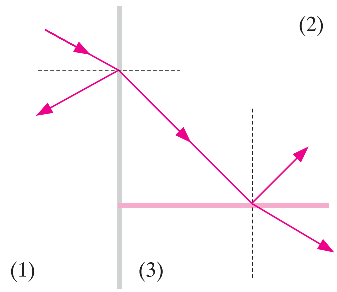
β. δεν αφορούν υπέρυθρη και υπεριώδη ακτινοβολία.

γ. περιορίζονται μόνο στα ραδιοκύματα.

δ. είναι κοινά σε όλα τα είδη των κυμάτων, ηλεκτρομαγνητικά και μηχανικά.

Εξετάσεις 2004 (Εσπερινού Λυκείου)

10.74 Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η πορεία μιας ακτίνας μονοχρωματικού φωτός η οποία διέρχεται από τρία διαφανή υλικά (1), (2) και (3), με δείκτες διάθλασης n_1, n_2 και n_3 αντίστοιχα.



Α. Ποια σχέση ικανοποιούν οι δείκτες διάθλασης;

α. $n_3 > n_2 > n_1$

β. $n_3 = n_2 = n_1$

γ. $n_1 > n_2 > n_3$

Β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2004 (Εσπερινού Λυκείου)

10.75 Το παρατηρούμενο «σπάσιμο» μιας ράβδου της οποίας ένα τμήμα είναι βυθισμένο στο νερό οφείλεται στο φαινόμενο της:

α. ανάκλασης

β. διάχυσης

γ. διάθλασης

δ. ολικής ανάκλασης

Εξετάσεις 2004 (Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

10.76 Η μετάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στις οπτικές ίνες στηρίζεται στο φαινόμενο:

α. της συμβολής

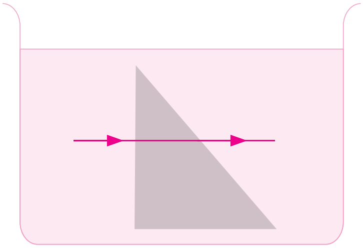
β. της διάθλασης

γ. της περίθλασης

δ. της ολικής ανάκλασης

Εξετάσεις 2005 (Ημερήσιου Λυκείου)

10.77 Γυάλινο πρίσμα είναι βυθισμένο εξ ολοκλήρου σε υγρό.

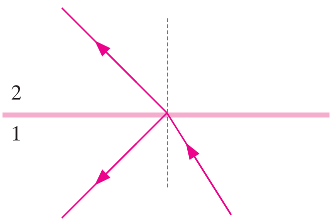


Μονοχρωματική ακτινοβολία διαδίδεται, όπως δείχνει το σχήμα. Αν το πρίσμα και το υγρό έχουν δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 αντίστοιχα, τότε ισχύει:

α. $n_1 > n_2$
β. $n_2 > n_1$
γ. $n_1 = n_2$
δ. $n_2 = 2n_1$

Εξετάσεις 2005 (Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

10.78 Μονοχρωματική ακτινοβολία εισέρχεται στο μέσο 2 από το μέσο 1, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν f_1 και f_2 είναι οι συχνότητες, λ_1 και λ_2 τα μήκη κύματος, υ_1 και υ_2 οι ταχύτητες και n_1 και n_2 οι δείκτες διάθλασης στα δύο μέσα αντίστοιχα, θα ισχύει ότι:

α. $f_1 > f_2$
β. $n_1 < n_2$
γ. $\upsilon_1 > \upsilon_2$
δ. $\lambda_1 < \lambda_2$

Εξετάσεις 2005 (Εσπερινού Λυκείου)

10.79 Μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος λ_0 στο κενό περνάει από το μέσο α με δείκτη διάθλασης n_α στο μέσο β με δείκτη διάθλασης n_β προσπίπτοντας κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων. Αν $n_\alpha = 2n_\beta$, τότε το μήκος κύματος λ_β της ακτινοβολίας στο μέσο β και το μήκος κύματος λ_α της ακτινοβολίας στο μέσο α ικανοποιούν τη σχέση:

α. $\lambda_\beta = \dfrac{\lambda_\alpha}{2}$
β. $\lambda_\beta = 2\lambda\alpha$
γ. $\lambda_\beta = 4\lambda_\alpha$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμα.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2005 (Αποδήμων)

10.80 Μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει πλάγια στη διαχωριστική επιφάνεια δύο οπτικών μέσων 1 και 2. Οι δείκτες διάθλασης στα μέσα 1 και 2 είναι αντίστοιχα n_1 και n_2 με $n_1 > n_2$. Αν η μονοχρωματική ακτίνα ανακλάται ολικά:

α. υπάρχει διαθλώμενη ακτίνα.
β. η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.
γ. η γωνία πρόσπτωσης είναι μικρότερη από την κρίσιμη γωνία ανάκλασης.
δ. η ταχύτητα διάδοσής της μεταβάλλεται.

Εξετάσεις 2006 (Ημερήσιου Λυκείου)

10.81 Μονοχρωματική ακτίνα φωτός μεταβαίνει από διαφανές μέσο Α σε άλλο διαφανές μέσο Β. Αν η γωνία πρόσπτωσης είναι $\hat{\theta}_{\alpha} = 30^{\circ}$ και η γωνία διάθλασης $\hat{\theta}_{b} = 45^{\circ}$, τότε η ταχύτητα διάδοσης της μονοχρωματικής ακτινοβολίας στο μέσο Β είναι:

α. μικρότερη από αυτή στο μέσο Α.
β. ίση με αυτή στο μέσο Α.
γ. μεγαλύτερη από αυτή στο μέσο Α.
δ. εξαρτάται από τη συχνότητα της μονοχρωματικής ακτινοβολίας.

Εξετάσεις 2006
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

10.82 Μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ γυαλιού και αέρα προερχόμενη από το γυαλί. Αν η ταχύτητα διάδοσης της ακτίνας στο γυαλί είναι υ και στον αέρα c (υ ≠ c), τότε για την κρίσιμη γωνία $\hat{\theta}_{crit}$ ισχύει η σχεση:

α. $\eta\mu\theta_{crit} = \dfrac{c}{\upsilon}$

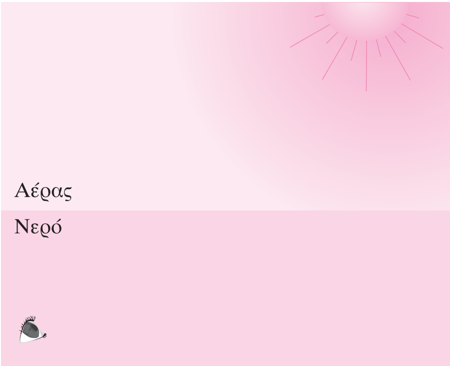
β. $\eta\mu\theta_{crit} = \dfrac{\upsilon}{c}$

γ. $\eta\mu\theta_{crit} = \dfrac{\upsilon^2}{c^2}$

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Εξετάσεις 2006 (Αποδήμων)

10.83 Κολυμβητής βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας και παρατηρεί τον ήλιο.



Η θέση που τον βλέπει είναι:

α. πιο ψηλά από την πραγματική του θέση.
β. ίδια με την πραγματική του θέση.
γ. πιο χαμηλά από την πραγματική του θέση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2007 (Ημερήσιου Λυκείου)

10.84 Η εξίσωση που περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται σε υλικό μέσο με δείκτη διάθλασης n είναι:

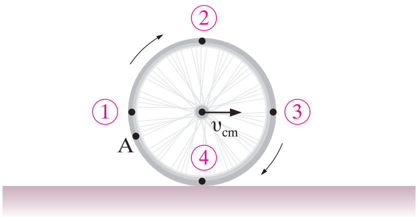
$$E = 100\eta\mu 2\pi(12 \cdot 10^{12}t - 6 \cdot 10^{4}x)$$

(όλα τα μεγέθη στο S.I.). Αν η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι $c = 3 \cdot 10^{8}\ \dfrac{m}{s}$, ο δείκτης διάθλασης του υλικού είναι:

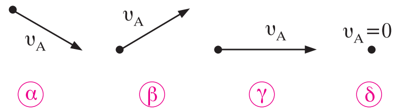
α. 1,2
β. 1,5
γ. 2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2008 (Ημερήσιου Λυκείου)



Το σχήμα με τα βελάκια που ακολουθεί παριστάνει τις ταχύτητες που μπορεί να έχει ένα σημείο Α του τροχού όταν διέρχεται από διάφορες θέσεις.



Να αντιστοιχίσετε καθεμία από τις θέσεις (1), (2), (3) και (4) του πρώτου σχήματος με την κατάλληλη από τις ταχύτητες του δεύτερου σχήματος που αφορούν το σημείο Α του τροχού.
Να γράψετε στα κουτάκια τους σωστούς συνδυασμούς αριθμών - γραμμάτων.

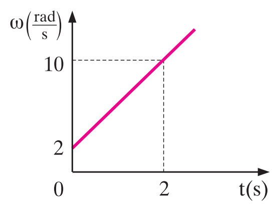
Βασικά «κλειδιά»
(με παραδείγματα)

1.40 **Η γωνιακή ταχύτητα ενός δίσκου που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα μεταβάλλεται όπως στο διπλανό διάγραμμα. Με βάση αυτό, να υπολογίσετε:**

α. **Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ του δίσκου.**

β. **Τη γωνιακή του μετατόπιση τη χρονική στιγμή $t = 4$ s.**

Υπολογισμός της γωνιακής επιτάχυνσης από το διάγραμμα ω=f(t).



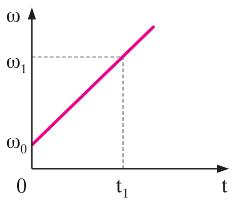
λύση

α. Σύμφωνα με το σχόλιο-«κλειδί» που ακολουθεί, τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ του δίσκου θα την υπολογίσουμε από την κλίση του διαγράμματος $\omega = f(t)$ που μας δίνεται. Έχουμε:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{t_2 - t_0} = \frac{10 - 2}{2 - 0} \Rightarrow \alpha_\gamma = 4\ \frac{rad}{s^2}$$

Γωνιακή επιτάχυνση από την κλίση του διαγράμματος $\omega = f(t)$

Η γωνιακή επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση $\alpha_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$. Αυτό από γεωμετρική άποψη εκφράζει την **κλίση** του διαγράμματος $\omega = f(t)$.



Από το παραπάνω διάγραμμα λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση α_γ. Πράγματι:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1}\left(\frac{rad}{s^2}\right)$$

β. Ο δίσκος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma = 4\ \frac{rad}{s^2}$. Επομένως εκτελεί **ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση** με αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 2\ \frac{rad}{s^2}$.

Η γωνιακή του μετατόπιση $\Delta\theta$ κάποια χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \Rightarrow \Delta\theta = 2t + \frac{1}{2}4t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = 2t + 2t^2 \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) όπου $t = 4$ s, προκύπτει ότι:

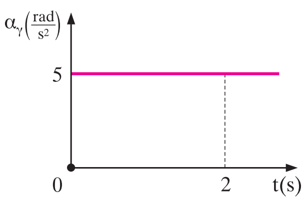
$$\Delta\theta = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 \Rightarrow \Delta\theta = 40\ rad$$

Υπολογισμός της μεταβολής $\Delta\omega$ της γωνιακής ταχύτητας από το διάγραμμα $\alpha_\gamma = f(t)$.

1.41 **Το διπλανό διάγραμμα παριστάνει τη γωνιακή επιτάχυνση ενός δίσκου που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Με βάση αυτό:**

α. **Να υπολογίσετε τη μεταβολή $\Delta\omega$ της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου στο χρονικό διάστημα 0 s – 2 s.**

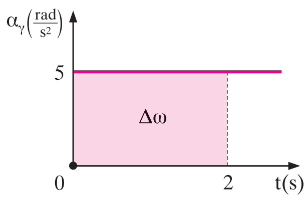
β. **Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s ο δίσκος είχε γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 0\ \frac{rad}{s}$, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου θα είναι $\Delta\theta = 40$ rad.**



λύση

α. Με βάση το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», η μεταβολή $\Delta\omega$ της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου στο χρονικό διάστημα 0 s – 2 s θα ισούται αριθμητικά με το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.

Είναι λοιπόν:



$$\Delta\omega = \text{Εμβαδόν} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = 5\ \frac{rad}{s^2}\cdot 2\ s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\omega = 10\ \frac{rad}{s}$$

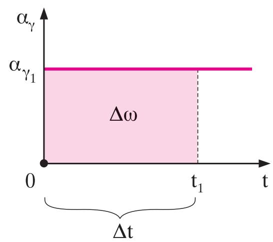
β. Εφόσον είναι $\omega_0 = 0\ \frac{rad}{s}$, η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \Rightarrow 40 = \frac{1}{2}\cdot 5t^2 \Rightarrow 80 = 5t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{80}{5} = 16 \Rightarrow t = \sqrt{16} \Rightarrow t = 4\ s$$

Μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας από το εμβαδόν του διαγράμματος $\alpha_\gamma = f(t)$

Από τη σχέση $\alpha_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$ προκύπτει ότι $d\omega = \alpha_\gamma dt$. Η τελευταία αυτή σχέση δίνει τη στοιχειώδη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας σε ένα στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt.



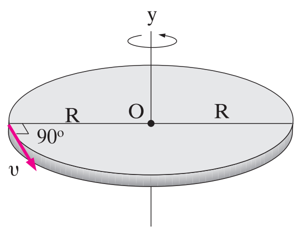
Με αυτήν τη λογική: **Σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα Δt η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας Δω θα ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν του σχήματος που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση $\alpha_\gamma = f(t)$ και από τον άξονα των χρόνων μεταξύ των τιμών χρόνου που μας ενδιαφέρουν.**

1.42 **Ο οριζόντιος δίσκος του διπλανού σχήματος περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο. Ο δίσκος έχει ακτίνα $R = 0{,}2$ m και τα σημεία της περιφέρειάς του περιστρέφονται με γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου $\upsilon = 4\pi\ \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε:**

α. **Την περίοδο Τ της περιστροφής του δίσκου.**

β. **Το πλήθος Ν των περιστροφών του δίσκου σε χρονικό διάστημα $t_1 = 10$ s.**

Μάθε να βρίσκεις το πλήθος Ν των περιστροφών σε δεδομένο χρόνο t, όταν είναι ω=σταθ.



Πλήθος N περιστροφών στερεού σε χρονικό διάστημα t_1, όταν ω = σταθ.

Για να υπολογίσουμε το πλήθος N των περιστροφών ενός στερεού σε χρονικό διάστημα t_1:

- Με βάση τα δεδομένα, υπολογίζουμε πρώτα την περίοδο T της περιστροφής του στερεού.
- Εφόσον σε χρόνο T το στερεό διαγράφει μία (1) περιστροφή, το πλήθος τους N σε χρόνο t_1 θα δίνεται από την πρακτική σχέση:

$$N = \frac{t_1}{T}$$

(με την προϋπόθεση πάντα ότι ω = σταθ.).

Λύση

α. Από τη σχέση $\upsilon = \omega R$ προκύπτει ότι η γωνιακή ταχύτητα ω με την οποία περιστρέφεται ο δίσκος έχει μέτρο:

$$\omega = \frac{\upsilon}{R} = \frac{4\pi}{0{,}2} \Rightarrow \omega = 20\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από τη σχέση $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ έχουμε ότι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} \Rightarrow T = 0{,}1\ \text{s}$$

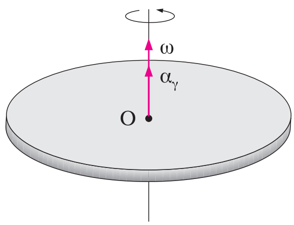
β. Εφόσον σε χρόνο T ο δίσκος διαγράφει μία περιστροφή, το πλήθος N των περιστροφών σε χρονικό διάστημα t_1 θα είναι:

$$N = \frac{t_1}{T} = \frac{10\ \text{s}}{0{,}1\ \text{s}} \Rightarrow N = 100\ \text{περιστροφές}$$

(Δείτε και το διπλανό σχόλιο-«κλειδί».)

Πλήθος N περιστροφών στερεού σε χρονικό διάστημα t_1, όταν η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται με α_γ=σταθ.

1.43 **Ο οριζόντιος δίσκος του διπλανού σχήματος περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma = 2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είχε μέτρο $\omega_0 = 0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε το πλήθος N των περιστροφών του δίσκου στο χρονικό διάστημα από 0 s → 4 s.**



Λύση

Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», εργαζόμαστε ως εξής:

- Προσδιορίζουμε τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_1$ του δίσκου στο χρονικό διάστημα:

$$t_1 = 4\ \text{s} - 0\ \text{s} \Rightarrow t_1 = 4\ \text{s}$$

Εφόσον $\alpha_\gamma =$ σταθ., ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση με $\omega_0 = 0\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Έτσι η γωνιακή του μετατόπιση δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$$

Επομένως στο χρονικό διάστημα $t_1 = 4$ s θα έχουμε:

$$\Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4^2 \Rightarrow \Delta\theta_1 = 16 \text{ rad}$$

- Στη συνέχεια λέμε ότι:
  Γωνιακή μετατόπιση 2π rad είναι 1 περιστροφή.
  Γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_1$ rad είναι N περιστροφές.

$$\frac{N}{1} = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{16 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = \frac{8}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

Πλήθος N περιστροφών στερεού σε χρονικό διάστημα t_1, όταν η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται με $\alpha_\gamma =$ σταθ.

Όταν η γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται, μεταβάλλεται και η περίοδος T της περιστροφής του στερεού. Έτσι **δεν** μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των περιστροφών σε χρονικό διάστημα t_1 από την πρακτική σχέση $N = \frac{t_1}{T}$. Αν όμως $\alpha_\gamma =$ σταθ., τότε εργαζόμαστε ως εξής:

- Από τη σχέση:

$$\Delta\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}|\alpha_\gamma|t^2$$

προσδιορίζουμε τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_1$ στο χρονικό διάστημα t_1.

- Στη συνέχεια λέμε ότι:
  Γωνία 2π rad$\rightarrow$1 περιστροφή.
  Γωνία $\Delta\theta_1$ rad$\rightarrow$N;

$$\frac{N}{1} = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$$

1.44 **Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα ομαλά. Οι τροχοί του έχουν ακτίνα $R = 0{,}3$ m και περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 100\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε:**

α. Το πλήθος N των περιστροφών κάθε τροχού σε χρονικό διάστημα $t_1 = 10\pi$ s.

β. Τη μετατόπιση Δx του αυτοκινήτου σε αυτό το χρονικό διάστημα.

Δίνεται ότι $\pi = 3{,}14$.

Μάθε να βρίσκεις τη μετατόπιση Δx ενός οχήματος, όταν οι τροχοί του εκτελέσουν N περιστροφές.

Μετατόπιση Δx ενός οχήματος, όταν οι τροχοί του εκτελέσουν N περιστροφές

- Η μετατόπιση ενός τροχού στον χρόνο της περιόδου T της περιστροφής του είναι $\Delta x_1 = 2\pi R$, όπου R η ακτίνα του τροχού.
- Σε χρόνο T όμως ο τροχός πραγματοποιεί μία περιστροφή. Έτσι σε N περιστροφές ο τροχός θα μετατοπιστεί κατά $\Delta x = N \cdot \Delta x_1$, δηλαδή:

$$\Delta x = N \cdot (2\pi R)$$

Λύση

α. Από τη σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100} \Rightarrow T = 0{,}02\pi \text{ s}$$

Έτσι το πλήθος N των περιστροφών των τροχών του αυτοκινήτου στο χρονικό διάστημα $t_1 = 10\pi$ s θα είναι:

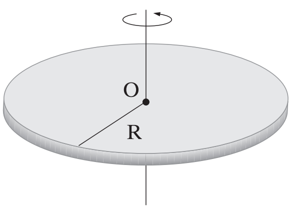
$$N = \frac{t_1}{T} = \frac{10\pi \text{ s}}{0{,}02\pi \text{ s}} \Rightarrow N = 500 \text{ περιστροφές}$$

β. Η μετατόπιση ενός τροχού στον χρόνο της περιόδου T της περιστροφής του είναι $\Delta x_1 = 2\pi R$. Σε χρόνο T όμως ο τροχός πραγματοποιεί μία περιστροφή. Έτσι ύστερα από N περιστροφές ο τροχός θα μετατοπιστεί κατά $\Delta x = N(2\pi R)$ και αντικαθιστώντας έχουμε ότι:

$$\Delta x = N(2\pi R) = 500 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3 \Rightarrow \Delta x = 942 \text{ m}$$

Μάθε να βρίσκεις το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης κάποιου σημείου ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται.

1.45 **Ο οριζόντιος δίσκος του διπλανού σχήματος έχει ακτίνα $R = 0{,}2$ m και περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 0{,}8 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αρχίζει να αυξάνεται με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $\alpha_\gamma = 2 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.**

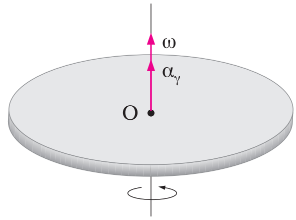


α. **Να σχεδιάσετε τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\gamma$ του δίσκου.**

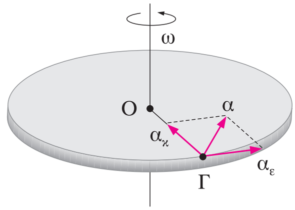
β. **Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{a}$ των σημείων της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}6$ s.**

λύση

α. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αυξάνεται. Επομένως τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της γωνιακής επιτάχυνσης έχουν την ίδια κατεύθυνση, αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα και προέκυψε με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



β. Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ των σημείων της περιφέρειας του δίσκου (π.χ. του σημείου Γ στο σχήμα) δίνεται από τη σχέση:



$$\alpha_\Gamma = \sqrt{\alpha_K^2 + \alpha_\varepsilon{}^2} \qquad (1)$$

όπου α_K είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης και α_ε το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σημείου.

Ο δίσκος κάνει ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση, οπότε το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας δίνεται από τη σχέση $\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma t$. Έτσι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}6$ s θα είναι:

$$\omega_1 = 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}6 \Rightarrow \omega_1 = 2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_1 θα έχει μέτρο:

$$\alpha_K = \omega_1^2 R = 2^2 \cdot 0{,}2 \Rightarrow \alpha_K = 0{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Η επιτρόχια επιτάχυνση έχει μέτρο:

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R \Rightarrow \alpha_\varepsilon = 0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν στη σχέση (1) και έχουμε:

$$\alpha_\Gamma = \sqrt{\alpha_K^2 + \alpha_\varepsilon^2} = \sqrt{(0{,}8)^2 + (0{,}4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\Gamma = \sqrt{0{,}64 + 0{,}16} \Rightarrow \alpha = 0{,}89\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Υπολογισμός του μέτρου της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ κάποιου υλικού σημείου ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται

Το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ των σημείων της περιφέρειας ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται το υπολογίζουμε από τη σχέση:

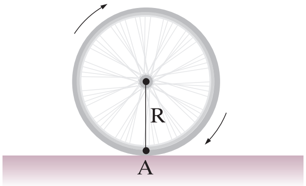
$$\alpha = \sqrt{\alpha_K^2 + \alpha_\varepsilon^2}$$

όπου:

$$\alpha_K = \frac{u^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} \Rightarrow \alpha_K = \omega^2 R$$

είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου της περιφέρειας του δίσκου και $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$ είναι το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσής του.

Τροχιά ενός σημείου τροχού που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

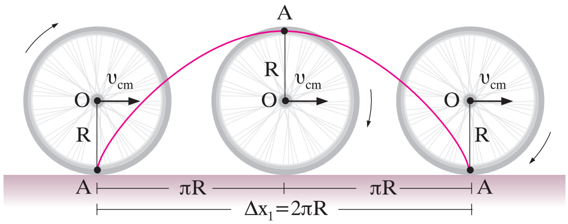


1.46 **Τροχός ακτίνας $R = 0{,}4\ m$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 10\ \frac{rad}{s}$, όπως στο διπλανό σχήμα.**

α. **Να σχεδιάσετε ποιοτικά την τροχιά του σημείου Α του τροχού για μία περιστροφή του.**

β. **Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του τροχού σε χρόνο $t = 4\ s$.**

λύση



Πώς σχεδιάζουμε ποιοτικά την τροχιά ενός σημείου τροχού που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

Τρία στιγμιότυπα της κίνησης του τροχού που ισαπέχουν αρκούν.

- Εντοπίζουμε σε αυτά το σημείο Α, το οποίο στο πρώτο στιγμιότυπο είναι σε επαφή με το έδαφος, στο δεύτερο είναι πάνω πάνω και στο τρίτο είναι ξανά σε επαφή με το έδαφος.
- Ενώνουμε τις τρεις θέσεις του σημείου Α με μία καμπύλη γραμμή. (Δείτε το σχήμα στη λύση του παραδείγματος.)

α. Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», σχεδιάσαμε τρία στιγμιότυπα της κίνησης του τροχού σε χρόνο μίας περιόδου. Αφού η κίνηση διεξάγεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, τα σχεδιάσαμε έτσι ώστε να ισαπέχουν. Ενώσαμε τέλος με μία καμπύλη γραμμή τις τρεις θέσεις του σημείου Α του τροχού, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

β. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού έχει μέτρο:

$$\upsilon_{cm} = \omega R = 10 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \upsilon_{cm} = 4\ \frac{m}{s}$$

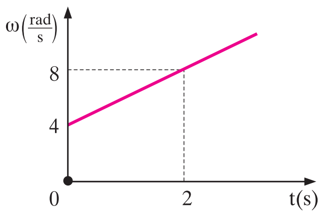
Έτσι η μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού στον χρόνο $t = 4\ s$ θα είναι:

$$\Delta x = \upsilon_{cm} t = 4 \cdot 4 \Rightarrow \Delta x = 16\ m$$

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

1.47 Η γωνιακή ταχύτητα ενός δίσκου που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα μεταβάλλεται όπως στο παρακάτω διάγραμμα.

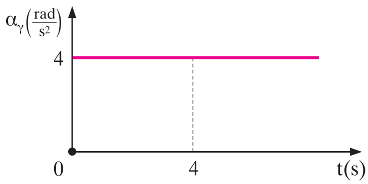


Με βάση αυτό, να υπολογίσετε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ του δίσκου.

β. Τη γωνιακή του μετατόπιση τη χρονική στιγμή $t = 5$ s.

1.48 Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη γωνιακή επιτάχυνση ενός δίσκου που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα.

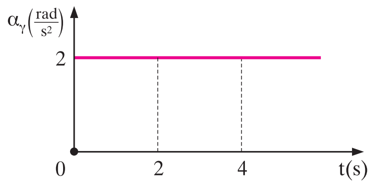


Με βάση αυτό:

α. Να υπολογίσετε τη μεταβολή Δω της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου στο χρονικό διάστημα 0 s – 4 s.

β. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ s ο δίσκος είχε γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 0\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή στην οποία η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου θα είναι $\Delta\theta = 50$ rad.

1.49 Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη γωνιακή επιτάχυνση ενός δίσκου που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα.



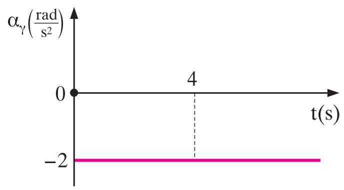
Με βάση αυτό:

α. Να υπολογίσετε τη μεταβολή Δω της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου στο χρονικό διάστημα 2 s – 4 s.

β. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s ο δίσκος είχε γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 4\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, να υπολογίσετε τη γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_2 = 4$ s.

γ. Να υπολογίσετε τη γωνιακή μετατόπιση του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_2 = 4$ s.

1.50 Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη γωνιακή επιτάχυνση ενός δίσκου που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα.



Με βάση αυτό:

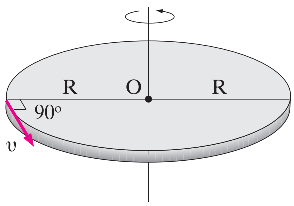
α. Να υπολογίσετε τη μεταβολή Δω της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου στο χρονικό διάστημα 0 s – 4 s.

β. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s ο δίσκος είχε γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 20\ \frac{rad}{s}$, να υπολογίσετε τη γωνιακή του ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.

γ. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή $t_{ολ}$ που ο δίσκος θα πάψει να περιστρέφεται.

δ. Πόση θα είναι η γωνιακή του μετατόπιση $\Delta\theta_{ολ}$ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s ως τη χρονική στιγμή $t_{ολ}$;

1.51 Ο οριζόντιος δίσκος του παρακάτω σχήματος περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο.

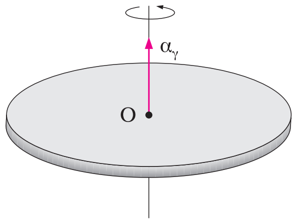


Ο δίσκος έχει ακτίνα R = 0,5 m και τα σημεία της περιφέρειάς του περιστρέφονται με γραμμική ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 2\pi\ \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε:

α. Την περίοδο Τ της περιστροφής του δίσκου.

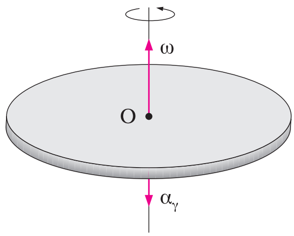
β. Το πλήθος Ν των περιστροφών του δίσκου σε χρονικό διάστημα t = 8 s.

1.52 Ο οριζόντιος δίσκος του παρακάτω σχήματος περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma = 4\ \frac{rad}{s^2}$.



Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είχε μέτρο $\omega_0 = 0\ \frac{rad}{s}$. Να υπολογίσετε το πλήθος Ν των περιστροφών του δίσκου στο χρονικό διάστημα από 0 s → 5 s.

1.53 Ο οριζόντιος δίσκος του παρακάτω σχήματος περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο με σταθερή επιβράδυνση μέτρου $\alpha_\gamma = 2\ \frac{rad}{s^2}$.



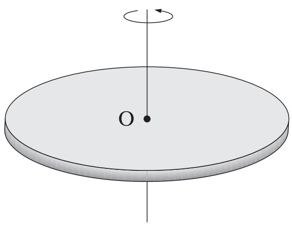
Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s ο δίσκος είχε γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 20\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε το πλήθος N των περιστροφών του δίσκου στο χρονικό διάστημα από 2 s $\rightarrow$ 6 s.

1.54 Ένα αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Οι τροχοί του αυτοκινήτου έχουν ακτίνα $R = 0{,}2$ m και περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 200\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε:

α. Το πλήθος N των περιστροφών κάθε τροχού σε χρονικό διάστημα $t_1 = 8\pi$ s.

β. Τη μετατόπιση Δx του αυτοκινήτου σε αυτό το χρονικό διάστημα.

1.55 Ο οριζόντιος δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει ακτίνα $R = 0{,}4$ m και περιστρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O.

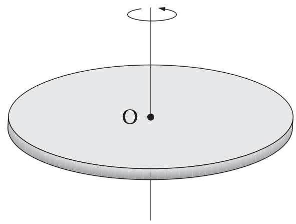


Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου αρχίζει να αυξάνεται με γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_\gamma = 4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

α. Να σχεδιάσετε τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\gamma$ του δίσκου.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ των σημείων της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}5$ s.

1.56 Ο οριζόντιος δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει ακτίνα $R = 0{,}2$ m και περιστρέφεται αριστερόστροφα γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O, με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση α_γ.

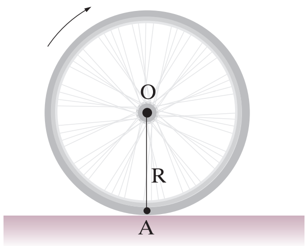


Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s ήταν $\omega_0 = 0$ rad και ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου είναι $\Delta\theta_1 = 32$ rad.

α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\gamma$ του δίσκου.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της γραμμικής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ των σημείων της περιφέρειας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.

1.57 Τροχός ακτίνας $R = \frac{2}{\pi}$ m κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δρόμο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 20\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, όπως στο σχήμα.

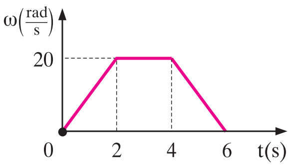


α. Να σχεδιάσετε ποιοτικά την τροχιά του σημείου Α του τροχού για μία περιστροφή του.

β. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σημείου Α κατά αυτή την περιστροφή του τροχού.

γ. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του τροχού σε χρόνο t = 10 s.

Και άλλα λυμένα παραδείγματα σε δεύτερο επίπεδο



1.58 Διάγραμμα ω = f(t).

Η γωνιακή ταχύτητα ενός δίσκου που περιστρέφεται μεταβάλλεται όπως στο διπλανό διάγραμμα. Με βάση αυτό:

α. Να χαρακτηρίσετε την κίνηση του δίσκου στα διάφορα χρονικά διαστήματα.

β. Να παραστήσετε γραφικά τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου σε συνάρτηση με τον χρόνο.

γ. Να προσδιορίσετε τη συναρτησιακή σχέση ω = f(t) για το χρονικό διάστημα από 4 s → 6 s.

λύση

α. • Από 0 s – 2 s:

Η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται με σταθερό ρυθμό (γραμμικά). Η κίνηση του δίσκου είναι *ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική*. Η τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης δίνεται από την κλίση του διαγράμματος, οπότε:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{2 - 0} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{20 - 0}{2} \Rightarrow \alpha_\gamma = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

• Από 2 s – 4 s:

Η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή. Επομένως η κίνηση του δίσκου είναι *ομαλή περιστροφική* και η τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης είναι: $\alpha_\gamma = 0$.

2.49 Ροπή της τάσης του νήματος σε τροχαλία.

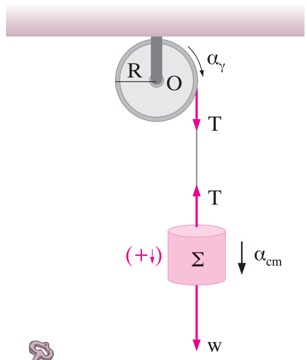
Το σώμα Σ μάζας $m = 2$ kg του διπλανού σχήματος είναι δεμένο στη μία άκρη αβαρούς νήματος, το οποίο είναι τυλιγμένο σε τροχαλία ακτίνας $R = 0{,}2$ m. Αν το σώμα Σ αφεθεί ελεύθερο, κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_{cm} = 4\ \frac{m}{s^2}$. Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ της τροχαλίας.

β. Την τάση Τ του νήματος.

γ. Τη ροπή της τάσης του νήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.

Δίνεται ότι $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.



λύση

α. Η επιτρόχια επιτάχυνση α_ε ενός σημείου στην περιφέρεια της τροχαλίας είναι $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$ και, επειδή το νήμα δε γλιστράει στην τροχαλία, είναι ίση με την επιτάχυνση α_{cm} του σώματος. Έτσι έχουμε ότι:

$$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{4}{0{,}2}\ \frac{rad}{s^2} \Rightarrow \alpha_\gamma = 20\ \frac{rad}{s^2}$$

β. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος.
Έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm}$$

και αλγεβρικά:

$$w - T = m\alpha_{cm} \Rightarrow T = mg - m\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \cdot 10 - 2 \cdot 4 \Rightarrow T = 12\ N$$

γ. Η ροπή της τάσης του νήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας έχει μέτρο:

$$\tau_T = TR \Rightarrow \tau_T = 12 \cdot 0{,}2 \Rightarrow \tau_T = 2{,}4\ N \cdot m$$

Άλλο επιτρόχια $\vec{\alpha}_\varepsilon$, άλλο κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\alpha}_K$ και άλλο γραμμική επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ των σημείων της περιφέρειας στρεφόμενου σώματος

- Η κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\alpha}_K$ ενός υλικού σημείου της περιφέρειας ενός στρεφόμενου, για παράδειγμα, δίσκου δείχνει τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει η διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας $\vec{u}$ και υπάρχει ακόμα και αν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό (αφού έτσι κι αλλιώς η διεύθυνση της $\vec{u}$ συνεχώς αλλάζει). Το μέτρο της δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_K = \frac{u^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} \Rightarrow \alpha_K = \omega^2 R$$

- Η επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\varepsilon$ δείχνει τον ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας $\vec{u}$. Το μέτρο της δίνεται από τη σχέση $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$. Αν το σώμα κυλάει χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει ότι $\alpha_\varepsilon = \alpha_{cm}$, όπου α_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος.
- Η γραμμική επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ είναι συνισταμένη των $\vec{\alpha}_K$ και $\vec{\alpha}_\varepsilon$ και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_K^2 + \alpha_\varepsilon^2}$$

(Δείτε και το παράδειγμα 1.45.)

Λύσε και άλλες ασκήσεις σε δεύτερο επίπεδο

2.50 Η οριζόντια ράβδος ΑΒ του σχήματος είναι ομογενής, έχει μήκος $\ell = 1{,}2$ m και ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Αν στα άκρα της ασκηθούν ταυτόχρονα οι δυνάμεις $F_1 = 200$ N, $F_2 = 200$ N όπως στο σχήμα, σε πόση απόσταση από το άκρο της Α πρέπει να της περάσουμε έναν κατακόρυφο άξονα περιστροφής και παρ' όλα αυτά να μην περιστραφεί;

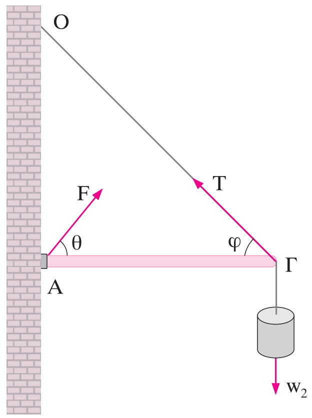
2.51 Η ομογενής και ισοπαχής δοκός ΑΒ έχει βάρος $w = 2.000$ N και μήκος $\ell = 8$ m. Η ράβδος στηρίζεται στα δύο άκρα της Α και Β.

Οι αντιδράσεις των στηρίξεων είναι κάποια στιγμή $F_A = 800$ N και $F_B = 1.200$ N αντίστοιχα.

α. Να αιτιολογήσετε ότι πάνω στη δοκό δρα ένα ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}$ και $-\vec{F}$.

β. Αν είναι $F = 640$ N, να υπολογίσετε τον μοχλοβραχίονα x αυτού του ζεύγους δυνάμεων.

2.52 Η ομογενής δοκός ΑΓ του σχήματος έχει μήκος ℓ, βάρος $w_1 = 400$ N και ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της δοκού συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο.



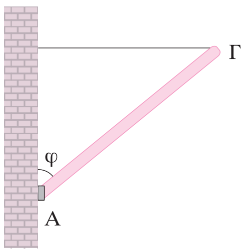
Το άλλο άκρο της Γ στηρίζεται και αυτό στον τοίχο μέσω ενός νήματος που σχηματίζει γωνία $\varphi = 45°$ με τη δοκό. Στο Γ επίσης κρέμεται με ένα σκοινί σώμα βάρους $w_2 = 100$ N. Να υπολογίσετε:

α. Την τάση $\vec{T}$ του νήματος ΓΟ.

β. Τη δύναμη $\vec{F}$ που δέχεται η δοκός από τον τοίχο.

Δίνεται ότι ημ45° = συν45° = 0,7.

2.53 Ομογενής και ισοπαχής δοκός μήκους ℓ και βάρους $w = 200$ N ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Το άκρο της Α είναι αρθρωμένο στον τοίχο, ενώ το άκρο της Γ στηρίζεται στον τοίχο μέσω ενός οριζόντιου νήματος.

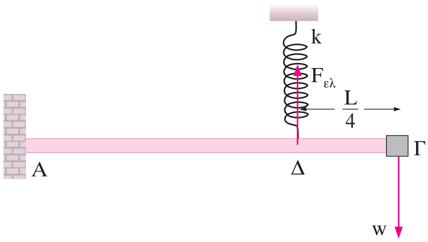


Δίνεται ότι $\hat{\varphi} = 45^\circ$.

α. Να σχεδιάσετε (ποιοτικά) τις δυνάμεις που δέχεται η ράβδος.

β. Να υπολογίσετε τα μέτρα και να προσδιορίσετε τις διευθύνσεις όλων των άγνωστων δυνάμεων.

2.54 Η ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μήκος L και αμελητέο βάρος. Η ράβδος κρέμεται από το σημείο Δ, που απέχει $\frac{L}{4}$ από το άκρο της Γ, μέσω ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$ και στηρίζεται στο σημείο Α με άρθρωση. Στο άκρο της Γ υπάρχει στερεωμένο σώμα βάρους w = 15 N. Δίνεται ότι η ράβδος ισορροπεί οριζόντια.



Α. Να αιτιολογήσετε το ότι η δύναμη $\vec{F}_A$ που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση είναι κατακόρυφη.

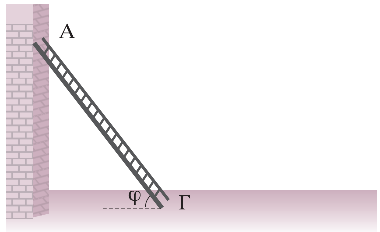
Β. Να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_{ελ}$.

β. Την επιμήκυνση $\Delta\ell$ του ελατηρίου.

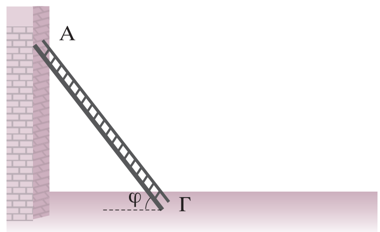
γ. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_A$.

2.55 Η ομογενής σκάλα του σχήματος έχει βάρος w = 400 N. Με το επάνω της άκρο Α στηρίζεται στον λείο κατακόρυφο τοίχο και με το κάτω άκρο της Γ στο οριζόντιο δάπεδο σχηματίζοντας γωνία φ με το έδαφος.



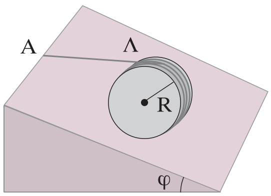
Μετακινώντας το άκρο Γ της ράβδου προς τα δεξιά, διαπιστώνουμε ότι η μικρότερη τιμή που μπορεί να έχει η γωνία φ για να ισορροπεί η σκάλα είναι $\hat{\varphi} = 60^\circ$. (Για $\hat{\varphi} < 60^\circ$ η σκάλα γλιστράει και πέφτει.) Να υπολογίσετε τον συντελεστή οριακής στατικής τριβής της σκάλας με το οριζόντιο επίπεδο.

2.56 Η ομογενής σκάλα του σχήματος με το άκρο της Α στηρίζεται σε λείο κατακόρυφο τοίχο και με το άλλο άκρο της, το Γ, σε οριζόντιο δάπεδο.



Αν ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής της σκάλας με το οριζόντιο δάπεδο είναι $\mu_\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της γωνίας φ για την οποία η σκάλα δε γλιστρά στο έδαφος.

2.57 Ο δίσκος του σχήματος έχει βάρος $w = 400$ N και ισορροπεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσης $\hat{\varphi} = 45°$ με τη βοήθεια του οριζόντιου αβαρούς σκοινιού ΑΛ.

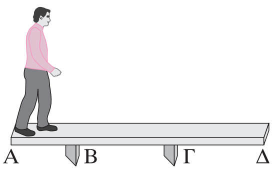


α. Να αποδείξετε ότι το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι λείο.

β. Να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο.

Δίνεται ότι ημ45° = συν45° = 0,7.

2.58 Η σανίδα του σχήματος είναι ομογενής, έχει βάρος $w = 1.000$ N, μήκος (ΑΔ) = $d = 12$ m και στηρίζεται (πατάει) στα σημεία Β και Γ που απέχουν από το άκρο της Α αποστάσεις $d_1 = 2$ m και $d_2 = 8$ m αντίστοιχα.

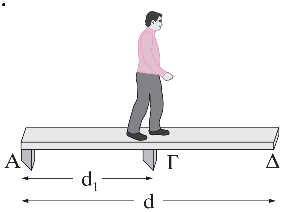


Ο άνθρωπος έχει βάρος $w_1 = 1.000$ N και στέκεται στο άκρο της Α.

α. Αν η σανίδα ισορροπεί οριζόντια, να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που δέχεται και να τις υπολογίσετε.

β. Ο άνθρωπος αρχίζει να βαδίζει αργά πάνω στη σανίδα. Μέχρι ποιο σημείο μπορεί να προχωρήσει χωρίς αυτή να ανατραπεί;

2.59 Η ομογενής σανίδα ΑΔ του σχήματος έχει βάρος $w = 1.800$ N και μήκος $d = 5$ m. Η σανίδα πατάει απλώς σε δύο στηρίξεις, μία στο άκρο της Α και μία σε σημείο Γ που απέχει από το Α απόσταση $d_1 = 3$ m.

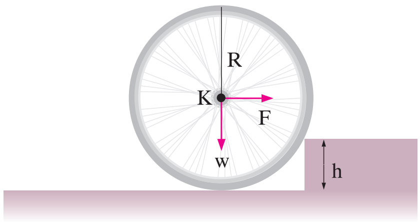


Ένας άνθρωπος βάρους $w_1 = 600$ N περπατάει πάνω στη σανίδα από το σημείο Γ προς το άκρο Δ.

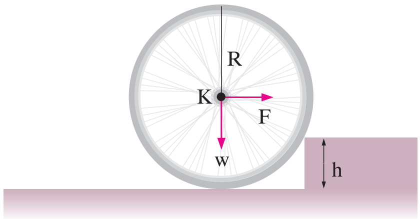
α. Να υπολογίσετε τη μέγιστη απόσταση x από το στήριγμα Γ κατά την οποία μπορεί να απομακρυνθεί ο άνθρωπος χωρίς να ανατραπεί η σανίδα.

β. Πόσο είναι το μέγιστο επιτρεπτό βάρος w_2 ενός ανθρώπου ώστε να μπορεί να περπατήσει άφοβα μέχρι το Δ;

2.60 Στο σχήμα εικονίζεται ένας τροχός ακτίνας $R = 50$ cm και βάρους $w = 80$ N σταματημένος μπροστά σε ένα εμπόδιο ύψους $h = 10$ cm. Να υπολογίσετε το ελάχιστο μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να ασκηθεί στο κέντρο K του τροχού για να υπερπηδήσει το εμπόδιο.

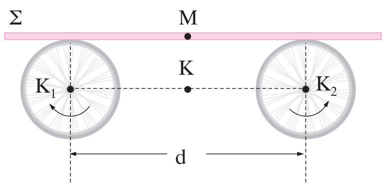


2.61 Στο σχήμα εικονίζεται ένας τροχός ακτίνας $R = 85$ cm σταματημένος μπροστά σε ένα εμπόδιο ύψους $h = 10$ cm.



Αν το ελάχιστο μέτρο της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να ασκηθεί στο κέντρο K του τροχού για να υπερπηδήσει το εμπόδιο είναι $F_{min} = 40$ N, να υπολογίσετε το βάρος w του τροχού.

2.62 Η ομογενής και ισοπαχής σανίδα Σ του σχήματος ισορροπεί πάνω στους δύο κυλίνδρους, με το μέσο M να βρίσκεται πάνω από το μέσο της απόστασης d των αξόνων τους K_1 και K_2. Δίνεται ότι $d = 1$ m.



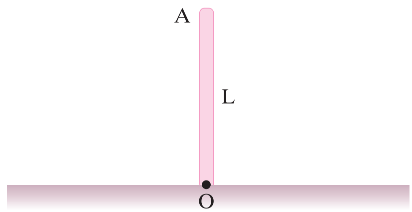
Με τον κατάλληλο μηχανισμό θέτουμε τους κυλίνδρους σε περιστροφή, όπως στο σχήμα.

α. Να αποδείξετε ότι, αν μετατοπίσουμε οριζόντια τη σανίδα κατά πολύ λίγο και στη συνέχεια την αφήσουμε ελεύθερη, θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση.

β. Να υπολογίσετε την περίοδό της T και την κυκλική της συχνότητα ω.

Δίνονται: η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στη σανίδα και στους κυλίνδρους $\mu = 0{,}2$.

2.63 Η ομογενής ράβδος OA του σχήματος έχει μάζα $m = 8$ kg, μήκος $L = 1$ m και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O και είναι κάθετος στη ράβδο.



Αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη να στραφεί από την κατακόρυφη θέση. Να υπολογίσετε τη ροπή του βάρους της ως προς τον άξονα περιστροφής της:

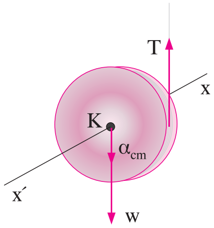
α. Όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη.

β. Όταν σχηματίζει γωνία 30° με την αρχική κατακόρυφη θέση.

γ. Όταν είναι οριζόντια.

Δίνεται ότι $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

2.64 Το γιογιό του σχήματος αποτελείται από ένα μικρό κύλινδρο μάζας $m = 0{,}2$ kg και ακτίνας $R = 0{,}1$ m, στο κυρτό μέρος του οποίου έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα αβαρές σκοινί.



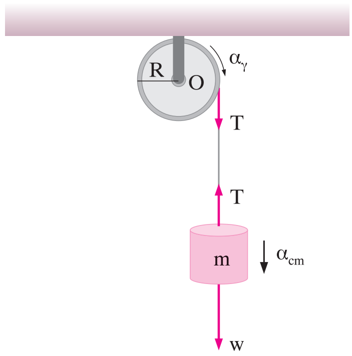
Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του σκοινιού και αφήνοντας τον κύλινδρο ελεύθερο, το σκοινί ξετυλίγεται και ο κύλινδρος αρχίζει να πέφτει περιστρεφόμενος γύρω από ένα νοητό άξονα x′x που διέρχεται από το κέντρο του. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου κατ' αυτή την κίνηση έχει μέτρο $\alpha_{cm} = \frac{20}{3}\ \frac{m}{s^2}$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ του κυλίνδρου.

β. Την τάση T του σκοινιού.

γ. Τη ροπή της τάσης T του σκοινιού ως προς τον άξονα x′x περιστροφής του κυλίνδρου.

2.65 Το σώμα μάζας $m = 1$ kg του παρακάτω σχήματος είναι δεμένο στη μία άκρη αβαρούς νήματος, το οποίο είναι τυλιγμένο σε τροχαλία ακτίνας $R = 0{,}2$ m. Αν αφεθεί ελεύθερο το σώμα, κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση $\alpha_{cm} = 2\ \frac{m}{s^2}$ και δίνεται ότι $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.



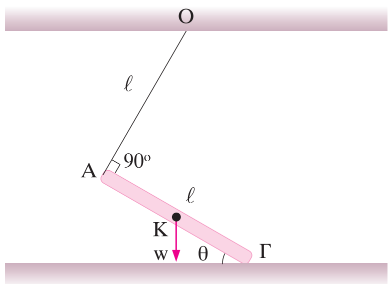
Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ της τροχαλίας.

β. Την τάση T του νήματος.

γ. Τη ροπή της τάσης του νήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.

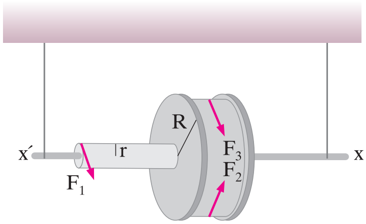
2.66 Η ομογενής ράβδος ΑΓ του σχήματος συγκρατείται στη θέση που φαίνεται με τη βοήθεια του τεντωμένου νήματος ΑΟ. Δίνεται ότι το μήκος του νήματος είναι ίσο με το μήκος της ράβδου.



Να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής μ_σ ανάμεσα στο άκρο Γ της ράβδου και στο οριζόντιο έδαφος.

2.67 Η τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες $R = 40$ cm και

$r = 10$ cm. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία είναι εφαπτόμενες στις κυλινδρικές επιφάνειες και έχουν μέτρα $F_1 = 30$ N, $F_2 = 10$ N και $F_3 = 20$ N.



Να υπολογίσετε:

α. Τη συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς τον άξονα x′x περιστροφής της τροχαλίας.

β. Την εφαπτομενική δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στον δίσκο ακτίνας R ώστε να μην περιστρέφεται η τροχαλία.

«Πνεύμα» Πανελληνίων

1ο-2ο ΘΕΜΑ

2.68 Για να ισορροπεί ένα αρχικά ακίνητο σώμα στο οποίο ασκούνται πολλές ομοεπίπεδες δυνάμεις, θα πρέπει:

α. η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα να είναι μηδέν.

β. το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων να είναι μηδέν.

γ. η συνισταμένη των δυνάμεων και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών να είναι μηδέν.

δ. η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι μηδέν και το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των δυνάμεων διάφορο του μηδενός.

Εξετάσεις 2003 (Αποδήμων)

2.69 Η περίοδος περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονά της είναι σταθερή. Αυτό οφείλεται στο ότι η ελκτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο:

α. δημιουργεί σταθερή ροπή ως προς τον άξονά της.

β. δημιουργεί μηδενική ροπή ως προς τον άξονά της.

γ. έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης σε ένα σημείο του Ισημερινού της Γης.

δ. έχει τέτοιο μέτρο που δεν επηρεάζει την περιστροφή της Γης.

Εξετάσεις 2005 (Αποδήμων)

2.70 Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα από τον αριθμό της κάθε πρότασης το γράμμα

Σ, αν η πρόταση αυτή είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ, αν είναι Λανθασμένη.

α. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος κοντά στην κεραία έχουν διαφορά φάσης μηδέν.

β. Τα κτίρια κατά τη διάρκεια ενός σεισμού εκτελούν εξαναγκασμένη ταλάντωση.

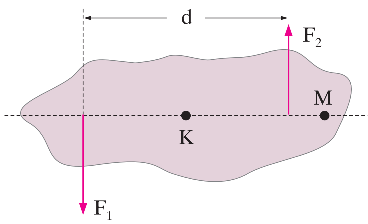
γ. Το μήκος κύματος του ορατού φωτός στο κενό κυμαίνεται από 400 nm έως 700 nm.

δ. Όταν ο φορέας της δύναμης η οποία ασκείται σε ένα ελεύθερο στερεό σώμα δε διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε το σώμα εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.

ε. Τα μηχανικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια και ύλη.

Εξετάσεις 2007 (Εσπερινού Λυκείου)

2.71 Η συνολική ροπή των δύο αντίρροπων δυνάμεων F_1 και F_2 του σχήματος, που έχουν το ίδιο μέτρο, είναι:



α. μεγαλύτερη ως προς το σημείο Κ.

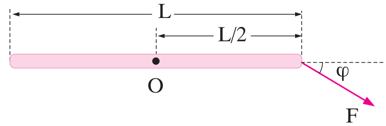
β. μεγαλύτερη ως προς το σημείο Μ.

γ. ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2007 (Εσπερινού Λυκείου)

2.72 Η ράβδος του σχήματος έχει μήκος L και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το μέσο της Ο και είναι κάθετος σε αυτή.



Η ροπή της δύναμης F ως προς το σημείο Ο έχει μέτρο:

α. 0.

β. $F\dfrac{L}{2}$.

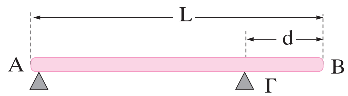
γ. $F\dfrac{L}{2}$συνφ.

δ. $F\dfrac{L}{2}$ημφ.

Εξετάσεις 2007 (Αποδήμων)

3ο-4ο ΘΕΜΑ

2.73 Ομογενής δοκός ΑΒ μήκους $L = 3$ m και βάρους $w = 50$ N ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη στο άκρο Α και στο σημείο Γ που απέχει από το άλλο άκρο Β απόσταση $d = 0{,}5$ m, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



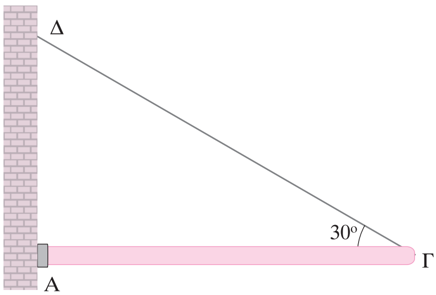
1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που ασκούν τα στηρίγματα στη δοκό στα σημεία Α και Γ.

Στο άκρο Β της δοκού τοποθετείται σώμα βάρους w_1 και παρατηρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στη δοκό από το στήριγμα στο άκρο Α ελαττώνεται στο μισό.

2. Να υπολογίσετε το βάρος w_1 του σώματος.

Εξετάσεις 2002 (Εσπερινού Λυκείου) (3ο θέμα)

2.74 Ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ με μήκος 1 m και βάρος 30 N ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της Γ συνδέεται με τον τοίχο με αβαρές νήμα ΔΓ που σχηματίζει γωνία 30° με τη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



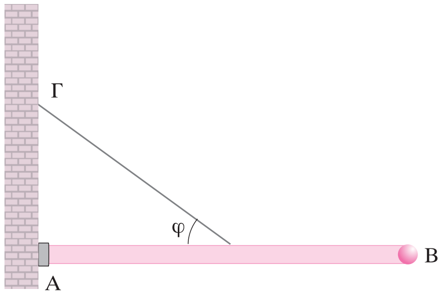
Α. Να υπολογίσετε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο από το νήμα και την άρθρωση.

Δίνεται ότι $ημ30° = συν60° = \frac{1}{2}$, $συν30° = ημ60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Εξετάσεις 2004 (Αποδήμων) (4ο θέμα)

[*Σημείωση:* Το πρόβλημα αυτό θα το συναντήσετε ξανά στην ενότητα 6 ολοκληρωμένο.]

2.75 Μία ομογενής ράβδος ΑΒ που έχει μήκος $\ell = 1$ m και μάζα $M = 6$ kg έχει στο άκρο της Β μόνιμα στερεωμένο ένα σώμα μικρών διαστάσεων με μάζα $m = 2$ kg. Η ράβδος στηρίζεται με το άκρο της Α μέσω άρθρωσης και αρχικά διατηρείται οριζόντια με τη βοήθεια νήματος, το ένα άκρο του οποίου είναι δεμένο στο μέσο της ράβδου και το άλλο στον κατακόρυφο τοίχο, όπως στο σχήμα. Η διεύθυνση του νήματος σχηματίζει γωνία $\hat{φ} = 30°$ με τη διεύθυνση της ράβδου στην οριζόντια θέση ισορροπίας.



Α. Να υπολογίσετε:

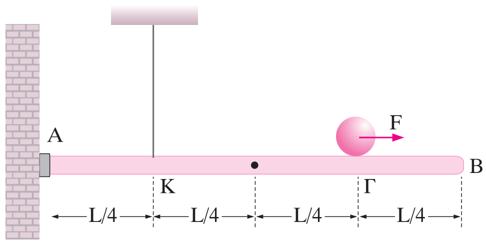
Α.1. Το μέτρο της τάσης του νήματος.

$\left(\text{Δίνεται ότι } g = 10\ \frac{m}{s^2}.\right)$

Εξετάσεις 2005 (Εσπερινού Λυκείου) (4ο θέμα)

[*Σημείωση:* Το πρόβλημα αυτό θα το συναντήσετε ξανά στην ενότητα 6 ολοκληρωμένο.]

2.76 Ομογενής και ισοπαχής ράβδος μήκους $L = 4$ m και μάζας $M = 2$ kg ισορροπεί οριζόντια. Το άκρο Α της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Σε σημείο Κ της ράβδου έχει προσδεθεί το ένα άκρο κατακόρυφου αβαρούς νήματος σταθερού μήκους, με το επάνω άκρο του συνδεδεμένο στην οροφή, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Στο σημείο Γ ισορροπεί ομογενής σφαίρα μάζας $m = 2{,}5$ kg και ακτίνας $r = 0{,}2$ m.

Δίνονται $AK = \frac{L}{4}$, $A\Gamma = \frac{3L}{4}$.

α. Να υπολογισθεί το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νήμα στη ράβδο.

$\left(\text{Δίνεται ότι: } g = 10\ \frac{m}{s^2}.\right)$

Εξετάσεις 2008 (Ημερήσιου Λυκείου)
(3ο θέμα)

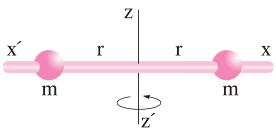
[*Σημείωση:* Το πρόβλημα αυτό θα το συναντήσετε ξανά στην ενότητα 5 ολοκληρωμένο.]

(όπως αποδείχθηκε γεωμετρικά στον 1ο τρόπο επίλυσης του προβλήματος).
Έτσι η σχέση (α) γράφεται:

$$I_{cm} = 2m\alpha^2 - 3m\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow I_{cm} = m\alpha^2$$

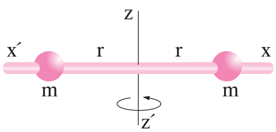
Λύσε και άλλες ασκήσεις σε δεύτερο επίπεδο

3.36 Η ράβδος x′x του σχήματος είναι αβαρής, ενώ οι μικρές σφαίρες μάζας m απέχουν την ίδια απόσταση r από τον άξονα περιστροφής z′z.



Πόσο τοις εκατό θα ελαττωθεί η ροπή αδράνειας I του συστήματος, αν υποδιπλασιαστεί η απόσταση και των δύο μαζών από τον άξονα περιστροφής;

3.37 Η ράβδος x′x του σχήματος είναι αβαρής, ενώ οι σφαίρες μάζας m απέχουν την ίδια απόσταση r από τον άξονα περιστροφής z′z. Η μία από τις δύο μάζες απομακρύνεται κατά μήκος της x′x σε απόσταση 3r από τον άξονα z′z, ενώ η άλλη παραμένει στην αρχική της θέση.



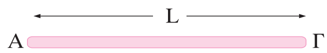
Να υπολογίσετε με δύο τρόπους τη νέα τιμή της ροπής αδράνειας του συστήματος των δύο μαζών ως προς τον άξονα z′z.

3.38 Λεπτός ομογενής δακτύλιος έχει μάζα M = 2 kg και ακτίνα R = 40 cm. Για τον ομογενή δακτύλιο να βρείτε:

α. Τη ροπή αδράνειάς του ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και εφάπτεται σε κάποιο σημείο του.

β. Τη ροπή αδράνειάς του ως προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό του και διέρχεται από το μέσο μιας (νοητής) ακτίνας του.

3.39 Η ομογενής και ισοπαχής ράβδος ΑΓ του σχήματος έχει μάζα M = 2 kg και μήκος L = 40 cm.

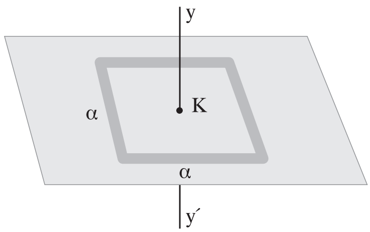


Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$$

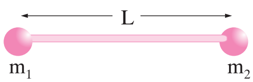
Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι παράλληλος προς τον αρχικό και διέρχεται από σημείο Κ έξω από τη ράβδο που ανήκει στη μεσοκάθετό της και απέχει απόσταση 30 cm από το άκρο Α της ράβδου.

3.40 Η ροπή αδράνειας μιας λεπτής και ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους L ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$.



Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ενός πλαισίου σχήματος τετραγώνου πλευράς α και συνολικής μάζας M ως προς τον άξονα y′y που περνάει από το κέντρο του K και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

3.41 Δύο σφαιρίδια πολύ μικρών διαστάσεων με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = 0{,}2$ kg βρίσκονται στα άκρα αβαρούς ράβδου μήκους L = 1 m.



Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος των μαζών ως προς άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και διέρχεται:

α. Από το μέσο της.

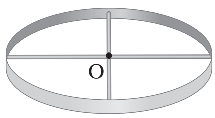
β. Από τη μάζα m_1.

3.42 Ένα εξάρτημα της μηχανής ενός φορτηγού αυτοκινήτου έχει μάζα M = 8 kg. Η ροπή αδράνειας του εξαρτήματος ως προς άξονα p που απέχει d = 10 cm από το κέντρο μάζας του είναι:

$$I_p = 0{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

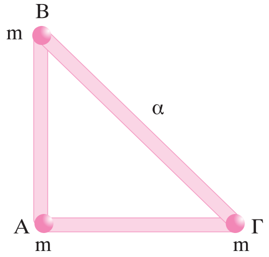
Πόση είναι η ροπή αδράνειας ως προς παράλληλο άξονα που απέχει d′ = 20 cm από το κέντρο μάζας;

3.43 Μια μεγάλη ροδέλα στη μηχανή ενός πλοίου αποτελείται από μία λεπτή ομογενή στεφάνη μάζας $M_1 = 10$ kg και ακτίνας R = 0,2 m και από τέσσερις συμμετρικά τοποθετημένες ακτίνες μήκους L = R και μάζας $M_2 = 3$ kg η καθεμία. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της ροδέλας ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδό της.



Η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου μήκους L και μάζας M ως προς άξονα που περνάει από το μέσο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι ίση με $\frac{1}{12}ML^2$.

3.44 Τρεις ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m_3 = m$ βρίσκονται μία σε κάθε κορυφή ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ υποτείνουσας ίσης με α, το οποίο δημιουργείται από τρεις αβαρείς ράβδους.



Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του συστήματος των τριών μαζών ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του τριγώνου που διέρχεται από την κορυφή Α της ορθής γωνίας.

«Πνεύμα» Πανελληνίων

1ο-2ο ΘΕΜΑ

3.45 Αν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που δρουν πάνω σ' ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, είναι μηδέν, τότε:

α. η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται.

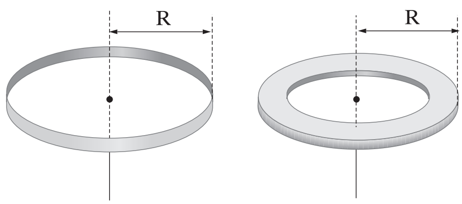
β. η γωνιακή του ταχύτητα είναι σταθερή.

γ. η γωνιακή του επιτάχυνση μεταβάλλεται.

δ. η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής του μεταβάλλεται.

Εξετάσεις 2002 (Εσπερινού Λυκείου)

3.46 Δακτύλιος και δίσκος με οπή, η μάζα του οποίου είναι ομογενώς κατανεμημένη, όπως στο σχήμα, έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα.



Α. Αν $I_{ΔΣ}$ και $I_{ΔΚ}$ οι ροπές αδράνειας του δίσκου και του δακτυλίου αντίστοιχα ως προς άξονες κάθετους στο επίπεδό τους που διέρχονται από τα κέντρα τους, τι ισχύει;

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

Δυναμική μελέτη σώματος που εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση.

4.36 **Ο οριζόντιος δίσκος του διπλανού σχήματος έχει μάζα M = 10 kg και ακτίνα R = 0,5 m. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Από τη χρονική στιγμή t = 0 και μετά ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου εφαπτομενική δύναμη σταθερού μέτρου F = 20 N. Να υπολογίσετε:**

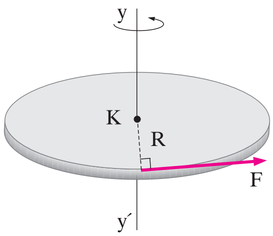
α. **Τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, την οποία και να σχεδιάσετε.**

β. **Τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.**

γ. **Τον αριθμό των περιστροφών που πραγματοποίησε ο δίσκος από τη χρονική στιγμή t = 0 ως τη χρονική στιγμή t_1.**

δ. **Τη γωνιακή μετατόπιση Δθ του δίσκου στο χρονικό διάστημα από 0 s ως 5 s.**

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$.



Δυναμική μελέτη σώματος που εκτελεί μόνο στροφική κίνηση

Σε αυτά τα προβλήματα εργαζόμαστε ως εξής:

1. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma$$

2. Εφόσον η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, εφαρμόζουμε τις γνωστές σχέσεις:

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha_\gamma t$$

και

$$\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$$

Λύση

α. Η περιστροφή του δίσκου ξεκινά από τη στιγμή t = 0 και μετά που ασκήθηκε πάνω του η ροπή της δύναμης $\vec{F}$.

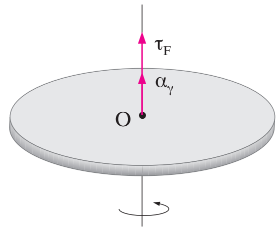
Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τον δίσκο. Έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \qquad (1)$$

Αλλά $\Sigma\tau = \tau_F = FR$ και $I = \frac{1}{2}MR^2$. Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) και έχουμε:

$$FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{2F}{MR} \Rightarrow \alpha_\gamma = 8\ \frac{rad}{s^2}$$

Η κατεύθυνση της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{\alpha}_\gamma$ είναι ί-δια με την κατεύθυνση της συνισταμένης ροπής, που στην προκειμένη περίπτωση είναι η ροπή $\vec{\tau}_F$ της δύναμης $\vec{F}$ και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



β. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου θα το υπολογίσουμε από τη σχέση:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_\gamma t$$

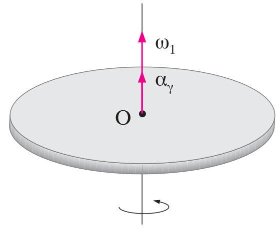
Επειδή όμως η αρχική γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι ίση με μηδέν ($\omega_0 = 0$), ο παραπάνω τύπος παίρνει τη μορφή:

$$\omega = \alpha_\gamma t$$

Έτσι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου θα είναι:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma t_1 \Rightarrow \omega_1 = 40\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι κατευθύνσεις των διανυσμάτων $\vec{\omega}_1$ και $\vec{\alpha}_\gamma$.



γ. Ο δίσκος κάνει ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση. Επομένως τον αριθμό N των περιστροφών θα τον υπολογίσουμε από την πρακτική σχέση:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \qquad (1)$$

όπου $\Delta\theta$ είναι η γωνιακή μετατόπιση (γωνία στροφής) του δίσκου. (Δείτε και δίπλα.)

Η γωνιακή μετατόπιση του δίσκου δίνεται από τη σχέση $\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$, αλλά επειδή $\omega_0 = 0$, έχουμε:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \Rightarrow \Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t_1^2 \Rightarrow \Delta\theta_1 = 100\ \text{rad}$$

Από τη σχέση (1) τελικά προκύπτει ότι:

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{50}{\pi}\ \text{περιστροφές}$$

δ. Τη γωνιακή μετατόπιση του δίσκου από 0 s → 5 s την υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα και είναι:

$$\Delta\theta_1 = 100\ \text{rad}$$

Πλήθος περιστροφών

- Αν ένας δίσκος ή τροχός εκτελεί **ομαλή στροφική κίνηση**, το πλήθος N των περιστροφών του σε χρόνο t_1 το υπολογίζουμε ισοδύναμα από τις σχεσεις:

$$N = \frac{t_1}{T} \qquad (1)$$

και

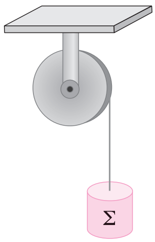
$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \qquad (2)$$

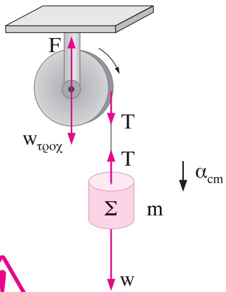
- Αν το σώμα εκτελεί μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση, η σχέση (1) **δεν** ισχύει. Το πλήθος των περιστροφών του σώματος στον χρόνο t_1 το υπολογίζουμε από τη σχέση:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

όπου $\Delta\theta$ είναι η γωνιακή μετατόπιση του σώματος τη στιγμή t_1.

Δυναμική μελέτη σώματος που εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση και συνδέεται με άλλο σώμα που εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.





Σχόλιο

Στην εφαρμογή της σχέσης $Στ = Iα_γ$ που αναπτύσσεται δίπλα θεωρήσαμε αρνητική τη ροπή της δύναμης που βοηθάει την περιστροφή. Αυτό συνέβη γιατί έπρεπε να τηρήσουμε την αρχική μας σύμβαση περί θετικής και αρνητικής ροπής. Εφόσον όμως η $\vec{α}_γ$ έχει πάντοτε την κατεύθυνση της $Σ\vec{τ}$, δεχτήκαμε και την $α_γ < 0$, δηλαδή ομόρροπη της $Σ\vec{τ}$, οπότε προκύπτει ότι η περιστροφή είναι επιταχυνόμενη. Θα τηρούμε στη συνέχεια αυτή τη σύμβαση, γιατί στις πολύπλοκες εφαρμογές είναι απαραίτητο.

4.37 **Η κατακόρυφη τροχαλία μάζας Μ, ακτίνας R και ροπής αδράνειας I του σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Στην αυλάκωση που διαθέτει η τροχαλία έχει τυλιχτεί αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους, στην ελεύθερη άκρη του οποίου κρέμεται σώμα Σ μάζας m. Αρχικά το σύστημα τροχαλία-σώμα είναι ακίνητο και το νήμα είναι τεντωμένο. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα. Να υπολογίσετε:**

α. Την επιτάχυνση $α_{cm}$ του σώματος.

β. Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

γ. Την τάση του νήματος.

(Δεν υπάρχουν τριβές και το σκοινί δε γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας.)

Λύση

α. ✓ Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σώμα μάζας m. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα m είναι: το βάρος του $\vec{w}$ και η τάση $\vec{T}$ του νήματος. Έτσι έχουμε:

$$Σ\vec{F} = m\vec{α}_{cm} \Rightarrow mg - T = mα_{cm} \qquad (1)$$

✓ Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την τροχαλία. Οι δυνάμεις που ασκούνται στην τροχαλία είναι: η τάση $\vec{T}$ από το νήμα, το βάρος της $\vec{w}_{τροχ}$ και η δύναμη $\vec{F}$ από τον άξονα.

Οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $\vec{w}_{τροχ}$ δε δημιουργούν ροπή, γιατί ο φορέας τους περνάει από τον άξονα περιστροφής. Η ροπή της τάσης του νήματος είναι $τ_T = -TR$, ενώ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας είναι $α_γ < 0$, εφόσον η γωνιακή επιτάχυνση έχει πάντοτε την κατεύθυνση της $Σ\vec{τ}$, οπότε θα έχει την ίδια αλγεβρική τιμή με αυτήν. (Παρ' ότι προέκυψε $α_γ < 0$, η κίνηση της τροχαλίας είναι επιταχυνόμενη, αφού και $Στ < 0$. Η κίνηση είναι επιταχυνόμενη όταν $Σ\vec{τ}$ και $\vec{α}_γ$ είναι ομόρροπες. Τα

πρόσημα των $\Sigma\vec{\tau}$ και $\vec{\alpha}_\gamma$ δείχνουν απλώς τη φορά της διεξαγόμενης περιστροφικής κίνησης.)
Επομένως:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow -TR = I(-\alpha_\gamma) \Rightarrow TR = I\alpha_\gamma \qquad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) έχουν τρεις αγνώστους (T, α_{cm}, α_γ). Γι' αυτόν τον λόγο, στη συνέχεια θα συσχετίσουμε τις επιταχύνσεις α_{cm} και α_γ, ώστε να προκύψει και τρίτη σχέση.

✓ Θυμηθείτε ότι η επιτρόχια επιτάχυνση α_ε ενός σημείου στην περιφέρεια του τροχού είναι $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$ και, επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία, είναι ίση και με την επιτάχυνση α_{cm} του σώματος. Έτσι:

$$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R \qquad (3)$$

✓ Ακολουθεί η επίλυση του συστήματος των τριών εξισώσεων (1), (2) και (3) με τους τρεις αγνώστους.

– Η σχέση (1) $\Rightarrow T = mg - m\alpha_{cm}$ (4)

– Η σχέση (3) $\Rightarrow \alpha_\gamma = \dfrac{\alpha_{cm}}{R}$ (5)

– Η σχέση (2) με τη βοήθεια των σχέσεων (4) και (5) γίνεται:

$$TR = I\alpha_\gamma \overset{(4)}{\underset{(5)}{\Longrightarrow}} (mg - m\alpha_{cm})R = I\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (mg - m\alpha_{cm})R^2 = I\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgR^2 - m\alpha_{cm}R^2 = I\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgR^2 = (I + mR^2)\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{mgR^2}{I + mR^2}$$

Δυναμική μελέτη σώματος που εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση και συνδέεται με άλλο σώμα που εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση

Σε αυτά τα προβλήματα μελετάμε την κίνηση κάθε σώματος ξεχωριστά.

1. Για το σώμα που κάνει την περιστροφική κίνηση χρησιμοποιούμε:

- Τον θεμελιώδη νόμο:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \qquad (1)$$

- Τους τύπους:

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha_\gamma t$$

και

$$\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$$

εφόσον βέβαια $\alpha_\gamma =$ σταθ.

2. Για κάθε σώμα που κάνει μεταφορική κίνηση χρησιμοποιούμε:

- Τον θεμελιώδη νόμο:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \qquad (2)$$

- Τους τύπους:

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha t$$

και

$$x = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$$

εφόσον βέβαια $\alpha =$ σταθ.

3. Οι σχέσεις (1) και (2) συνδέονται με τη σχέση:

$$\alpha = \alpha_\gamma R \qquad (3)$$

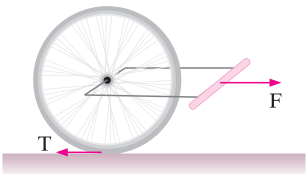
Πότε είναι $\alpha_\varepsilon = \alpha_{cm}$
Στα προβλήματα με τροχαλία, αν δίνεται ότι το νήμα **δεν ολισθαίνει** στο αυλάκι της τροχαλίας, ισχύει ότι: το μέτρο της επιτρόχιας, επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας ισούται με το μέτρο της επιτάχυνσης των σωμάτων που συνδέονται με την τροχαλία και εκτελούν μεταφορική κίνηση.

β και **γ.** Αντικαθιστώντας τέλος την τιμή της επιτάχυνσης α_{cm} στις σχέσεις (4) και (5), έχουμε:

- $$T = mg - m\alpha_{cm} \Rightarrow T = mg - m\frac{mgR^2}{I + mR^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T = \frac{mgI}{I + mR^2}$$

- $$\alpha_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\frac{mgR^2}{I + mR^2}}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{mgR}{I + mR^2}$$

Δυναμική μελέτη σώματος που εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση ταυτόχρονα.



4.38 **Στο διπλανό σχήμα εικονίζεται ένας τροχός μάζας $m = 4$ kg και ακτίνας $R = 0{,}4$ m, που αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε με κάποιον τρόπο μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ στον άξονα του τροχού, με αποτέλεσμα ο τροχός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αν η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού είναι $\alpha_{cm} = 8\ \frac{m}{s^2}$, να υπολογίσετε:**

α. **Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ περιστροφής του τροχού.**

β. **Το μέτρο της στατικής τριβής T.**

γ. **Το μέτρο της δύναμης F.**

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I = mR^2$.

Λύση

α. Η επιτρόχια επιτάχυνση α_ε ενός σημείου της περιφέρειας του τροχού είναι $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$, όπου α_γ η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.

Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, η επιτρόχια επιτάχυνσή του α_ε θα είναι ίση με την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου του.
Έτσι θα έχουμε ότι:

$$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = 20\ \frac{rad}{s^2}$$

β. Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, η τριβή ανάμεσα σε αυτόν και στο οριζόντιο επίπεδο είναι στατική τριβή.
Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την κίνηση του τροχού παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \qquad (1)$$

Η ροπή των δυνάμεων $\vec{F}$, $\vec{w}$ και $\vec{N}$ είναι μηδέν, επειδή οι φορείς τους διέρχονται από τον άξονα περιστροφής. Η ροπή της στατικής τριβής είναι $\tau_T = -TR$ και η αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης είναι αρνητική, επειδή η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\gamma$ είναι πάντοτε ομόρροπη της $\Sigma\vec{\tau}$.
Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$-TR = I(-\alpha_\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{I\alpha_\gamma}{R} \xRightarrow{I=mR^2} T = \frac{mR^2\alpha_\gamma}{R} \Rightarrow T = mR\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 32\ N$$

γ. Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του τροχού έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow F - T = m\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = T + m\alpha_{cm} \Rightarrow F = 64\ N$$

Δυναμική μελέτη σώματος που εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση

Σε αυτά τα προβλήματα μελετάμε ξεχωριστά τις δύο κινήσεις που κάνει το σώμα.

1. Για την περιστροφική κίνηση του σώματος εφαρμόζουμε:

- Τον θεμελιώδη νόμο:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \qquad (1)$$

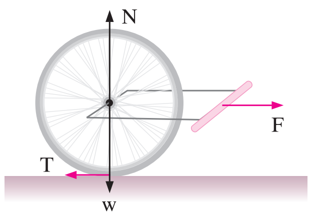
- Τους τύπους:

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha_\gamma t$$

και

$$\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$$

εφόσον $\alpha_\gamma =$ σταθ.



2. Για τη μεταφορική κίνηση του σώματος εφαρμόζουμε:

- Τον θεμελιώδη νόμο:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm} \qquad (2)$$

- Τους τύπους:

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha_{cm} t$$

και

$$x = \upsilon_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$$

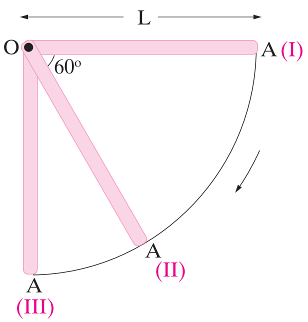
εφόσον $\alpha_{cm} =$ σταθ.

3. Τις σχέσεις (1) και (2) συνήθως τις συνδέουμε με τη σχέση:

$$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R \qquad (3)$$

(αν το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει).

Μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο τη στιγμιαία επιτάχυνση.



4.39 **Η λεπτή και ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μάζα $M = 2$ kg, μήκος $L = 0{,}8$ m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη να περιστραφεί από την οριζόντια θέση. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. Να υπολογίσετε:**

Α. **Τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της Ο.**

Β. **Τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση α_γ της ράβδου:**

- **α.** **Όταν ακόμα βρίσκεται στην οριζόντια θέση (Ι).**
- **β.** **Τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση (ΙΙ) στην οποία σχηματίζει γωνία 60° με την αρχική οριζόντια διεύθυνση.**
- **γ.** **Όταν διέρχεται από την κατακόρυφη θέση (ΙΙΙ).**

λύση

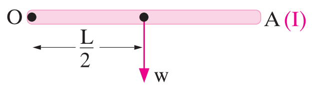
Α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Steiner για τον άξονα Ο περιστροφής της ράβδου.

Έχουμε:

$$I_O = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_O = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_O = \frac{1}{3}ML^2 \qquad (1)$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι $I_O = 0{,}43\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.



Β. **α.** Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τη ράβδο.

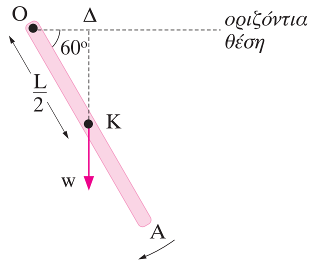
Έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_O\alpha_\gamma \Rightarrow \tau_w = I_O\alpha_\gamma \qquad (2)$$

Αλλά $\tau_w = w\frac{L}{2} \Rightarrow \tau_w = Mg\frac{L}{2}$, οπότε από τη σχέση (2) με τη βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε:

$$\frac{MgL}{2} = \frac{1}{3}ML^2\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{3g}{2L} \Rightarrow \alpha_\gamma = 18{,}75\ \frac{rad}{s^2}$$

β. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τη ράβδο καθώς διέρχεται από τη θέση (ΙΙ).



Έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_O\alpha_\gamma \Rightarrow \tau_w = I_O\alpha_\gamma \qquad (3)$$

Υπολογισμός της τ_w

$$\tau_w = w \cdot (O\Delta) \qquad (\alpha)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΟ ($\hat{\Delta} = 90°$) όμως έχουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu 60° = \frac{(O\Delta)}{(OK)} \Rightarrow (O\Delta) = (OK)\sigma\upsilon\nu 60° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (O\Delta) = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow (O\Delta) = \frac{L}{4}$$

Έτσι η σχέση (α) γίνεται $\tau_w = Mg\frac{L}{4}$.

Τέλος, από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:

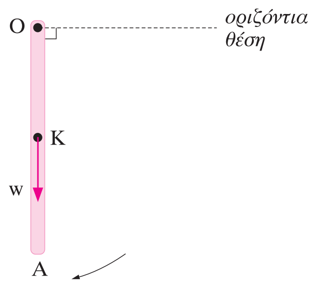
$$\tau_w = I_O\alpha_\gamma \Rightarrow \frac{MgL}{4} = \frac{1}{3}ML^2\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{3g}{4L} \Rightarrow \alpha_\gamma = 9{,}375\ kg \cdot m^2$$

γ. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για τη ράβδο καθώς διέρχεται από την κατακόρυφη θέση (ΙΙΙ).

Έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_O\alpha_\gamma \Rightarrow \tau_w = I_O\alpha_\gamma \qquad (4)$$



Όμως στη θέση (ΙΙΙ) ο φορέας του βάρους διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, οπότε η ροπή του είναι ίση με μηδέν, δηλαδή $\tau_w = 0$.

Έτσι από τη σχέση (4) προκύπτει ότι και $\alpha_\gamma = 0$.

Υπολογισμός στιγμιαίας επιτάχυνσης

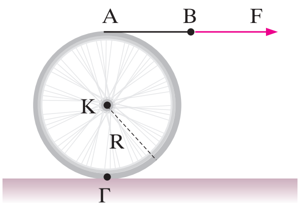
Σε πολλά προβλήματα, κατά τη διάρκεια της περιστροφής του σώματος δεν παραμένει σταθερή η γωνιακή του επιτάχυνση, επειδή το στερεό σώμα δέχεται συνισταμένη ροπή που μεταβάλλεται κατά μέτρο.

- Ωστόσο, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για οποιαδήποτε θέση διέλευσης του σώματος μας ζητηθεί και να βρούμε τη στιγμιαία γωνιακή του επιτάχυνση α_γ για τη θέση αυτή.
- Δεν μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε τους τύπους $\omega = \omega_0 \pm \alpha_\gamma t$ και $\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$, οι οποίοι ισχύουν **μόνο** όταν το σώμα κινείται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση ($\alpha_\gamma =$ σταθ.).

Θα δούμε παρακάτω ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.

- «Λογική» της σχεδίασης της στατικής τριβής στην κύλιση χωρίς ολίσθηση.
- Σύγκριση των επιταχύνσεων διάφορων σημείων.

4.40 **Ο τροχός του διπλανού σχήματος έχει μάζα $m = 5$ kg και ακτίνα $R = 0{,}2$ m. Γύρω από τον τροχό είναι τυλιγμένο αβαρές σκοινί που στο ελεύθερο άκρο του Β ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 15$ N. Αν ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο:**



Α. **Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται ο τροχός στην οριζόντια διεύθυνση κίνησης:**

Β. **Να υπολογίσετε:**

α. **Την επιτάχυνση $\alpha_{cm} = \alpha_K$ του κέντρου Κ του τροχού, καθώς και τη γωνιακή του επιτάχυνση α_γ.**

β. **Την επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου Α «πρόσδεσης» του νήματος.**

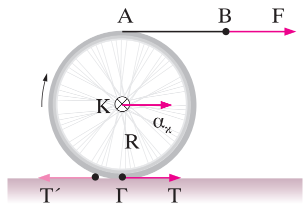
γ. **Την επιτάχυνση α_B του σημείου εφαρμογής της δύναμης.**

δ. **Να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις των σημείων Κ, Α και Β.**

ε. **Να συγκρίνετε τις μετατοπίσεις στον ίδιο χρόνο του κέντρου Κ του τροχού και του σημείου Β εφαρμογής της δύναμης.**

Δίνεται για τον τροχό ότι $I_K = \frac{1}{2}mR^2$.

λύση



Α. Στην οριζόντια διεύθυνση (διεύθυνση κίνησης) στον τροχό ασκούνται:

- Η δύναμη $\vec{F}$, που μέσω του σκοινιού «μεταφέρεται» από το σημείο Β όπου την εφαρμόζουμε στο σημείο Α του τροχού.
- Η στατική τριβή στο σημείο Γ του τροχού. Για τη σχεδίαση της στατικής τριβής χρειάζεται πάντα προσοχή! Σύμφωνα και με το σχόλιο-«κλειδί» που ακολουθεί, εφόσον στο σώμα εκτός από τη στατική τριβή ασκείται και άλλη δύναμη (η $\vec{F}$) που δε διέρχεται από το κέντρο του τροχού, θα εργαστούμε ως εξής:
  – Θα σχεδιάσουμε τη στατική τριβή με τη φορά που μας φαίνεται λογική (βάσει των σκέψεων που ακολουθούν).
  – Με τη δυναμική μελέτη του σώματος θα υπολογίσουμε τη στατική τριβή Τ. Αν είναι $T > 0$, τη σχεδιάσαμε σωστά, αν προκύψει $T < 0$, θα αντιστρέψουμε τη φορά της. (Δείτε τη δυναμική μελέτη στην απάντηση του ερωτήματος Β. α.)

Ο τροχός στρέφεται **σύμφωνα** με τους δείκτες του ρολογιού. Έτσι όπως στρέφεται, «σπρώχνει» το έδαφος προς τα αριστερά, ασκώντας του τη δύναμη δράσης $\vec{T}'$ με φορά προς τα αριστερά. Το έδαφος με τη σειρά του ασκεί αντίθετη δύναμη αντίδρασης στον τροχό, που είναι η στατική τριβή $\vec{T}$ και έχει κατεύθυνση προς τα **δεξιά**.

Οι δυνάμεις λοιπόν που δέχεται ο τροχός είναι η δύναμη $\vec{F}$ από το σκοινί στο σημείο του Α και η στατική τριβή $\vec{T}$ στο σημείο Γ που ακουμπάει κάθε στιγμή στο έδαφος, με κατεύθυνση προς τα δεξιά.

Σημείωση
Σε αυτή τη μελέτη δε λάβαμε υπόψη μας τις κατακόρυφες συνιστώσες δράσης - αντίδρασης, εφόσον η μελέτη επικεντρώνεται στην οριζόντια διεύθυνση κίνησης του τροχού.

Β. α. • Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του τροχού. Έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_K \Rightarrow F + T = m\alpha_K \qquad (1)$$

- Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την κίνηση του τροχού. Έχουμε:

$$\Sigma\tau = I_K \alpha_\gamma \Rightarrow \tau_F + \tau_T = I_K \alpha_\gamma \qquad (\alpha)$$

Αλλά $\tau_F = -FR$ και $\tau_T = +TR$.

Διερεύνηση

Η διπλανή διερεύνηση είναι πάντοτε απαραίτητη!

Εφόσον ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η μεταφορική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_K$ του κέντρου του αυξάνεται, θα πρέπει να αυξάνεται και το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας $\vec{\omega}$, ώστε να ισχύει κάθε στιγμή ότι $\upsilon = \omega R$ (απαραίτητη συνθήκη στην κύλιση χωρίς ολίσθηση).

Έτσι η συνισταμένη ροπή Στ θα έχει τη φορά της γωνιακής ταχύτητας (προς τα μέσα), δηλαδή θα έχει **αρνητικό** πρόσημο. **Αρνητικό** θα είναι λοιπόν και το πρόσημο της γωνιακής επιτάχυνσης ($\alpha_\gamma < 0$).

Επομένως η σχέση (α) γίνεται:

$$-FR + TR = \frac{1}{2}mR^2(-\alpha_\gamma) \Rightarrow F - T = \frac{1}{2}mR\alpha_\gamma \qquad (2)$$

- Αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει ότι:

$$\alpha_K = \alpha_\gamma R \qquad (3)$$

Επίλυση του συστήματος των σχέσεων (1), (2), (3)

Η σχέση (2) με τη βοήθεια της σχέσης (3) γίνεται:

$$F - T = \frac{1}{2}m\alpha_K \qquad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (4) και έχουμε:

$$2F = m\alpha_K + \frac{1}{2}m\alpha_K \Rightarrow 2F = \frac{3m\alpha_K}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_K = \frac{4F}{3m} \Rightarrow \alpha_K = \frac{4 \cdot 15}{3 \cdot 5} \Rightarrow \alpha_K = 4\ \frac{m}{s^2}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\alpha_\gamma = \frac{\alpha_K}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{4}{0{,}2} \Rightarrow \alpha_\gamma = 20\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Υπολογισμός της Τ

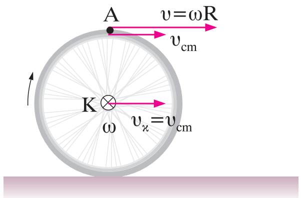
Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F + T = m\alpha_K \Rightarrow T = m\alpha_K - F = 5 \cdot 4 - 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 5\ \text{N}$$

Προέκυψε $T > 0$. Επομένως η φορά της στατικής τριβής $\vec{T}$ είναι όπως τη σχεδιάσαμε.

β. Η ταχύτητα του σημείου Κ κάποια στιγμή είναι η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου μάζας του τροχού. Δηλαδή:



$$\upsilon_K = \upsilon_{cm} \qquad (5)$$

Η ταχύτητα του σημείου Α την ίδια στιγμή είναι η συνισταμένη της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{cm}$, την οποία έχουν όλα τα σημεία του τροχού, και της επιτρόχιάς του ταχύτητας $\vec{\upsilon}$. Στο σημείο Α όμως οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_{cm}$ και $\vec{\upsilon}$ είναι ομόρροπες, οπότε:

$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon$$

Αλλά $\upsilon = \omega R$ και, αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, είναι και $\upsilon_{cm} = \omega R$, δηλαδή $\upsilon = \upsilon_{cm}$, οπότε τελικά:

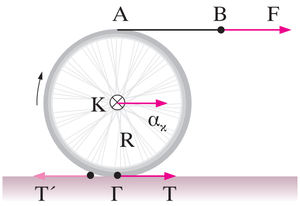
$$\upsilon_A = \upsilon_{cm} + \upsilon_{cm} \Rightarrow \upsilon_A = 2\upsilon_{cm} \qquad (6)$$

- Το σημείο Κ κινείται με επιτάχυνση:

$$\alpha_K = \frac{d\upsilon_K}{dt} \overset{(5)}{\Longrightarrow} \alpha_K = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} \qquad (7)$$

- Το σημείο Α κινείται με επιτάχυνση:

$$\alpha_A = \frac{d\upsilon_A}{dt} \overset{(6)}{\Longrightarrow} \alpha_A = \frac{d(2\upsilon_{cm})}{dt} \Rightarrow \alpha_A = 2\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} \qquad (8)$$



Από τις σχέσεις (7) και (8) τελικά προκύπτει ότι:

$$\alpha_A = 2\alpha_K = 2 \cdot 4 \Rightarrow \alpha_A = 8\ \frac{m}{s^2}$$

γ. Η επιτάχυνση του σημείου Β είναι ίση με την επιτάχυνση του σημείου Α, δηλαδή:

$$\alpha_B = \alpha_A = 2\alpha_K \Rightarrow \alpha_B = 8\ \frac{m}{s^2}$$

δ. Από την προηγούμενη μελέτη μας είναι προφανές ότι:

$$\alpha_B = \alpha_A = 2\alpha_K$$

ε. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ασκήθηκε στον τροχό η δύναμη $\vec{F}$ ο τροχός ήταν ακίνητος.

- Το κέντρο Κ του τροχού εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_K$. Η μετατόπισή του σε χρόνο t θα είναι:

$$x_K = \frac{1}{2}\alpha_K t^2$$

- Το σημείο Β στο οποίο ασκούμε (με το χέρι μας) τη δύναμη $\vec{F}$ εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\alpha_B = 2\alpha_K$.
Η μετατόπισή του στον ίδιο χρόνο t θα είναι:

$$x_B = \frac{1}{2}\alpha_B t^2 = \frac{1}{2} 2\alpha_K t^2 = 2\left(\frac{1}{2}\alpha_K t^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = 2x_K$$

Στον ίδιο χρόνο λοιπόν το σημείο Β θα μετατοπιστεί **διπλάσια** απ' ό,τι το κέντρο του τροχού! (Γι' αυτόν τον λόγο και το σκοινί ξετυλίγεται.)

«Λογική» της σχεδίασης της στατικής τριβής στην κύλιση χωρίς ολίσθηση

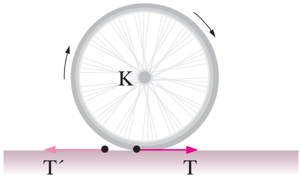
Θα εξετάσουμε πολλές περιπτώσεις (σχεδόν όλες)! Αν κάποιες περιπτώσεις δεν καλύπτονται από αυτό το σχόλιο-«κλειδί», είναι σίγουρα έξω από το πνεύμα και το επίπεδο των εξετάσεων της Γ′ Λυκείου.

Α. Εκτός από τη στατική τριβή δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις στη διεύθυνση της κίνησης.

Σε αυτή την περίπτωση, **η κατεύθυνση της στατικής τριβής εξαρτάται μόνο από τη φορά περιστροφής του σώματος.**

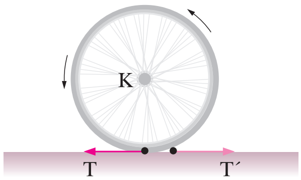
Έτσι υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. *Το σώμα στρέφεται* ***σύμφωνα*** *με τους δείκτες του ρολογιού.*



Δείτε το σχήμα. Έτσι όπως στρέφεται ο τροχός, «σπρώχνει» το έδαφος προς τα αριστερά, ασκώντας του τη δύναμη δράσης $\vec{T}'$ με φορά προς τα αριστερά. Το έδαφος με τη σειρά του ασκεί αντίθετη δύναμη αντίδρασης στον τροχό, που είναι η στατική τριβή $\vec{T}$ και έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά (ανεξάρτητα από το προς τα πού κινείται μεταφορικά το κέντρο μάζας του σώματος).

2. *Το σώμα στρέφεται* ***αντίθετα*** *προς τους δείκτες του ρολογιού.*



Σε αυτή την περίπτωση, ο τροχός «σπρώχνει» το έδαφος προς τα δεξιά, ασκώντας του τη δράση $\vec{T}'$ με φορά προς τα δεξιά. Το έδαφος τότε ασκεί στον τροχό αντίθετη δύναμη αντίδρασης, που είναι η στατική τριβή $\vec{T}$ και έχει κατεύθυνση προς τα **αριστερά** (ανεξάρτητα από το προς τα πού κινείται μεταφορικά το κέντρο μάζας του σώματος).

Β. Εκτός από τη στατική τριβή ασκούνται και άλλες δυνάμεις ή συνιστώσες δυνάμεων στη διεύθυνση της κίνησης, οι φορείς των οποίων διέρχονται από τον άξονα περιστροφής. ⟶

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. **Γνωρίζουμε το είδος της κίνησης.**

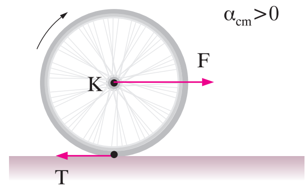
   α. Αν η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, τότε, εφόσον αυξάνεται η υ_{cm}, θα πρέπει να αυξάνεται και η ω, ώστε να διατηρείται κάθε στιγμή η ισότητα $\upsilon = \omega R$ (κύλιση χωρίς ολίσθηση).

   Η φορά της στατικής τριβής θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε η ροπή της $\vec{\tau}_T$ να είναι **ομόρροπη** προς τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

   Βρίσκουμε τη φορά της $\vec{\omega}$ με τον κανόνα του δεξιού χεριού και σχεδιάζουμε το διάνυσμα της $\vec{T}$ προς τα εκεί που δίνει ροπή $\vec{\tau}_T$ ίδιας φοράς με την $\vec{\omega}$.

   Δείτε περιπτώσεις:

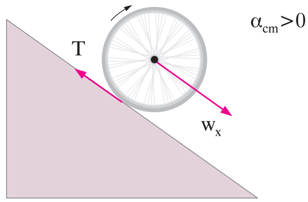
   • **i)** Οριζόντιο επίπεδο



   – Η $\vec{\omega}$ είναι κάθετη στη σελίδα με φορά προς τα μέσα ($\vec{\omega}\ \otimes$).

   – Αφού $\alpha_{cm} > 0$, η ω αυξάνεται, οπότε η ροπή $\vec{\tau}_T$ της τριβής πρέπει να είναι ομόρροπη της $\vec{\omega}$. Δηλαδή η $\vec{\tau}_T$ είναι κάθετη στη σελίδα με φορά προς τα μέσα ($\vec{\tau}_T\ \otimes$). Με τον κανόνα του δεξιού χεριού, βάζοντας τον αντίχειρα να δείχνει την $\vec{\tau}_T$, δηλαδή να είναι κάθετος στη σελίδα με φορά προς τα μέσα, βρίσκουμε εύκολα τη φορά της $\vec{T}$.

   • **ii)** Κεκλιμένο επίπεδο



   – Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι κάθετη στη σελίδα με φορά προς τα μέσα ($\vec{\omega}\ \otimes$).

   – Αφού $\alpha_{cm} > 0$, η ω αυξάνεται, οπότε η ροπή $\vec{\tau}_T$ της τριβής πρέπει να είναι ομόρροπη της $\vec{\omega}$. Δηλαδή η $\vec{\tau}_T$ είναι κάθετη στη σελίδα με φορά προς τα μέσα ($\vec{\tau}_T\ \otimes$). Για να δίνει η τριβή ροπή $\vec{\tau}_T$ με φορά προς τα μέσα, πρέπει να έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα (κανόνας του δεξιού χεριού).

$\longrightarrow$

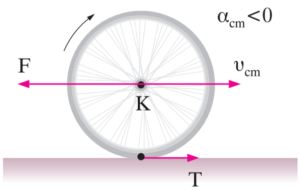
β. Αν η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, τότε, εφόσον ελαττώνεται η υ_{cm}, θα πρέπει να ελαττώνεται ανάλογα και η ω, ώστε να διατηρείται κάθε στιγμή η ισότητα $\upsilon_{cm} = \omega R$ (κύλιση χωρίς ολίσθηση).

Η φορά της στατικής τριβής $\vec{T}$ θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε η ροπή της $\vec{\tau}_T$ να είναι **αντίρροπη** προς τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.

Βρίσκουμε τη φορά της $\vec{\omega}$ με τον κανόνα του δεξιού χεριού και σχεδιάζουμε το διάνυσμα της $\vec{T}$, ώστε να δίνει ροπή $\vec{\tau}_T$ **αντίθετης φοράς** από αυτήν της $\vec{\omega}$.

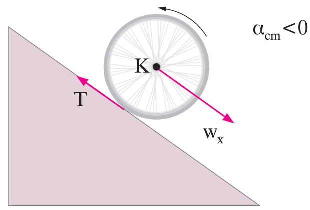
Δείτε περιπτώσεις:

i) Οριζόντιο επίπεδο



Έχουμε: $\vec{\omega}$ ⊗. Αφού ελαττώνεται η υ_{cm}, πρέπει να ελαττώνεται και η ω. Έτσι η ροπή $\vec{\tau}_T$ της στατικής τριβής θα πρέπει να είναι **αντίρροπη** της $\vec{\omega}$, δηλαδή $\vec{\tau}_T$ ⊙. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει η φορά της στατικής τριβής να είναι προς τα μπρος, όπως στο σχήμα (κανόνας του δεξιού χεριού). Δείτε και δίπλα την περίπτωση (ii).

ii) Εκτόξευση προς τα επάνω σε κεκλιμένο επίπεδο



Έχουμε: $\vec{\omega}$ ⊙. Αφού ελαττώνεται η υ_{cm}, πρέπει να ελαττώνεται και η ω. Επομένως $\vec{\tau}_T$ ⊗. Έτσι η στατική τριβή θα έχει φορά προς τα πάνω.

2. Αν δεν έχουμε πληροφορίες ή βεβαιότητα για το είδος της κίνησης, τότε σχεδιάζουμε τη στατική τριβή **με μια τυχαία φορά** (όποια μας φαίνεται λογική) και κάνουμε τη δυναμική μελέτη για το σώμα. Έτσι υπολογίζουμε τη στατική τριβή Τ (ακόμα και αν δε μας τη ζητούν).

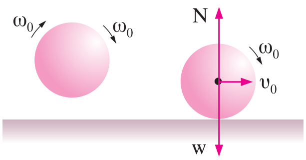
– Αν προκύψει $T > 0$, το διάνυσμα της στατικής τριβής είναι όπως το σχεδιάσαμε.
– Αν προκύψει $T < 0$, το διάνυσμα της στατικής τριβής έχει αντίθετη φορά από αυτήν που σχεδιάσαμε και το αλλάζουμε στο σχήμα μας (αν χρειάζεται).

Γ. Εκτός από τη στατική τριβή ασκούνται και άλλες δυνάμεις ή συνισταμένες δυνάμεων στον άξονα της κίνησης, που οι φορείς κάποιων από αυτές (ή όλων) δε διέρχονται από τον άξονα περιστροφής.

Σε αυτή την περίπτωση, οι συνδυασμοί που μπορεί να προκύψουν είναι πάρα πολλοί και τα πράγματα μπερδεύονται. Χρειάζονται διερευνήσεις και ξανά διερευνήσεις. Καταφεύγουμε λοιπόν στην απλή συνταγή: Σχεδιάζουμε τη στατική τριβή **με μια τυχαία φορά** (ίσως όποια μας φαίνεται πιο λογική) και κάνουμε τη δυναμική μελέτη για το σώμα. Έτσι υπολογίζουμε τη στατική τριβή Τ (ακόμα και αν δε μας τη ζητούν). ⟶

– Αν προκύψει $T > 0$, το διάνυσμα της στατικής τριβής είναι όπως το σχεδιάσαμε.
– Αν προκύψει $T < 0$, π.χ. $T = -4$ N, τότε διαπιστώνουμε ότι το διάνυσμα της στατικής τριβής έχει αντίθετη φορά από αυτήν που το σχεδιάσαμε. Έτσι λέμε τελικά ότι, π.χ., $T = 4$ N και, αν χρειάζεται, αλλάζουμε στο σχήμα τη φορά της στατικής τριβής.

Μελέτη της κύλισης στερεού σε λείο επίπεδο.



4.41 **Δίνουμε σε μία σφαίρα (ή σε έναν κύλινδρο ή σε έναν τροχό) μία αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 και στη συνέχεια τη ρίχνουμε να κινηθεί κατά μήκος ενός λείου οριζόντιου επιπέδου.**

α. Πότε το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

β. Πότε το σώμα κάνει και κύλιση και ολίσθηση;

λύση

α. Κύλιση χωρίς ολίσθηση

Για να κυλίεται η σφαίρα χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο, πρέπει να τη ρίξουμε έτσι ώστε η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ του κέντρου της να έχει μέτρο $\boldsymbol{\upsilon_0 = \omega_0 R}$ (αφού αυτή είναι η αναγκαία και ικανή σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα του κέντρου μάζας και στη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής για να έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση).

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του τροχού δε θα μεταβληθούν οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_0$ και $\vec{\omega}_0$, οπότε θα ισχύει κάθε στιγμή ότι $\upsilon_0 = \omega_0 R$ και θα έχουμε συνεχώς κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Πράγματι, στη σφαίρα ασκούνται το κατακόρυφο βάρος της $\vec{w}$ και η κατακόρυφη αντίδραση $\vec{N}$ από το έδαφος. Δεν υπάρχει καμία δύναμη ή συνιστώσα δύναμης στην οριζόντια διεύθυνση. Έτσι, στην οριζόντια διεύθυνση της κίνησης ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} = 0$$

άρα:

$$\vec{\upsilon}_0 = \text{σταθερή}$$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο

Ρίχνουμε ένα σώμα στο λείο οριζόντιο επίπεδο ενώ αυτό ήδη στρέφεται με μία αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0.
Αν ρίξουμε το σώμα έτσι ώστε η ταχύτητα υ_0 του κέντρου του να έχει μέτρο $\boldsymbol{\upsilon_0 = \omega_0 R}$, τότε το σώμα **θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει**.
Αυτό συμβαίνει γιατί οι ταχύτητες υ_0 και ω_0 θα παραμείνουν σταθερές, εφόσον δεν υπάρχει συνισταμένη δύναμη αλλά ούτε και συνισταμένη ροπή για να τις μεταβάλει.

Οι μοναδικές δυνάμεις $\vec{w}$ και $\vec{N}$ που δέχεται η σφαίρα διέρχονται από το κέντρο της, οπότε οι ροπές τους είναι ίσες με μηδέν. Δεν υπάρχει επομένως ροπή για να αλλάξει τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού. Άρα και:

$$\vec{\omega}_0 = \text{σταθερή}$$

Αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, σε χρόνο μιας περιόδου Τ θα μετατοπίζεται κατά:

$$s = \upsilon_0 T = (\omega_0 R)T = \frac{2\pi}{T} RT \Rightarrow s = 2\pi R$$

β. Και κύλιση και ολίσθηση

Αν σκεφτούμε καλά τα παραπάνω, **στην περίπτωση που ρίξουμε τη σφαίρα με $\upsilon_0 \neq \omega_0 R$, η σφαίρα και θα κυλίεται και θα ολισθαίνει.**

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. **Αν $\upsilon_0 > \omega_0 R$**

   Η κίνηση της σφαίρας στην καθομιλουμένη περιγράφεται με την έκφραση **κυλάει και τσουλάει**.

   Μόλις η σφαίρα έρθει σε επαφή με το λείο οριζόντιο επίπεδο, το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, ενώ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_0$ **αναντίστοιχα μικρότερη** από τη μεταφορική ταχύτητα, αφού $\omega_0 < \frac{\upsilon_0}{R}$.

   Σε χρόνο μιας περιόδου η σφαίρα μετατοπίζεται κατά $s = \upsilon_0 T > \omega_0 RT$, δηλαδή:

   $$s > \frac{2\pi}{T} RT \Rightarrow s > 2\pi R$$

   Η μετατόπισή της (s) λοιπόν είναι μεγαλύτερη από την απόσταση κατά την οποία κύλησε ($2\pi R$). Γι' αυτό στην καθομιλουμένη λένε ότι **κυλάει και τσουλάει**.

2. **Αν $\upsilon_0 < \omega_0 R$**

   Η κίνηση της σφαίρας στην καθομιλουμένη περιγράφεται με την έκφραση **κυλάει και σπινάρει**.

Κύλιση και ολίσθηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο

Ρίχνουμε ένα σώμα στο λείο οριζόντιο επίπεδο ενώ αυτό ήδη στρέφεται με μία αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0. Αν ρίξουμε το σώμα έτσι ώστε η ταχύτητα υ_0 του κέντρου μάζας του να έχει μέτρο $\boldsymbol{\upsilon_0 \neq \omega_0 R}$, τότε το σώμα **και θα κυλίεται και θα ολισθαίνει**.

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\boldsymbol{\upsilon_0 > \omega_0 R}$, τότε στον χρόνο της περιόδου το σώμα μετατοπίζεται κατά $s > 2\pi R$ και λέμε ότι **κυλάει και τσουλάει**.
2. Αν $\boldsymbol{\upsilon_0 < \omega_0 R}$, τότε στον χρόνο της περιόδου το σώμα μετατοπίζεται κατά $s < 2\pi R$ και λέμε ότι **κυλάει και σπινάρει**.

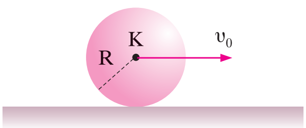
Μόλις η σφαίρα έρθει σε επαφή με το λείο οριζόντιο επίπεδο, το κέντρο μάζας της έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$, ενώ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_0$ **αναντίστοιχα μεγαλύτερη** από τη μεταφορική ταχύτητα, αφού $\omega_0 > \dfrac{\upsilon_0}{R}$.

Σε χρόνο μιας περιόδου η σφαίρα μετατοπίζεται κατά $s = \upsilon_0 T < \omega_0 RT \Rightarrow s < \dfrac{2\pi}{T}RT \Rightarrow s < 2\pi R$.

Η μετατόπισή της (s) είναι μικρότερη από την απόσταση κατά την οποία κύλησε ($2\pi R$). Δηλαδή, καθώς προχωράει η σφαίρα, στροφάρει κι επιτόπου, γι' αυτό στην καθομιλουμένη λένε ότι **κυλάει και σπινάρει**.

Το σώμα που αρχικά μόνο μεταφέρεται ($\upsilon_{cm} \neq 0$, $\omega_0 = 0$) αρχίζει και περιστρέφεται. Κυλάει ολισθαίνοντας. Υπολογισμός του χρόνου (t) κατά τον οποίο θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

4.42 **Η σφαίρα του διπλανού σχήματος έχει μάζα m και ακτίνα R. Η σφαίρα αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ (που τον θεωρούμε περίπου ίσο με τον συντελεστή στατικής τριβής). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ με το κατάλληλο χτύπημα δίνουμε στο κέντρο της σφαίρας οριζόντια αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ προς τα δεξιά. Αν αυτή τη χρονική στιγμή η γωνιακή της ταχύτητα είναι $\omega_0 = 0$:**



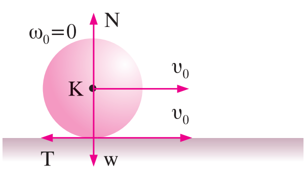
α. **Να μελετήσετε την κίνηση της σφαίρας υπολογίζοντας και τις επιταχύνσεις α_{cm} και α_γ.**

β. **Να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.**

Δίνεται για τη σφαίρα $I_{cm} = \dfrac{2}{5}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g θεωρείται γνωστή.

λύση

α. *Δυνάμεις στην κατακόρυφη διεύθυνση*



Στην κατακόρυφη διεύθυνση η σφαίρα δέχεται το βάρος της $\vec{w}$ και τη δύναμη αντίδρασης $\vec{N}$ από το δάπεδο, οι οποίες αλληλοεξουδετερώνονται. Επίσης, δε δημιουργούν ούτε ροπή, γιατί οι φορείς τους διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας.

Δυνάμεις στην οριζόντια διεύθυνση

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο επαφής Α της σφαίρας με το δάπεδο έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_0$ προς τα δεξιά. Έτσι η τριβή ολίσθησης $\vec{T}$ θα έχει φορά προς τα αριστερά. Άλλη δύναμη στην οριζόντια διεύθυνση δεν υπάρχει, οπότε η κίνηση του κέντρου Κ της σφαίρας θα είναι **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη**. Η στροφική κίνηση όμως της σφαίρας είναι **επιταχυνόμενη**.

Υπολογισμός της επιτάχυνσης α_{cm}

Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας ισχύει:

$$\Sigma F = m\alpha_{cm} \Rightarrow -T = m\alpha_{cm} \Rightarrow -\mu N = m\alpha_{cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\mu mg = m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = -\mu g$$

Υπολογισμός της γωνιακής επιτάχυνσης α_γ

Από τον θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση της σφαίρας έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow TR = I_{cm}\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu mgR = \frac{2}{5}mR^2\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{5\mu g}{2R}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας είναι λοιπόν σταθερή.

β. Το κέντρο Κ της σφαίρας κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση, επομένως η ταχύτητά του υ_K ελαττώνεται. **Η σφαίρα θα σταματήσει να ολισθαίνει και θα συνεχίσει την κίνησή της με κύλιση όταν το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου της Κ γίνει $\upsilon_K = \omega R$ (1).**

Αλλά ισχύει ότι:

$$\upsilon_K = \upsilon_0 - \alpha_{cm}t \Rightarrow \upsilon_K = \upsilon_0 - \mu g t \qquad (2)$$

Επίσης, $\omega = \alpha_\gamma t \Rightarrow \omega = \dfrac{5\mu g}{2R}t$ (3). Η σχέση (1) με τη βοήθεια των σχέσεων (2) και (3) γίνεται:

$$\upsilon_K = \omega R \overset{(2)}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}} \upsilon_0 - \mu g t = \frac{5\mu g}{2R}tR \Rightarrow \upsilon_0 = \frac{7}{2}\mu g t \Rightarrow t = \frac{2\upsilon_0}{7\mu g}$$

Σώμα κυλάει ολισθαίνοντας. Πώς υπολογίζουμε σε πόσο χρόνο (t) το σώμα θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1. Αν αρχικά $\upsilon_{cm} > \omega R$, το σώμα και κυλάει και ολισθαίνει. Για να αρχίσει κάποια στιγμή να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, θα πρέπει:

- Η υ_{cm} να ελαττώνεται, δηλαδή η μεταφορική κίνηση να είναι επιβραδυνόμενη.
- Η ω να είναι σταθερή ή να αυξάνεται.

Το σώμα θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει τη στιγμή (t) που η υ_{cm}, καθώς ελαττώνεται, γίνεται ίση με την ωR, δηλαδή όταν γίνει $\upsilon_{cm} = \omega R$ (1). Αν, για παράδειγμα, η υ_{cm} ελαττώνεται με σταθερή επιβράδυνση α_{cm} και η ω αυξάνεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση α_γ, τότε: $\upsilon_{cm} = \upsilon_0 - \alpha_{cm}t$ και $\omega = \alpha_\gamma t$. Επομένως η σχέση (1) γίνεται: $\upsilon_0 - \alpha_{cm}t = \alpha_\gamma tR \Rightarrow$ **t = γνωστό**.

2. Αν αρχικά $\upsilon_{cm} < \omega R$, το σώμα θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει τη χρονική στιγμή t που θα γίνει:

$$\upsilon_{cm} = \omega R \qquad (1)$$

Σε αυτή την περίπτωση, η υ_{cm} θα πρέπει να αυξάνεται και η ω να ελαττώνεται, ώστε κάποια στιγμή να γίνει $\upsilon_{cm} = \omega R$. Αν οι υ_{cm} και ω μεταβάλλονται ομαλά, η σχέση (1) θα γίνει: $\alpha_{cm}t = (\omega_0 - \alpha_\gamma t)R \Rightarrow$
$\Rightarrow$ **t = γνωστό**.

Το σώμα που αρχικά μόνο μεταφέρεται ($\upsilon_{cm} \neq 0$, $\omega_0 = 0$) αρχίζει και περιστρέφεται. Κυλάει ολισθαίνοντας. Υπολογισμός του χρόνου (t) κατά τον οποίο θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

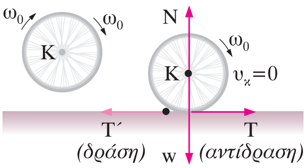
4.43 **Ένας λεπτός τροχός μάζας m και ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_0$ ενώ το κέντρο του είναι ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε τον τροχό, χωρίς να επηρεάσουμε την κίνησή του, σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ (τον συντελεστή τριβής ολίσθησης τον θεωρούμε περίπου ίσο με τον συντελεστή στατικής τριβής).**

α. **Να μελετήσετε την κίνηση του τροχού υπολογίζοντας και τις επιταχύνσεις α_{cm} και α_γ.**

β. **Να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο ο τροχός θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.**

Δίνεται για τη ροπή αδράνειας του λεπτού τροχού $I_{cm} = mR^2$ και θεωρήστε γνωστή την επιτάχυνση της βαρύτητας g.

λύση



α. *Δυνάμεις στην κατακόρυφη διεύθυνση*

Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο τροχός δέχεται το βάρος του $\vec{w}$ και τη δύναμη αντίδρασης $\vec{N}$ από το δάπεδο, οι οποίες αλληλοεξουδετερώνονται. Επίσης, δε δημιουργούν ούτε ροπή, γιατί οι φορείς τους διέρχονται από το κέντρο K του τροχού.

Δυνάμεις στην οριζόντια διεύθυνση

Ο τροχός στρέφεται **σύμφωνα** με τους δείκτες του ρολογιού. Έτσι «σπρώχνει» το έδαφος προς τα αριστερά, ασκώντας του τη δράση $\vec{T}'$ με φορά προς τα αριστερά. Το έδαφος τότε ασκεί στον τροχό αντίθετη δύναμη αντίδρασης, που είναι η στατική τριβή $\vec{T}$ και έχει κατεύθυνση προς τα **δεξιά**. Αυτή είναι η δύναμη που θα κινήσει τον τροχό.

Η μεταφορική κίνηση του κέντρου K του τροχού λοιπόν είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη (χωρίς αρχική ταχύτητα). Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_0$ έχει φορά προς τα μέσα ($\otimes$ ω, αρνητική), ενώ η ροπή της τριβής $\vec{T}$, που είναι και η συνισταμένη ροπή $\Sigma\vec{\tau}$, έχει φορά προς τα έξω ($\odot$ Στ, θετική).

Έτσι, και η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\gamma$ ως ομόρροπη της $\Sigma\vec{\tau}$ θα έχει φορά προς τα έξω.
Η $\vec{\alpha}_\gamma$ λοιπόν είναι αντίρροπη της $\vec{\omega}$. Επομένως, αφού $\vec{\omega}$ και $\vec{\alpha}_\gamma$ είναι αντίρροπες, η στροφική κίνηση του τροχού είναι ομαλά επιβραδυνόμενη.
Υπολογισμός της επιτάχυνσης α_{cm}
Για τη μεταφορική κίνηση του τροχού ισχύει:
$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow T = m\alpha_{cm} \Rightarrow \mu \cancel{m} g = \cancel{m}\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \mu g$
Υπολογισμός της γωνιακής επιτάχυνσης α_γ
Από τον θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του τροχού έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow TR = I_{cm}\alpha_\gamma \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu mgR = mR^2\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\mu g}{R}$$

β. Το κέντρο Κ του τροχού κάνει επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε η ταχύτητά του υ_K αυξάνεται. Η στροφική κίνηση του τροχού είναι (ομαλά) επιβραδυνόμενη, επομένως η γωνιακή ταχύτητά του ελαττώνεται.
Στην αρχή της κίνησης έχουμε $\upsilon_K < \omega R$, οπότε ο τροχός κυλάει ολισθαίνοντας (κυλάει και σπινάρει).
Ο τροχός θα σταματήσει να ολισθαίνει και θα συνεχίσει την κίνησή του με κύλιση όταν το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου του Κ, έτσι όπως αυξάνεται, γίνει:

$$\boldsymbol{\upsilon_K = \omega R} \qquad (1)$$

Αλλά ισχύει ότι:

$$\upsilon_K = \alpha_{cm}t \Rightarrow \upsilon_K = \mu g t \qquad (2)$$

Επίσης:

$$\omega = \omega_0 - \alpha_\gamma t \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{\mu g}{R}t \qquad (3)$$

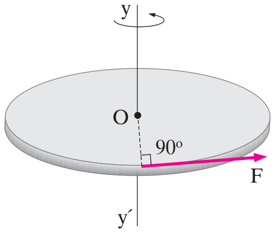
Η σχέση (1) με τη βοήθεια των σχέσεων (2) και (3) γίνεται:

$$\upsilon_K = \omega R \xRightarrow[(3)]{(2)} \mu g t = \left(\omega_0 - \frac{\mu g}{R}t\right)R \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\mu g t = \omega_0 R \Rightarrow t = \frac{\omega_0 R}{2\mu g}$$

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

4.44 Ο οριζόντιος δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M = 5$ kg και ακτίνα $R = 0{,}4$ m.



Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου εφαπτομενική δύναμη σταθερού μέτρου $F = 10$ N. Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, την οποία και να σχεδιάσετε.

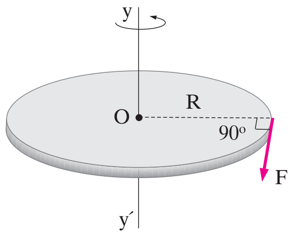
β. Τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.

γ. Τον αριθμό των περιστροφών που πραγματοποίησε ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ως τη χρονική στιγμή t_1.

δ. Τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ του δίσκου στο χρονικό διάστημα από 0 s ως 5 s.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$.

4.45 Ο οριζόντιος δίσκος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M = 4$ kg και ακτίνα $R = 0{,}5$ m.



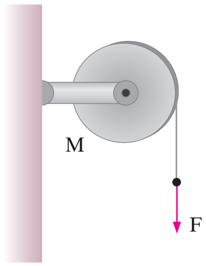
Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου εφαπτομενική δύναμη σταθερού μέτρου $F = 8$ N, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, την οποία και να σχεδιάσετε.

β. Τη γωνιακή ταχύτητα του δίσκου τη χρονική στιγμή t_1 που έχει εκτελέσει $N_1 = \frac{50}{\pi}$ περιστροφές.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}MR^2$.

4.46 Η αρχικά ακίνητη τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M = 5$ kg, ακτίνα $R = 0{,}2$ m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα.



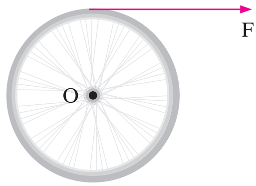
Στην τροχαλία έχουμε τυλίξει αβαρές νήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στην ελεύθερη άκρη του νήματος κατακόρυφη σταθερή δύναμη $\vec{F}$. Η τροχαλία αρχίζει να περιστρέφεται και τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s έχει εκτελέσει $N_1 = \dfrac{50}{\pi}$ περιστροφές. Να υπολογίσετε:

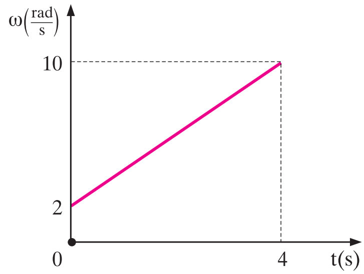
α. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας τη χρονική στιγμή t_1.

β. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της δίνεται από τη σχέση $I = \dfrac{1}{2}MR^2$. Επίσης δίνεται ότι $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$.

4.47 Ο λεπτός τροχός του σχήματος έχει μάζα $M = 4$ kg, ακτίνα $R = 0{,}4$ m και περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ακλόνητο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του O και είναι κάθετος στο επίπεδό του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0. Από τη χρονική στιγμή $t = 0$ και μετά ασκείται στον τροχό εφαπτομενική δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου, με αποτέλεσμα να αρχίσει να μεταβάλλεται το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας με τον χρόνο, με τον τρόπο που φαίνεται στο διάγραμμα.



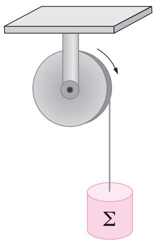


α. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης που αποκτά ο τροχός.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

γ. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 6$ s η δύναμη καταργείται ακαριαία. Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}_1$ που πρέπει να ασκήσουμε εφαπτομενικά στον τροχό, ώστε να μηδενιστεί η γωνιακή του ταχύτητα σε χρόνο $t_2 = 6$ s από τη στιγμή που άρχισε να ασκείται η δύναμη $\vec{F}_1$.

4.48 Η κατακόρυφη τροχαλία μάζας $M = 2$ kg και ακτίνας $R = 0{,}2$ m του σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Στην αυλάκωση που διαθέτει η τροχαλία έχει τυλιχτεί αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους, στην ελεύθερη άκρη του οποίου κρέμεται σώμα Σ μάζας $m = 2$ kg.



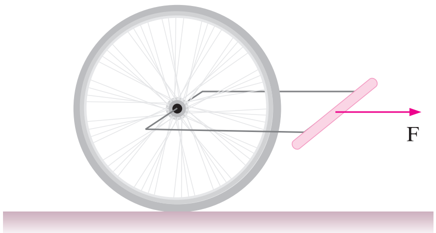
Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονά της είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$. Αρχικά\ το σύστημα τροχαλία-σώμα είναι ακίνητο και το νήμα είναι τεντωμένο. Κάποια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα. Να υπολογίσετε:

α. Την επιτάχυνση α_{cm} του σώματος.

β. Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

γ. Την τάση του νήματος.

4.49 Στο σχήμα εικονίζεται ένας τροχός μάζας $m = 5\ \text{kg}$ και ακτίνας $R = 0{,}4\ \text{m}$ που αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.



Ασκούμε με κάποιον τρόπο μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ στον άξονα του τροχού, με αποτέλεσμα αυτός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Αν η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού είναι $\alpha_{cm} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, να υπολογίσετε:

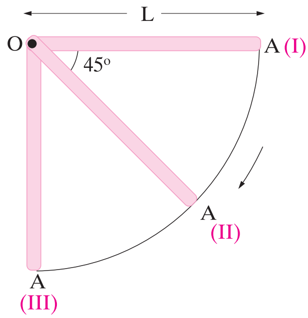
α. Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ.

β. Το μέτρο T της στατικής τριβής.

γ. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = mR^2$.

4.50 Η λεπτή και ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μάζα $M = 4\ \text{kg}$, μήκος $L = 1{,}5\ \text{m}$ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδό της.



Αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη από την οριζόντια θέση να περιστραφεί. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ και $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Να υπολογίσετε:

Α. Τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της O.

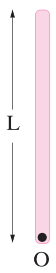
Β. Τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση α_γ της ράβδου:

α. Όταν ακόμα βρίσκεται στην οριζόντια θέση (Ι).

β. Τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση (ΙΙ) και σχηματίζει γωνία 45° με την αρχική οριζόντια διεύθυνση (συν$45^\circ = 0{,}7$).

γ. Όταν διέρχεται από την κατακόρυφη θέση (ΙΙΙ).

4.51 Η λεπτή και ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μάζα $M = 2$ kg, μήκος $L = 1$ m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το άκρο της Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό της.



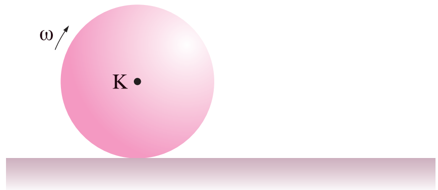
Ενώ η ράβδος ισορροπεί στην κατακόρυφη άνω θέση όπως στο σχήμα, της δίνουμε μία ανεπαίσθητη ώθηση και η ράβδος αρχίζει να πέφτει. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της Ο είναι $I_O = \frac{1}{3}ML^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. Να υπολογίσετε τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση α_γ της ράβδου:

α. Όταν σχηματίζει γωνία 60° με την αρχική της θέση.

β. Όταν διέρχεται από την οριζόντια θέση της.

γ. Όταν διέρχεται από την κάτω κατακόρυφη θέση της.

4.52 Η σφαίρα του παρακάτω σχήματος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.



α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα στην κατακόρυφη διεύθυνση.

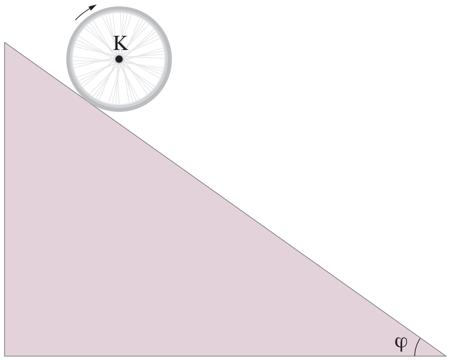
β. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα στην οριζόντια διεύθυνση κίνησης.

4.53 Η σφαίρα του παρακάτω σχήματος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.

α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα στην κατακόρυφη διεύθυνση.

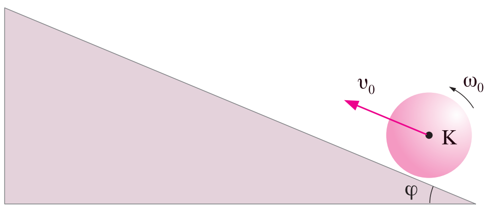
β. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα στην οριζόντια διεύθυνση κίνησης.

4.54 Ο τροχός του σχήματος αφήνεται ελεύθερος να κατέβει το κεκλιμένο επίπεδο.



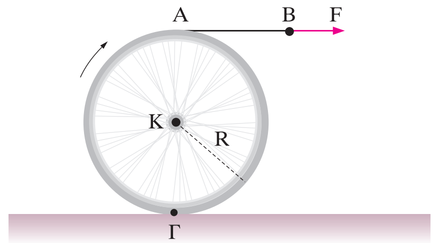
Ο τροχός κατεβαίνοντας κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που δέχεται.

4.55 Η σφαίρα του σχήματος εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα του κέντρου της $\vec{\upsilon}_0$ και αρχική γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}_0$ προς τα πάνω κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου, όπως στο σχήμα.



Η σφαίρα ανεβαίνοντας κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να σχεδιάσετε όλες τις δυνάμεις που δέχεται.

4.56 Ο τροχός του σχήματος έχει μάζα $m = 2$ kg και ακτίνα $R = 0{,}2$ m. Γύρω από τον τροχό είναι τυλιγμένο αβαρές σκοινί, στο ελεύθερο άκρο Β του οποίου ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 9$ N.



Αν ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο:

Α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που δέχεται ο τροχός στην οριζόντια διεύθυνση κίνησης.

Β. Να υπολογίσετε:

α. Την επιτάχυνση $\alpha_{cm} = \alpha_K$ του κέντρου Κ του τροχού, καθώς και τη γωνιακή του επιτάχυνση α_γ.

β. Την επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου Α «πρόσδεσης» του νήματος.

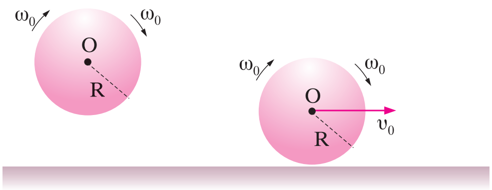
γ. Την επιτάχυνση α_B του σημείου Β εφαρμογής της δύναμης.

δ. Να συγκρίνετε τις επιταχύνσεις των σημείων Κ, Α και Β.

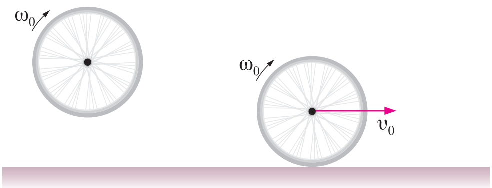
ε. Να συγκρίνετε τις μετατοπίσεις στον ίδιο χρόνο του κέντρου Κ του τροχού και του σημείου Β εφαρμογής της δύναμης.

Δίνεται για τον τροχό ότι $I_K = \frac{1}{2}mR^2$.

4.57 Σε μια σφαίρα ακτίνας $R = 0{,}2$ m δίνουμε μια αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 40\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και στη συνέχεια τη ρίχνουμε να κινηθεί κατά μήκος ενός λείου οριζόντιου επιπέδου. Έτσι όπως τη ρίχνουμε, πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ του κέντρου της, ώστε η σφαίρα να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;

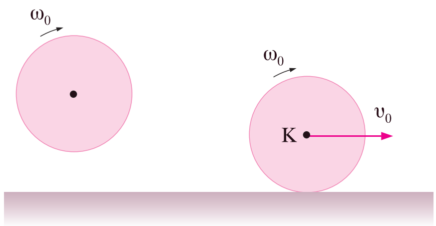


4.58 Σε έναν τροχό ακτίνας $R = 0{,}4$ m δίνουμε μια αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 20\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και στη συνέχεια τον ρίχνουμε να κινηθεί κατά μήκος λείου οριζόντιου επιπέδου.

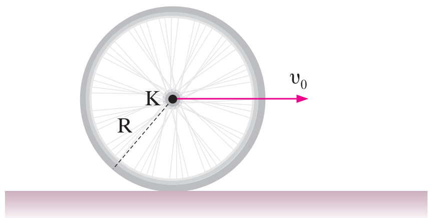


Έτσι όπως τον ρίξαμε, δώσαμε στο κέντρο του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ με μέτρο $\upsilon_0 = 12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Να μελετήσετε αναλυτικά την κίνηση που θα κάνει ο τροχός.

4.59 Σε έναν κύλινδρο ακτίνας $R = 10$ cm δίνουμε μια αρχική γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 70\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και στη συνέχεια τον ρίχνουμε να κινηθεί κατά μήκος λείου κεκλιμένου επιπέδου. Έτσι όπως τον ρίξαμε, δώσαμε στο κέντρο του ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ με μέτρο $\upsilon_0 = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Να μελετήσετε αναλυτικά την κίνηση που θα κάνει ο κύλινδρος.



4.60 Ο λεπτός τροχός του σχήματος έχει μάζα $m = 4$ kg και ακτίνα $R = 0{,}5$ m.



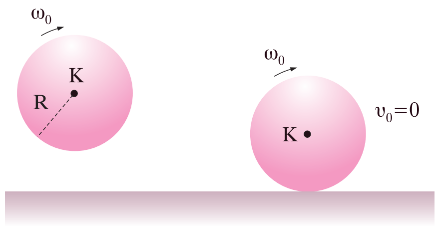
Ο τροχός αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}2$ (που τον θεωρούμε περίπου ίσο με τον συντελεστή στατικής τριβής). Τη χρονική στιγμή $t = 0$ με το κατάλληλο χτύπημα δίνουμε στο κέντρο του τροχού οριζόντια αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ με μέτρο $\upsilon_0 = 14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ προς τα δεξιά. Αν αυτή τη χρονική στιγμή η γωνιακή του ταχύτητα είναι $\omega_0 = 0$:

α. Να μελετήσετε την κίνηση του τροχού υπολογίζοντας και τις επιταχύνσεις α_{cm} και α_γ.

β. Να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο ο τροχός θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται για τον λεπτό τροχό $I_K = mR^2$ και ότι $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

4.61 Μια σφαίρα μάζας $m = 4$ kg και ακτίνας $R = 0{,}2$ m περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 40\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$ ενώ το κέντρο της είναι ακίνητο.



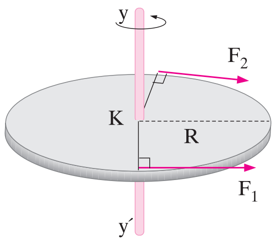
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε τη σφαίρα χωρίς να επηρεάσουμε την κίνησή της σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0{,}2$ (τον συντελεστή τριβής ολίσθησης τον θεωρούμε περίπου ίσο με τον συντελεστή στατικής τριβής).

α. Να μελετήσετε την κίνηση της σφαίρας υπολογίζοντας και τις επιταχύνσεις α_{cm} και α_γ.

β. Να υπολογίσετε μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται για τη ροπή αδράνειας της σφαίρας $I_{cm} = \dfrac{2}{5}mR^2$ και ότι $g = 10\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Και άλλα λυμένα παραδείγματα σε δεύτερο επίπεδο



4.62 **Βασική εφαρμογή.**

Ο οριζόντιος ομογενής δίσκος του σχήματος μάζας $M = 4$ kg και ακτίνας $R = 20$ cm μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον ακλόνητο κατακόρυφο άξονα $y'y$ που διέρχεται από το κέντρο του. Στον δίσκο, που αρχικά ηρεμεί, ασκούνται οι οριζόντιες εφαπτομενικές δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με κατευθύνσεις όπως αυτές που φαίνονται στο σχήμα και μέτρα $F_1 = 10$ N και $F_2 = 4$ N αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ του δίσκου.

β. Τη γωνιακή του ταχύτητα ύστερα από χρόνο $t = 10$ s αφότου ασκήθηκαν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.

γ. Το πλήθος των περιστροφών του δίσκου στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

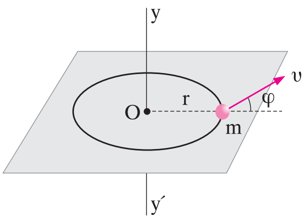
Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα $y'y$ που διέρχεται από το κέντρο του είναι $I = \dfrac{1}{2}MR^2$.

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του υλικού σημείου σχηματίζει γωνία φ ($\hat{\varphi} \neq 90°$) με την απόσταση από τον άξονα περιστροφής.

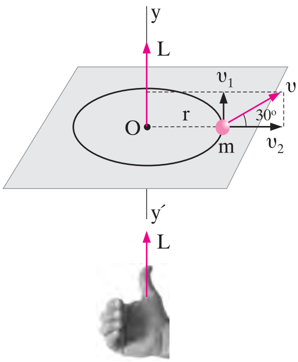
5.54 **Το υλικό σημείο του διπλανού σχήματος έχει μάζα m = 0,1 kg και περιστρέφεται αριστερόστροφα γύρω από τον άξονα y′y σε κυκλική τροχιά ακτίνας r = 2 m που το επίπεδό της είναι κάθετο στον άξονα. Κάποια στιγμή η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του σωματιδίου έχει μέτρο $\upsilon = 20\ \frac{m}{s}$ και σχηματίζει γωνία φ = 30° με την απόσταση r του υλικού σημείου από τον άξονα y′y. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της στροφορμής του σωματιδίου και να υπολογίσετε το μέτρο της.**



λύση

Σύμφωνα με τη δεύτερη οδηγία που αναφέρεται στο παρακάτω σχόλιο-«κλειδί» (να το μελετήσετε), εργαζόμαστε ως εξής:

Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε δύο συνιστώσες. Από αυτές, η $\vec{\upsilon}_2$, που είναι πάνω στη διεύθυνση της απόστασης, δε συνεισφέρει στη στροφορμή. (Δείτε την οδηγία 1 στο σχόλιο.) Έτσι η στροφορμή του υλικού σημείου είναι:

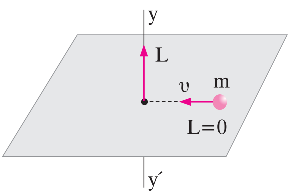


$$L = m\upsilon_1 r \xRightarrow{\upsilon_1 = \upsilon\eta\mu\varphi} L = m\upsilon r\eta\mu 30° \Rightarrow L = 2\ kg\frac{m^2}{s}$$

Το διάνυσμα της $\vec{L}$ έχει φορέα τον άξονα y′y, σημείο εφαρμογής το O και η φορά του προέκυψε με τον κανόνα του δεξιού χεριού. (Δείτε το σχήμα.)

Γενικές οδηγίες για τον υπολογισμό της στροφορμής

1. Αν ο φορέας της ταχύτητας ενός υλικού σημείου διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, η στροφορμή του υλικού σημείου είναι μηδέν (σχήμα 1).
2. Αν η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του υλικού σημείου σχηματίζει γωνία φ ($\hat{\varphi} \neq 90°$) με την απόσταση από τον άξονα περιστροφής, τότε την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες. Από αυτές, η $\vec{\upsilon}_2$, που είναι πάνω στη διεύθυνση της απόστασης, δε συνεισφέρει στη στροφορμή. (Δείτε την προηγούμενη γενική παρατήρηση.)



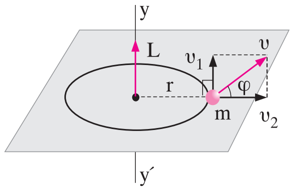
Σχήμα 1

⟶

Έτσι η στροφορμή του υλικού σημείου είναι:

$$L = m\upsilon_1 r \xrightarrow{\upsilon_1 = \upsilon\eta\mu\varphi} L = m\upsilon r\eta\mu\varphi$$

(Δείτε οπωσδήποτε το σχήμα 2.)



Σχήμα 2

3. *Περιπτώσεις στις οποίες η στροφορμή διατηρείται σταθερή*
Η στροφορμή ενός σώματος ή ενός συστήματος διατηρείται σταθερή στις εξής περιπτώσεις:

Α. Όταν το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα ή στα σώματα του συστήματος είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει όταν:

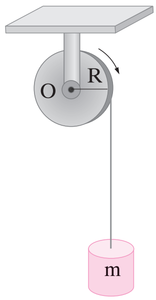
i) Ασκούνται δυνάμεις, αλλά οι φορείς τους διέρχονται από το κέντρο της τροχιάς.

ii) Οι φορείς των ασκούμενων δυνάμεων είναι κάθετοι στο επίπεδο της τροχιάς, οπότε δεν ασκούν ροπή.

Β. Όταν $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} \neq 0$, αλλά ο χρόνος δράσης τους είναι πολύ μικρός ($dt \to 0$).
Επειδή $dt \to 0$: $dL = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi}dt \to 0$, οπότε, αφού $dL \to 0$, είναι $L =$ σταθερή.

5.55 **Η τροχαλία του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M = 1{,}2$ kg, ακτίνα $R = 0{,}5$ m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ένα σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της Ο. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα, στην ελεύθερη άκρη του οποίου έχουμε δέσει μικρό σώμα μάζας $m = 0{,}4$ kg. Το σύστημα της τροχαλίας και του σώματος αρχικά διατηρείται ακίνητο με το σκοινί τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί. Να υπολογίσετε:**

Ένα υλικό σημείο μπορεί να έχει στροφορμή ακόμα και αν κινείται ευθύγραμμα.



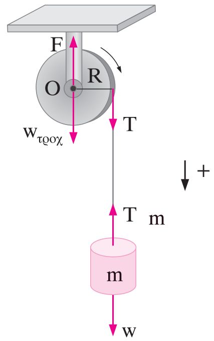
α. **Την επιτάχυνση α_σ του μικρού σώματος.**

β. **Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.**

γ. **Την τάση Τ του νήματος.**

δ. **Τη στροφορμή του συστήματος τροχαλία-σώμα τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s.**

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.



λύση

α. ✓ Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το μικρό σώμα μάζας m:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_\sigma \Rightarrow w - T = m\alpha_\sigma \qquad (1)$$

✓ Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης για την τροχαλία:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\alpha_\gamma \qquad (2)$$

✓ Η επιτάχυνση α_σ του σώματος είναι ίση με την επιτρόχια επιτάχυνση α ενός σημείου στην περιφέρεια της τροχαλίας. Επομένως ισχύει ότι:

$$\alpha_\sigma = \alpha_\gamma R \qquad (3)$$

Επίλυση του συστήματος των σχέσεων (1), (2) και (3):

- Η σχέση (1) $\Rightarrow T = mg - m\alpha_\sigma$ (4)
- Η σχέση (3) $\Rightarrow \alpha_\gamma = \dfrac{\alpha_\sigma}{R}$ (5)
- Η σχέση (2) με τη βοήθεια των σχέσεων (4) και (5) γίνεται:

$$T = \frac{1}{2}MR\alpha_\gamma \xRightarrow[(5)]{(4)} mg - m\alpha_\sigma = \frac{1}{2}M\cancel{R}\frac{\alpha_\sigma}{\cancel{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2mg - 2m\alpha_\sigma = M\alpha_\sigma \Rightarrow \alpha_\sigma = \frac{2mg}{(2m+M)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\sigma = 4\ \frac{m}{s^2}$$

β. Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$\alpha_\gamma = \frac{\alpha_\sigma}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = 8\ \frac{rad}{s^2}$$

γ. Από τη σχέση (4) έχουμε:

$$T = mg - m\alpha_\sigma \Rightarrow T = 2{,}4\ N$$

δ. Η στροφορμή του συστήματος τροχαλία-σώμα ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των στροφορμών $\vec{L}_{τροχ}$ και $\vec{L}_{σώμ}$. Δηλαδή:

$$\vec{L}_{συστ} = \vec{L}_{τροχ} + \vec{L}_{σώμ}$$

Στροφορμή της τροχαλίας

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας θα έχει μέτρο:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma t_1 \Rightarrow \omega_1 = 32\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η στροφορμή της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της τη χρονική στιγμή t_1 έχει μέτρο:

$$L_{\tau\rho o\chi} = I\omega_1 = \frac{1}{2}MR^2\omega_1 \Rightarrow L_{\tau\rho o\chi} = 4{,}8\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

Το διάνυσμα $\vec{L}_{\tau\rho o\chi}$ έχει φορέα τον άξονα περιστροφής, σημείο εφαρμογής το Ο και φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα ($\otimes\ \vec{L}_{\tau\rho o\chi}$).

Στροφορμή του μικρού σώματος

Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», η στροφορμή του σώματος μάζας m_σ ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας την ίδια χρονική στιγμή έχει μέτρο ίσο με:

$$L_{\sigma\acute{\omega}\mu} = m\upsilon_1 R \qquad (\alpha)$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ s η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο:

$$\upsilon_1 = \alpha_\sigma t_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Έτσι από τη σχέση (α) έχουμε:

$$L_{\sigma\acute{\omega}\mu} = m\upsilon_1 R \Rightarrow L_{\sigma\acute{\omega}\mu} = 3{,}2\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

Η κατεύθυνση της $\vec{L}_{\sigma\acute{\omega}\mu}$ προκύπτει με τον κανόνα του δεξιού χεριού και έχει φορέα τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας, σημείο εφαρμογής το Ο και φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα ($\otimes\ \vec{L}_{\sigma\acute{\omega}\mu}$).

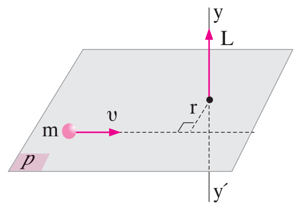
Στροφορμή του συστήματος

Τα διανύσματα $\vec{L}_{\tau\rho o\chi}$ και $\vec{L}_{\sigma\acute{\omega}\mu}$ είναι ομόρροπα, οπότε η στροφορμή του συστήματος θα έχει:

- Μέτρο: $L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = L_{\tau\rho o\chi} + L_{\sigma\acute{\omega}\mu} \Rightarrow L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = 8\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$.
- Φορέα: τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.
- Σημείο εφαρμογής: το σημείο Ο.

Στροφορμή υλικού σημείου που κινείται ευθύγραμμα

Ένα υλικό σημείο μάζας m έχει στροφορμή ακόμα και αν κινείται ευθύγραμμα!



Η στροφορμή ενός τέτοιου υλικού σημείου ως προς κάποιον άξονα y′y έχει:

- **Μέτρο:** $L = m\upsilon r$, όπου r η απόσταση του φορέα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ από τον άξονα περιστροφής.
- **Φορέα:** τον άξονα περιστροφής.
- **Φορά:** που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. (Δείτε και το παραπάνω σχήμα.)

- Φορά: από τον αναγνώστη προς τη σελίδα (⊗ $\vec{L}_{συστ}$).

(Δείτε και το σχόλιο-«κλειδί» στην προηγούμενη σελίδα.)

5.56 **Στο σχήμα εικονίζεται ένας τροχός μάζας $M = 5$ kg και ακτίνας $R = 0{,}4$ m που αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε με κάποιον τρόπο μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο $F = 40$ N στον άξονα του τροχού, με αποτέλεσμα αυτός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:**

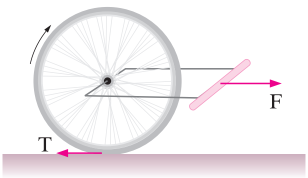
α. Την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου του τροχού.

β. Τη γωνιακή του επιτάχυνση α_γ.

γ. Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του τροχού.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = MR^2$.

Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής.



Πώς υπολογίζουμε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής

- Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής μπορούμε γενικά να τον υπολογίζουμε από τη γενικευμένη μορφή του θεμελιώδους νόμου για τη στροφική κίνηση, δηλαδή:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τη συνισταμένη ροπή που δέχεται το υπό εξέταση σώμα.

- Μπορούμε επίσης να τον υπολογίσουμε συνδυάζοντας τον παραπάνω τύπο με τον θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma$. Δηλαδή:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow \frac{dL}{dt} = I\alpha_\gamma$$

λύση

α. ✓ Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του τροχού έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow F - T = M\alpha_{cm} \qquad (1)$$

✓ Από τον θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση του τροχού έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow TR = MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow T = MR\alpha_\gamma \qquad (2)$$

✓ Ισχύει ότι:

$$\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R \qquad (3)$$

Επίλυση του συστήματος των σχέσεων (1), (2) και (3):

- Η σχέση (1) $\Rightarrow T = F - M\alpha_{cm}$ (4)
- Η σχέση (3) $\Rightarrow \alpha_\gamma = \dfrac{\alpha_{cm}}{R}$ (5)
- Η σχέση (2) με τη βοήθεια των σχέσεων (4) και (5) γίνεται:

$$T = MR\alpha_\gamma \Rightarrow F - M\alpha_{cm} = MR\frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 2M\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{F}{2M} \Rightarrow \alpha_{cm} = 4\ \frac{m}{s^2}$$

β. Από τη σχέση (5) έχουμε:

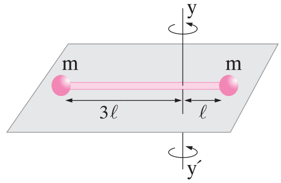
$$\alpha_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_\gamma = 10\ \frac{rad}{s^2}$$

γ. Σύμφωνα και με το σχόλιο-«κλειδί» της προηγούμενης σελίδας, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού μπορεί να υπολογιστεί με τη σχέση:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow \frac{dL}{dt} = MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 8\ N \cdot m$$

5.57 **Οι σφαίρες του διπλανού σχήματος, καθεμιά από τις οποίες έχει μάζα $m = 0{,}2$ kg, συνδέονται μεταξύ τους με μια αβαρή ράβδο μήκους $d = 4$ m. Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\ \frac{rad}{s}$ γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $y'y$. (Δείτε οπωσδήποτε το σχήμα.) Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος των δύο μαζών ως προς τον άξονα $y'y$.**

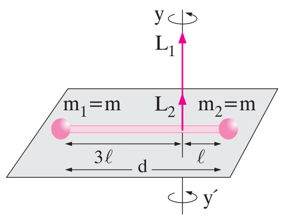
Στροφορμή μαζών σε αβαρή ράβδο.



λύση

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ότι:

$$3\ell + \ell = d \Rightarrow 4\ell = d \Rightarrow \ell = \frac{d}{4} \Rightarrow \ell = 1\ m$$



Η στροφορμή της μάζας m_1 ($m_1 = m$) θα έχει μέτρο:

$$L_1 = m\upsilon_1 r_1 \Rightarrow L_1 = m_1\omega r_1^2 \Rightarrow L_1 = m\omega(3\ell)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_1 = 0{,}2 \cdot 10 \cdot 3^2 \Rightarrow L_1 = 18\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

Η φορά της προσδιορίστηκε με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως παραστατικά φαίνεται στη διπλανή εικόνα.
Η στροφορμή της μάζας m_2 ($m_2 = m$) θα έχει μέτρο:

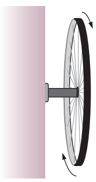
$$L_2 = m_2\omega r_2^2 \Rightarrow L_2 = m\omega\ell^2 \Rightarrow L_2 = 2\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

Η φορά της προσδιορίστηκε και πάλι με τον κανόνα του δεξιού χεριού.
Η ολική στροφορμή του συστήματος των δύο μαζών θα είναι $\vec{L}_{ολ} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ και, επειδή τα διανύσματα $\vec{L}_1$ και $\vec{L}_2$ είναι ομόρροπα, έχουμε:

$$L_{ολ} = L_1 + L_2 = 18 + 2 \Rightarrow L_{ολ} = 20\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

Στροφορμή τροχού.

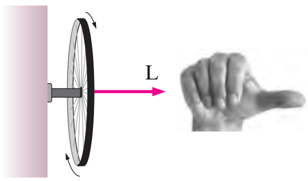
5.58 **Ο λεπτός τροχός του σχήματος έχει μάζα $M = 4$ kg και ακτίνα $R = 0{,}4$ m. Ο τροχός στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\ \frac{rad}{s}$ σε κατακόρυφο επίπεδο με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του. (Θεωρήστε ότι όλη η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.)**



λύση

Η στροφορμή του τροχού έχει μέτρο:

$$L = I\omega \qquad (1)$$



Η κατεύθυνσή της φαίνεται στο διπλανό σχήμα και προέκυψε με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στην εικόνα που υπάρχει δίπλα.

Προσδιορισμός της ροπής αδράνειας I
Χωρίζουμε τον τροχό σε στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \ldots$
Η ροπή αδράνειας του τροχού θα είναι:

$$I = m_1R^2 + m_2R^2 + \ldots \Rightarrow I = (m_1 + m_2 + \ldots)R^2 \Rightarrow$$

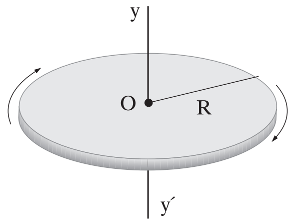
$$\Rightarrow I = MR^2 \qquad (2)$$

Η σχέση (1) με τη βοήθεια της σχέσης (2) γίνεται:

$$L = I\omega \overset{(2)}{\Rightarrow} L = MR^2\omega \Rightarrow L = 6{,}4\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

5.59 **Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος έχει μάζα $M = 2$ kg, ακτίνα $R = 0{,}2$ m και στρέφεται με συχνότητα $f = \frac{8}{\pi}$ Hz γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ που περνάει από το κέντρο του.**

Στροφορμή δίσκου.



α. **Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα $y'y$ είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$. Να υπολογίσετε τη στροφορμή L του δίσκου ως προς τον άξονα $y'y$.**

β. **Αν ο ίδιος δίσκος περιστρέφεται με την ίδια συχνότητα αλλά αντίθετη φορά ως προς κατακόρυφο άξονα $z'z$ που εφάπτεται στην περιφέρειά του, να υπολογίσετε τη νέα τιμή L' της στροφορμής του.**

λύση

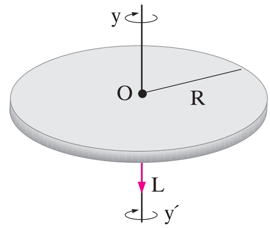
α. Το μέτρο της στροφορμής του δίσκου ως προς τον άξονα $y'y$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$L = I\omega$$

Αλλά $I = \frac{1}{2}MR^2$ και $\omega = 2\pi f$, οπότε:

$$L = \frac{1}{2}MR^2 2\pi f = MR^2\pi f \Rightarrow L = 2 \cdot (0{,}2)^2 \pi \frac{8}{\pi} \Rightarrow$$

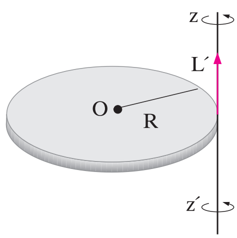
$$\Rightarrow L = 0{,}64\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$$



Η κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{L}$ της στροφορμής φαίνεται στο διπλανό σχήμα και προέκυψε με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

β. Ο οριζόντιος δίσκος στρέφεται με τη συχνότητα f γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $z'z$ που εφάπτεται στην περιφέρειά του. Η νέα τιμή της στροφορμής θα είναι:

$$L' = I'\omega \qquad (1)$$



όπου I' είναι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα $z'z$.

Επειδή είναι $z'z \parallel y'y$, από το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Steiner) έχουμε:

$$I' = I + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 \Rightarrow I' = \frac{3MR^2}{2} \qquad (2)$$

Η σχέση (1) με τη βοήθεια της σχέσης (2) γίνεται:

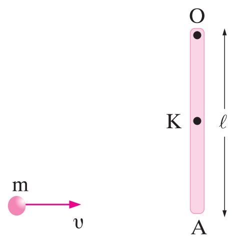
$$L' = \frac{3MR^2}{2}\omega \xrightarrow{\omega=2\pi f} L' = \frac{3MR^2}{2}2\pi f \Rightarrow L' = 3MR^2\pi f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L' = 1{,}92\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος L' της στροφορμής φαίνεται στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας και προέκυψε με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Κρούση και αρχή διατήρησης της στροφορμής.

5.60 **Η ομογενής και ισοπαχής ράβδος του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M = 3\ kg$, μήκος $\ell = 1\ m$ και μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο χωρίς τριβές. Ενώ η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφο επίπεδο, σφαιρίδιο μάζας $m = 0{,}2\ kg$ που κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 60\ \frac{m}{s}$ προσκρούει στο άκρο Α της ράβδου και συσσωματώνεται σ' αυτήν. Να υπολογίσετε:**



α. **Τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της Ο.**

β. **Τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση.**

γ. **Τη γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.**

δ. **Τη μεταβολή της στροφορμής του σφαιριδίου κατά τη διάρκεια της κρούσης.**

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

λύση

α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα των παράλληλων αξόνων (Steiner) και έχουμε:

$$I_O = I_{cm} + M(OK)^2 \Rightarrow I_O = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_O = \frac{1}{3}M\ell^2 \Rightarrow I_O = 1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$$

β. ✓ Σύμφωνα και με το διπλανό σχόλιο-«κλειδί», εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για την κρούση του συστήματος της ράβδου και του σφαιριδίου. Έχουμε:

$$\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{\Pi P I N}} = \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{META}} \qquad (1)$$

✓ *Υπολογισμός της $\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{\Pi P I N}}$*

- Η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς τον άξονα περιστροφής O λίγο πριν την κρούση έχει:

  Μέτρο: $L_{\sigma\varphi_{\Pi P I N}} = m\upsilon\ell \Rightarrow L_{\sigma\varphi_{\Pi P I N}} = 12\ \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$.

  Κατεύθυνση: κάθετη στη σελίδα με φορά προς τον αναγνώστη ($\odot\ \vec{L}_{\sigma\varphi_{\Pi P I N}}$). Σημείο εφαρμογής: το O.
- Η στροφορμή της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της O λίγο πριν από την κρούση έχει:

  Μέτρο: $L_{\rho_{\Pi P I N}} = I_O\omega = 0$.
- Επομένως για το μέτρο της $L_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{\Pi P I N}}$ έχουμε:

$$L_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{\Pi P I N}} = L_{\sigma\varphi_{\Pi P I N}} + L_{\rho_{\Pi P I N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{\Pi P I N}} = 12\ \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

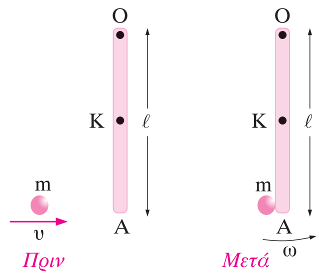
✓ *Υπολογισμός της $\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{META}}$*

Η στροφορμή του συστήματος ράβδος-σωματίδιο μετά την κρούση έχει μέτρο:

$$L_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{META}} = I_{\sigma\upsilon\sigma\tau_O}\omega$$

Αλλά:

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau_O} = I_{\rho_O} + I_{\sigma\varphi_O} = I_O + I_{\sigma\varphi_O} \Rightarrow$$



Κρούση και αρχή διατήρησης της στροφορμής

Αν σε μια κρούση το ένα τουλάχιστον από τα δύο συγκρουόμενα σώματα εκτελεί ή μπορεί να εκτελέσει **μόνο περιστροφική κίνηση**, εφαρμόζουμε την **αρχή διατήρησης της στροφορμής** του συστήματος των σωμάτων για να μελετήσουμε την κρούση (αντί για την αρχή διατήρησης της ορμής που πιθανόν έχουμε συνηθίσει). Τις στροφορμές των σωμάτων που εμπλέκονται σε αυτή την κρούση τις παίρνουμε ως προς τον άξονα περιστροφής του σώματος που εκτελεί την περιστροφική κίνηση.

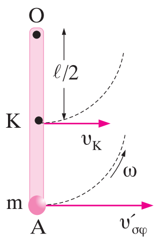
$$\Rightarrow I_{\sigma\upsilon\sigma\tau_O} = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2 \Rightarrow I_{\sigma\upsilon\sigma\tau_O} = 1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Έτσι, $L_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{META}} = 1{,}2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

✓ Αντικαθιστώντας τέλος στη σχέση (1) έχουμε:

$$L_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{\Pi PIN}} = L_{\sigma\upsilon\sigma\tau_{META}} \Rightarrow 12 = 1{,}2\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{12}{1{,}2} \Rightarrow \omega = 10\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Αμέσως μετά την κρούση

γ. Η γραμμική ταχύτητα του κέντρου Κ της ράβδου αμέσως μετά την κρούση θα έχει μέτρο:

$$\upsilon_K = \omega\frac{\ell}{2} \Rightarrow \upsilon_K = 5\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

και την κατεύθυνση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

δ. Για τη μεταβολή της στροφορμής του σφαιριδίου κατά τη διάρκεια της κρούσης έχουμε:

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_{\sigma\varphi_{META}} - \vec{L}_{\sigma\varphi_{\Pi PIN}} \qquad (2)$$

Αλλά αλγεβρικά:

$$L_{\sigma\varphi_{\Pi PIN}} = +12\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$L_{\sigma\varphi_{META}} = m\upsilon'_{\sigma\varphi}\ell = m(\omega\ell)\ell = m\omega\ell^2 \Rightarrow L_{\sigma\varphi_{META}} = 2\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

με κατεύθυνση κάθετη στη σελίδα προς τον αναγνώστη και σημείο εφαρμογής το Ο.
Επομένως αλγεβρικά είναι:

$$L_{\sigma\varphi_{META}} = +2\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

Αντικαθιστούμε στη σχέση (2) τις αλγεβρικές τιμές των $\vec{L}_{\sigma\varphi_{META}}$ και $\vec{L}_{\sigma\varphi_{\Pi PIN}}$ και έχουμε για την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της στροφορμής $\Delta\vec{L}$:

$$\Delta L = (+2) - (+12) \Rightarrow \Delta L = -10\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$$

(Δείτε και το διπλανό σχόλιο-«κλειδί».)

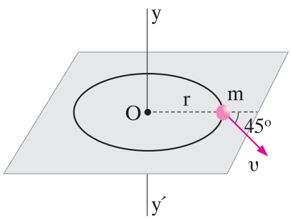
Δείτε κι αυτό

Όταν συμβεί μεταβολή σε κάποιο σύστημα σωμάτων, αλλά παρ' όλα αυτά η ολική στροφορμή του παραμείνει σταθερή, αυτό **δε** σημαίνει ότι διατηρούνται σταθερές και οι στροφορμές των σωμάτων που το αποτελούν.
Αν, για παράδειγμα, το σύστημα αποτελείται από δύο σώματα και σε κάποια μεταβολή παραμείνει σταθερή η ολική στροφορμή του, αυτό σημαίνει ότι οι στροφορμές των σωμάτων που το αποτελούν έχουν υποστεί αντίθετες μεταβολές. Συγκεκριμένα, αν η στροφορμή **του ενός ελαττώθηκε** κατά μία ποσότητα, η στροφορμή **του άλλου θα αυξήθηκε κατά την ίδια** ακριβώς ποσότητα.
Έτσι, συνολικά, **η στροφορμή του συστήματος** των σωμάτων **παρέμεινε σταθερή**.

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

5.61 Το υλικό σημείο του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $m = 0{,}2$ kg και περιστρέφεται δεξιόστροφα γύρω από τον άξονα $y'y$ σε κυκλική τροχιά ακτίνας $r = 0{,}8$ m που το επίπεδό της είναι κάθετο στον άξονα.

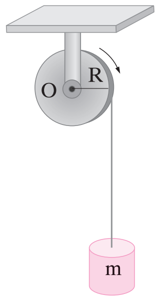


Κάποια στιγμή η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ του σωματιδίου έχει μέτρο $\upsilon = 30\ \frac{m}{s}$ και σχηματίζει γωνία $\varphi = 45°$ με την απόσταση r του υλικού σημείου από τον άξονα $y'y$.

α. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της στροφορμής του σωματιδίου.

β. Να υπολογίσετε το μέτρο της.

5.62 Η τροχαλία του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M = 1$ kg, ακτίνα $R = 0{,}5$ m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ένα σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της O. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα, στην ελεύθερη άκρη του οποίου έχουμε δέσει μικρό σώμα μάζας $m = 0{,}5$ kg. Το σύστημα της τροχαλίας και του σώματος αρχικά διατηρείται ακίνητο με το σκοινί τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί.



Να υπολογίσετε:

α. Την επιτάχυνση α_σ του μικρού σώματος.

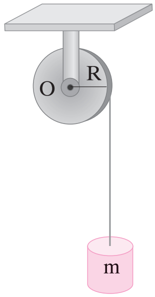
β. Τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

γ. Την τάση T του νήματος.

δ. Τη στροφορμή του συστήματος τροχαλία-σώμα τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s αφότου ελευθερώσαμε το σύστημα.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

5.63 Η τροχαλία του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M = 1{,}6$ kg, ακτίνα $R = 0{,}2$ m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από ένα σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της O. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα, στην ελεύθερη άκρη του οποίου έχουμε δέσει μικρό σώμα μάζας $m = 0{,}2$ kg. Το σύστημα της τροχαλίας και του σώματος αρχικά διατηρείται ακίνητο με το σκοινί τεντωμένο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί.



Να υπολογίσετε:

α. Την επιτάχυνση α_σ του μικρού σώματος και τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

β. Την τάση T του νήματος.

γ. Τη στροφορμή του συστήματος τροχαλία-σώμα τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα έχει κατέβει κατά $y_1 = 16$ m από τη θέση που αφέθηκε ελεύθερο.

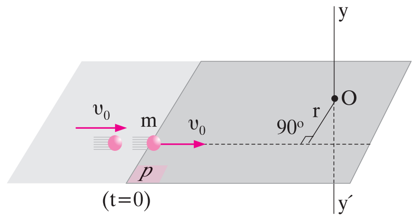
δ. Τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_1$ της τροχαλίας τη στιγμή t_1.

ε. Τη στροφορμή του συστήματος τροχαλία-σώμα τη χρονική στιγμή t_2 που η τροχαλία έχει υποστεί γωνιακή μετατόπιση κατά $\Delta\theta_2 = 180$ rad από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερη.

στ. Τη μεταβολή $\Delta\vec{L}$ της στροφορμής του μικρού σώματος στο χρονικό διάστημα t_1 s → t_2 s.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

5.64 Το υλικό σωματίδιο μάζας $m = 0{,}1$ kg του σχήματος κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_0 = 40\ \frac{m}{s}$ πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο.



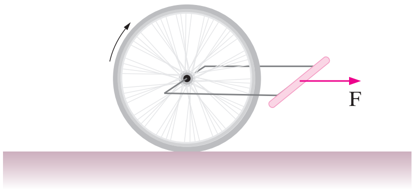
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σωματίδιο εισέρχεται σε μια μη λεία περιοχή του επιπέδου με την οποία παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Το σωματίδιο συνεχίζει την ευθύγραμμη κίνησή του στην περιοχή αυτή ολισθαίνοντας (χωρίς να περιστρέφεται).

α. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του σωματιδίου ως προς άξονα Oy, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο και απέχει απόσταση $r = 2$ m από τον φορέα της $\vec{\upsilon}_0$, τη χρονική στιγμή $t = 0$ που το σωματίδιο εισέρχεται στη μη λεία περιοχή.

β. Να σχεδιάσετε το διάνυσμα της στροφορμής $\vec{L}_0$.

γ. Δίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s αφότου το σωματίδιο εισήλθε στη μη λεία περιοχή η μεταβολή της στροφορμής του έχει αλγεβρική τιμή $\Delta L = -2\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$. Να υπολογίσετε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης μ ανάμεσα στο σωματίδιο και στο επίπεδο.

5.65 Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται ένας τροχός μάζας $M = 4$ kg και ακτίνας $R = 0{,}5$ m που αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.



Ασκούμε με κάποιον τρόπο μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ με μέτρο $F = 32$ N στον άξονα του τροχού, με αποτέλεσμα αυτός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:

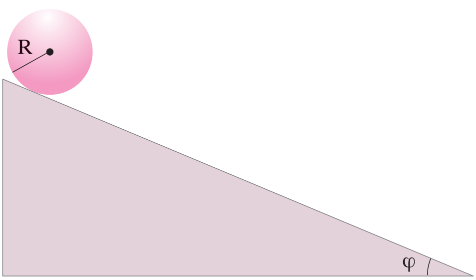
α. Την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου του τροχού.

β. Τη γωνιακή του επιτάχυνση α_γ.

γ. Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του τροχού.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = MR^2$.

5.66 Η ομογενής και συμπαγής σφαίρα του σχήματος μάζας $M = 4$ kg και ακτίνας $R = 0{,}2$ m αφήνεται ελεύθερη στην κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\hat{\varphi} = 30°$.



Η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Να υπολογίσετε:

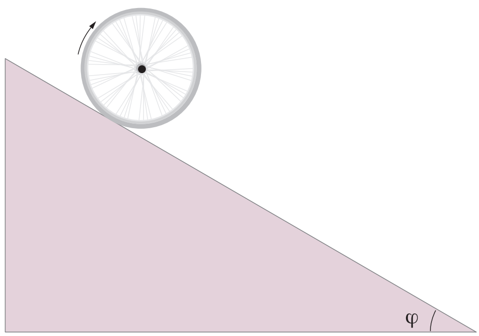
α. Την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου μάζας της σφαίρας.

β. Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ της σφαίρας.

γ. Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \frac{2}{5}MR^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

5.67 Ένας τροχός μάζας $m = 4$ kg και ακτίνας R αφήνεται να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\hat{\varphi} = 30°$.



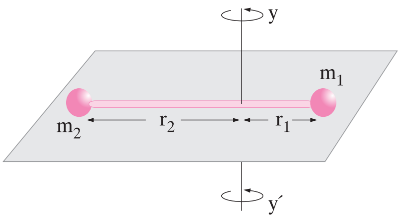
Ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του καθώς κατεβαίνει έχει μέτρο $\frac{dL}{dt} = 5\ N \cdot m$. Να υπολογίσετε:

α. Την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου μάζας του τροχού.

β. Τη γωνιακή επιτάχυνση α_γ του τροχού.

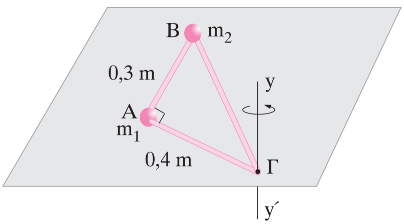
Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = MR^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

5.68 Οι σφαίρες του σχήματος έχουν μάζες $m_1 = 0{,}3$ kg και $m_2 = 0{,}1$ kg και συνδέονται μεταξύ τους με μια αβαρή ράβδο μήκους d = 3 m.



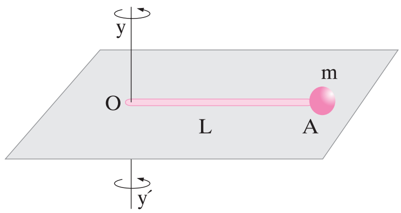
Το σύστημα περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 20\ \frac{rad}{s}$ γύρω από τον κατακόρυφο άξονα y′y που βρίσκεται σε απόσταση $r_1 = 1$ m από τη μάζα m_1. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος των δύο μαζών ως προς τον άξονα y′y.

5.69 Δείτε προσεκτικά το σχήμα. Οι μάζες $m_1 = 2$ kg και $m_2 = 3$ kg, που θεωρούνται σημειακές, βρίσκονται στις κορυφές Α και Β αντίστοιχα του ορθογώνιου τριγώνου που σχηματίζουν οι αβαρείς ράβδοι ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.



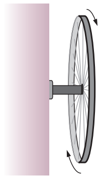
Οι κάθετες πλευρές αυτού του ορθογώνιου τριγώνου έχουν μήκη (ΑΒ) = 0,3 m και (ΑΓ) = 0,4 m. Το σύστημα των δύο μαζών στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 20\ \frac{rad}{s}$ γύρω από έναν άξονα y′y που διέρχεται από την κορυφή Γ και είναι κάθετος στο επίπεδο του τριγώνου. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος των δύο μαζών ως προς τον άξονα y′y.

5.70 Η ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μάζα M = 2 kg και μήκος L = 1 m. Στο άκρο της Α βρίσκεται στερεωμένη μικρή μολύβδινη σφαίρα μάζας m = 1 kg. Το σύστημα στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα y′y που διέρχεται από το άκρο Ο της ράβδου, με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 30\ \frac{rad}{s}$.



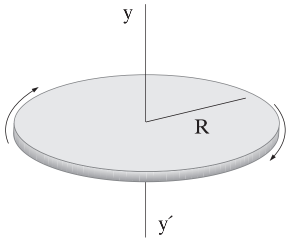
Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Να υπολογίσετε τη στροφορμή του συστήματος της ράβδου και της σφαίρας.

5.71 Ο λεπτός τροχός του σχήματος έχει μάζα M = 2 kg και ακτίνα R = 0,2 m. Ο τροχός στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 20\ \frac{rad}{s}$ σε κατακόρυφο επίπεδο με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα.



Να υπολογίσετε τη στροφορμή του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του. (Θεωρήστε ότι όλη η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.)

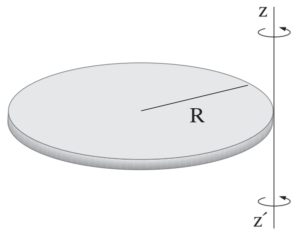
5.72 Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος έχει μάζα $M = 4\,kg$, ακτίνα $R = 0{,}4\,m$ και στρέφεται με συχνότητα $f = \frac{10}{\pi}\,Hz$ γύρω από τον κατακόρυφο άξονα $y'y$ που περνάει από το κέντρο του.



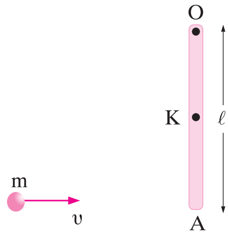
Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα $y'y$ είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

α. Να υπολογίσετε τη στροφορμή L του δίσκου ως προς τον άξονα $y'y$.

β. Αν ο ίδιος δίσκος περιστρέφεται με την ίδια συχνότητα ως προς κατακόρυφο άξονα $z'z$ που εφάπτεται στην περιφέρειά του, να υπολογίσετε τη νέα τιμή L' της στροφορμής του.



5.73 Η ομογενής και ισοπαχής ράβδος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα $M = 6\,kg$, μήκος $\ell = 2\,m$ και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O, χωρίς τριβές. Ενώ η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφο επίπεδο, σφαιρίδιο μάζας $m = 0{,}4\,kg$ αμελητέας ακτίνας που κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 50\,\frac{m}{s}$ προσκρούει στο άκρο A της ράβδου και συσσωματώνεται σ' αυτήν.



Να υπολογίσετε:

α. Τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της O.

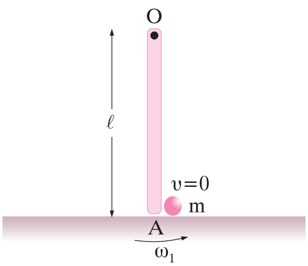
β. Τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση.

γ. Τη γραμμική ταχύτητα ενός σημείου Γ της ράβδου που απέχει απόσταση $d = \frac{3\ell}{4}$ από τον άξονα περιστροφής O της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

δ. Τη μεταβολή της στροφορμής του σφαιριδίου κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

5.74 Η ομογενής και ισοπαχής ράβδος του σχήματος έχει μάζα $M = 3$ kg, μήκος $\ell = 1$ m και περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Ο, χωρίς τριβές.



Τη στιγμή που το άλλο της άκρο Α διέρχεται εφαπτομενικά από το οριζόντιο δάπεδο συγκρούεται με ακίνητο σφαιρίδιο μάζας $m = 0{,}4$ kg και αμελητέας ακτίνας με το οποίο και συσσωματώνεται. Η γραμμική ταχύτητα του σημείου Α λίγο πριν από τη σύγκρουσή του με το σφαιρίδιο είναι $\upsilon_A = 20\ \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε:

α. Τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της Ο.

β. Τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος-σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση.

γ. Τη μεταβολή της στροφορμής της ράβδου κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

6.40 Να αντιστοιχίσετε τα μεγέθη της μεταφορικής κίνησης της πρώτης στήλης με τα μεγέθη της στροφικής κίνησης της δεύτερης στήλης.

Μεγέθη μεταφορικής κίνησης

1. m
2. s
3. υ
4. p

Μεγέθη στροφικής κίνησης

α. θ
β. α_γ
γ. ω
δ. L
ε. I

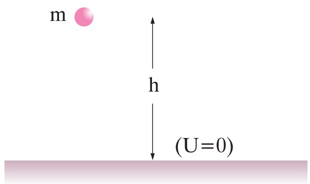
Να γράψετε στα κουτάκια τους σωστούς συνδυασμούς αριθμών - γραμμάτων.

Βασικά «κλειδιά»

(με παραδείγματα)

Βασική εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. Γενικά σχόλια για την εφαρμογή της.

6.41 **Το σώμα μάζας m του διπλανού σχήματος αφήνεται να πέσει ελεύθερα από ύψος h = 1,8 m. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία φτάνει στο έδαφος. Δίνεται ότι $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.**

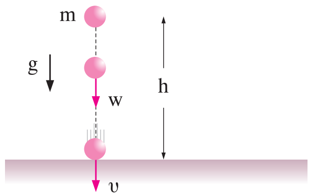


λύση

Εφόσον το σώμα εκτελεί ελεύθερη πτώση, η μόνη δύναμη που δέχεται κατά την πτώση του είναι το βάρος του. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.) για την κίνησή του αυτή.

Έχουμε $E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda}$, δηλαδή:

$$U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\varepsilon\lambda} \qquad (1)$$



Αλλά θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας (U = 0) τη χαμηλότερη θέση του σώματος, δηλαδή το έδαφος, έχουμε:

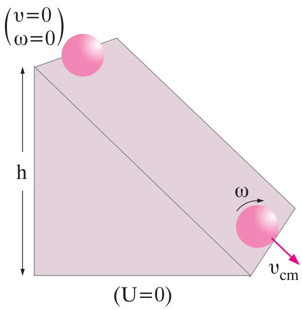
$$U_{\alpha\rho\chi} = mgh,\ K_{\alpha\rho\chi} = 0,\ U_{\tau\varepsilon\lambda} = 0,\ K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

Έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2gh} \Rightarrow \upsilon = 6\ \frac{m}{s}$$

Γενικά σχόλια για την εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε.

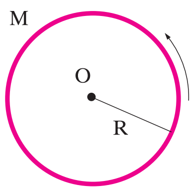
- **Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.):**
  Η μηχανική ενέργεια ενός σώματος στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις τριβής, αντίστασης (και γενικά μη συντηρητικές δυνάμεις) διατηρείται σταθερή. Δηλαδή:
  $$E_{αρχ} = E_{τελ} \quad ή \quad U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ}$$
- **Χρειάζεται προσοχή στο εξής:**
  Η τριβή που ασκείται σε ένα σώμα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει είναι στατική. Έτσι το ολικό έργο της σε οποιαδήποτε μετακίνηση είναι ίσο με μηδέν. (Δείτε την απαντημένη ερώτηση 6.1.)
  Επομένως **μπορούμε να εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε.** για ένα σώμα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει!
  Δε θα εφαρμόσετε ποτέ την Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση ενός σώματος που δέχεται **τριβή ολίσθησης!**
- **Η Α.Δ.Μ.Ε. για ένα σώμα που κάνει και στροφική και μεταφορική κίνηση:**
  Η σφαίρα μάζας M και ροπής αδράνειας I του διπλανού σχήματος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο ύψους h. Από την εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας έχουμε $E_{αρχ} = E_{τελ}$, δηλαδή:
  $$U_{αρχ} + K_{αρχ}^{(μεταφ)} + K_{αρχ}^{(στροφ)} = U_{τελ} + K_{τελ}^{(μεταφ)} + K_{τελ}^{(στροφ)}$$
  ή
  $$Mgh + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$



6.42 **Λεπτή στεφάνη μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της στεφάνης.**

Δίνεται ότι $M = 0{,}8$ kg, $R = 0{,}5$ m και $\omega = 10\ \frac{rad}{s}$.

Υπολογισμός της στροφικής κινητικής ενέργειας σώματος.



λύση

Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της στεφάνης δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (1)$$

όπου I είναι η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα περιστροφής της.
Θα υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της στεφάνης.
Χωρίζουμε τη στεφάνη στις στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2, ...
Από τον ορισμό της ροπής αδράνειας προκύπτει ότι:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots$$

Αλλά $r_1 = r_2 = \ldots = R$, οπότε:

$$I = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \ldots \Rightarrow I = (m_1 + m_2 + \ldots)R^2$$

Όμως $m_1 + m_2 + \ldots = M$, οπότε τελικά:

$$I = MR^2 \qquad (2)$$

Η σχέση (1) λοιπόν μας δίνει:

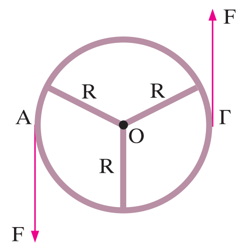
$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} K = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \Rightarrow K = 10\ \text{J}$$

6.43 Η οριζόντια βάνα του σχήματος, ακτίνας R, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο της Ο. Στα αντιδιαμετρικά σημεία Α και Γ ασκείται το ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}$ και $-\vec{F}$.

Υπολογισμός έργου ροπής.

α. Να υπολογίσετε το έργο της ροπής αυτού του ζεύγους δυνάμεων, όταν υπό τη συνεχή επίδρασή του η βάνα θα έχει στραφεί κατά γωνία θ.

β. Η στεφάνη της βάνας έχει μάζα M και καθεμία από τις τρεις ακτίνες της έχει μάζα m. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της βάνας τη στιγμή που έχει στραφεί κατά τη γωνία θ.



Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I = \frac{1}{12}mL^2$.

λύση

α. Το έργο της ροπής του ζεύγους δυνάμεων, όταν η ράβδος θα έχει στραφεί κατά γωνία θ, είναι:

$$W = \tau\theta \quad (1)$$

όπου τ είναι η ροπή αυτού του ζεύγους.
Αλλά $\tau = Fd$, όπου d είναι ο μοχλοβραχίονας του ζεύγους και, επειδή $d = 2R$, έχουμε:

$$\tau = 2FR \quad (2)$$

Η σχέση (1) τέλος γίνεται:

$$W = \tau\theta \xRightarrow{(2)} W = 2FR\theta$$

Πότε ισχύει ο τύπος $W = \tau\theta$

- Ο τύπος $W = \tau\theta$ ισχύει μόνο στην περίπτωση που η ροπή $\vec{\tau}$ είναι σταθερή.
- Αν η ροπή $\vec{\tau}$ δεν είναι σταθερή ή αν δε γνωρίζουμε αν είναι σταθερή, τότε το έργο της το υπολογίζουμε έμμεσα, από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.).

β. Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας για την περιστροφή της βάνας κατά γωνία θ. Έχουμε:

$$\Sigma W = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}, \quad \text{δηλαδή} \quad W = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 \quad (3)$$

Στο προηγούμενο ερώτημα προέκυψε ότι $W = 2FR\theta$. Θα υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της βάνας. Είναι:

$$I = I_{\sigma\tau\varepsilon\varphi} + 3I_{\alpha\kappa\tau} \quad (4)$$

Όμως, όπως είδαμε και στο παράδειγμα 6.42, $I_{\sigma\tau\varepsilon\varphi} = MR^2$ (α), ενώ γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}mL^2$.
Οι ακτίνες της βάνας είναι ράβδοι μήκους R και μάζας m και στρέφονται γύρω από το άκρο τους O. Η ροπή αδράνειας λοιπόν κάθε ακτίνας ως προς το O προκύπτει από το θεώρημα του Steiner και είναι:

$$I_{\alpha\kappa\tau} = I_{cm} + md^2 \xRightarrow[L=R]{d=\frac{R}{2}} I_{\alpha\kappa\tau} = \frac{1}{12}mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\alpha\kappa\tau} = \frac{1}{12}mR^2 + \frac{1}{4}mR^2 \Rightarrow I_{\alpha\kappa\tau} = \frac{1}{3}mR^2 \quad (\beta)$$

Η σχέση (4) λοιπόν γίνεται:

$$I = I_{\sigma\tau\varepsilon\varphi} + 3I_{\alpha\kappa\tau} \xRightarrow[(\beta)]{(\alpha)} I = MR^2 + 3\frac{1}{3}mR^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = MR^2 + mR^2 \Rightarrow I = (M+m)R^2$$

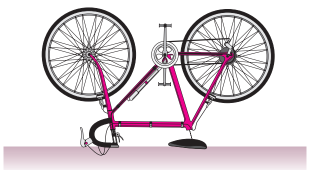
Η σχέση (3) τέλος γίνεται:

$$W = \frac{1}{2}I\omega^2 - 0 \Rightarrow 2FR\theta = \frac{1}{2}(M+m)R^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M+m)R\omega^2 = 4F\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4F\theta}{(M+m)R}}$$

6.44 **Ο τροχός ποδηλάτου του σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Ο τροχός αρχικά ηρεμεί. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εφαρμόζουμε στον τροχό σταθερή ροπή $\tau = 40\ N \cdot m$. Τη χρονική στιγμή $t = 8\ s$ η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι $\omega = 500\ \frac{rad}{s}$. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του τροχού τη χρονική στιγμή $t = 8\ s$.**

Βασική εφαρμογή Θ.Μ.Κ.Ε.



λύση

✓ Την κινητική ενέργεια του τροχού **δεν μπορούμε** να την υπολογίσουμε **άμεσα** από τη σχέση $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν έχουμε στην εκφώνηση τις πληροφορίες για να προσδιορίσουμε τη ροπή αδράνειάς του I.

✓ Θα προσδιορίσουμε λοιπόν την κινητική ενέργεια του τροχού **έμμεσα**, με τη βοήθεια του θεωρήματος έργου - κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.), αφού υπάρχει τρόπος να υπολογίσουμε το έργο της σταθερής ροπής τ.

✓ Επειδή η ροπή τ είναι σταθερή, ισχύει:

$$W = \tau\theta$$

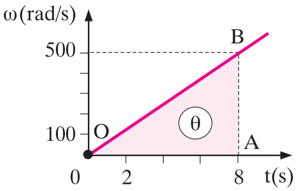
όπου θ είναι η γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί ο τροχός μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 8\ s$.

✓ Αφού η ροπή τ είναι σταθερή, η γωνιακή ταχύτητα ω του τροχού μεταβάλλεται ανάλογα προς τον χρόνο. Η γραφική παράσταση $\omega = f(t)$ τότε είναι ευθεία γραμμή.

Έμμεσος υπολογισμός της $K_{στροφ}$

- Πολλές φορές τη στροφική κινητική ενέργεια ενός σώματος **δεν** μπορούμε να την υπολογίσουμε άμεσα από τη σχέση $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, γιατί μας λείπουν πληροφορίες για την τιμή της I ή της ω ή και των δύο.
- Σε αυτές τις περιπτώσεις, συνήθως υπολογίζουμε την $K_{στροφ}$ του σώματος **έμμεσα**, με τη βοήθεια του θεωρήματος έργου - κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.), όπου θα είναι μάλλον ο μόνος άγνωστος.

t (s)	$\omega \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$
0	0
8	500



Δίπλα φαίνεται ένας πίνακας τιμών $t - \omega$ και η γραφική παράσταση $\omega = f(t)$.

Τη γωνία θ θα την υπολογίσουμε εμβαδομετρικά από αυτή τη γραφική παράσταση. Είναι:

$$\theta = \text{Εμβαδόν}(\overset{\triangle}{OAB}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2}(OA)\cdot(AB) = \frac{1}{2}\cdot 8\text{ s}\cdot 500\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 2.000\text{ rad}$$

Έτσι το έργο της ροπής τ είναι:

$$W = \tau\theta = 40\cdot 2.000 \Rightarrow W = 80.000\text{ J}$$

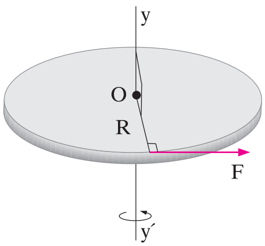
✓ Σύμφωνα με το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας για τη στροφική κίνηση, έχουμε:

$$\Sigma W = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow W = K - 0 \Rightarrow K = W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 80.000\text{ J}$$

Μάθε πώς να υπολογίζεις τη στιγμιαία και πώς τη μέση ισχύ δύναμης, όταν το σώμα εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση.

6.45 **Ο αρχικά ακίνητος δίσκος του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M = 5$ kg και ακτίνα $R = 1$ m. Ο δίσκος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου εφαπτομενική δύναμη σταθερού μέτρου $F = 10$ N. Να υπολογίσετε:**



α. **Την κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s.**

β. **Τον (στιγμιαίο) ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον δίσκο (τη στιγμιαία ισχύ της δύναμης) τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s.**

γ. **Τον (μέσο) ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον δίσκο (τη μέση ισχύ της δύναμης) στη χρονική διάρκεια από $t = 0$ ως τη στιγμή t_1.**

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

λύση

α. Εφόσον ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από σταθερό (ακλόνητο) άξονα, υπό την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$ εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση. Έτσι η κινητική του ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}I\omega_1^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2 \qquad (1)$$

όπου ω_1 είναι το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1.

Ο δίσκος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση με $\omega_0 = 0$, οπότε $\omega_1 = \alpha_\gamma t_1$ (2). Ισχύει:

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{2F}{MR} \Rightarrow \alpha_\gamma = 4\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Έτσι από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma t_1 \Rightarrow \omega_1 = 40\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

και από τη σχέση (1):

$$K = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega_1^2 \Rightarrow K = 2.000\ \text{J}$$

β. Ο στιγμιαίος ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον δίσκο (στιγμιαία ισχύς της δύναμης), εφόσον το σώμα εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dW_{\tau_F}}{dt} = P = \tau\omega$$

Έτσι τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s θα είναι:

$$P_1 = \tau\omega_1 \Rightarrow P_1 = FR\omega_1 \Rightarrow P_1 = 400\ \text{W}$$

(Δείτε και το διπλανό σχόλιο-«κλειδί».)

Στιγμιαία και μέση ισχύς δύναμης

Α. Μεταφορική κίνηση

- Η στιγμιαία ισχύς μιας δύναμης αναφέρεται σε μία μόνο στιγμή και δίνεται από τη σχέση:

$$P = \frac{dW_F}{dt} = \frac{Fdx}{dt} \Rightarrow P = F\upsilon$$

- Η μέση ισχύς μιας δύναμης αναφέρεται σε μία χρονική διάρκεια Δt και την υπολογίζουμε από τη σχέση:

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

όπου W είναι το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στη χρονική διάρκεια Δt.

Β. Στροφική κίνηση

Εφόσον η κίνηση είναι (μόνο) στροφική, η δύναμη παράγει έργο μέσω της ροπής της. Δηλαδή:

$$W_F = W_{\tau_F}$$

- Η στιγμιαία ισχύς μιας δύναμης αναφέρεται σε μία στιγμή και δίνεται από τη σχέση:

$$P = \tau\omega$$

όπου ω είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας εκείνη τη στιγμή.

- Η μέση ισχύς της δύναμης αναφέρεται σε μία χρονική διάρκεια Δt και δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{P} = \frac{W_{\tau_F}}{\Delta t}$$

όπου W_{τ_F} είναι το έργο της ροπής της δύναμης στη χρονική διάρκεια Δt.

γ. Ο μέσος ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον δίσκο (μέση ισχύς της δύναμης) δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{P} = \frac{W_{\tau_F}}{\Delta t} = \frac{W_{\tau_F}}{t_1 - 0} \Rightarrow \bar{P} = \frac{W_{\tau_F}}{t_1}$$

Το έργο ροπής της δύναμης στην παραπάνω χρονική διάρκεια δίνεται από τη σχέση:

$$W_{\tau_F} = \tau\theta_1 \Rightarrow W_{\tau_F} = FR\theta_1$$

όπου θ_1 είναι η γωνία στροφής του δίσκου (γωνιακή μετατόπιση) στη χρονική διάρκεια των t_1 s. Ισχύει:

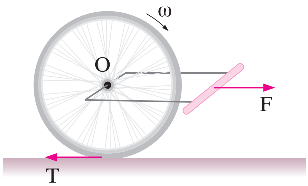
$$\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t_1^2 \Rightarrow \theta_1 = 200 \text{ rad}$$

Έτσι, $W_{\tau_F} = 2.000$ J.

Τέλος, $\bar{P} = \dfrac{W_{\tau_F}}{t} = \dfrac{2.000}{10} \Rightarrow \bar{P} = 200$ W.

Στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Όλες οι περιπτώσεις.

6.46 **Ο τροχός του διπλανού σχήματος έχει μάζα $m = 5$ kg, ακτίνα $R = 0{,}4$ m και αρχικά ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα μια οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 80$ N στον άξονα του τροχού, με αποτέλεσμα ο τροχός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:**



α. **Τον ρυθμό μεταβολής $\dfrac{dK_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}{dt}$ της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του τροχού τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.**

β. **Τον ρυθμό μεταβολής $\dfrac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt}$ της στροφικής κινητικής ενέργειας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1.**

γ. **Τον ρυθμό μεταβολής $\dfrac{dK}{dt}$ της κινητικής ενέργειας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1.**

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = mR^2$.

(Δείτε οπωσδήποτε το σχόλιο-«κλειδί» που ακολουθεί.)

λύση

Γενικοί υπολογισμοί

Θα υπολογίσουμε αρχικά τις επιταχύνσεις α_{cm}, α_{γ} και το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής. Έχουμε:

- $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow F - T = m\alpha_{cm} \Rightarrow T = F - m\alpha_{cm}$ (1)
- $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma} \Rightarrow TR = mR^2\alpha_{\gamma} \Rightarrow T = mR\alpha_{\gamma}$ (2)
- $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma}R \Rightarrow \alpha_{\gamma} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R}$ (3)

Επίλυση του συστήματος των σχέσεων (1), (2), (3)

– Η σχέση (2) $\overset{(1)}{\underset{(3)}{\Longrightarrow}} F - m\alpha_{cm} = m\cancel{R}\dfrac{\alpha_{cm}}{\cancel{R}} \Rightarrow F = 2m\alpha_{cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{cm} = \dfrac{F}{2m} \Rightarrow \alpha_{cm} = 8\ \dfrac{m}{s^2}$.

– Η σχέση (3) $\Rightarrow \alpha_{\gamma} = \dfrac{\alpha_{cm}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = 20\ \dfrac{rad}{s^2}$.

– Η σχέση (2) $\Rightarrow T = mR\alpha_{\gamma} \Rightarrow T = 40$ N.

Απαντήσεις στα ερωτήματα

α. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon_{cm} \qquad (4)$$

(Δείτε και το διπλανό σχόλιο-«κλειδί».)

Αλλά $\Sigma F = F - T \Rightarrow \Sigma F = 40$ N και τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s θα είναι $\upsilon_{cm} = \alpha_{cm}t_1 = 8 \cdot 5 \Rightarrow \upsilon_{cm} = 40\ \dfrac{m}{s}$.

Έτσι από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon_{cm} \Rightarrow \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}{dt} = 1.600 \text{ W}$$

β. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας εξαιτίας της περιστροφικής κίνησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega \qquad (5)$$

Αλλά $\Sigma\tau = \tau_T = TR \Rightarrow \Sigma\tau = 16$ N · m.

Στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής της κινητικής ενέργειας (όλες οι περιπτώσεις)

- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός σώματος εξαιτίας της μεταφορικής του κίνησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon_{cm} \qquad (1)$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός σώματος εξαιτίας της περιστροφικής του κίνησης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho o\gamma}}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega \qquad (2)$$

- Όταν ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα και μεταφορική και περιστροφική κίνηση, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας συνολικά υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon_{cm} + \Sigma\tau \cdot \omega \qquad (3)$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s θα είναι:

$$\omega_1 = \alpha_\gamma t_1 \Rightarrow \omega_1 = 20 \cdot 5 \Rightarrow \omega_1 = 100 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Έτσι από τη σχέση (5) έχουμε:

$$\frac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt} = 1.600 \text{ W}$$

γ. Αφού το σώμα εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας συνολικά υπολογίζεται από τη σχέση:

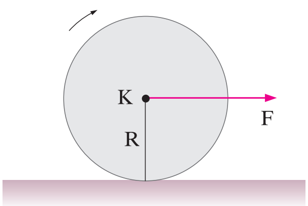
$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot \upsilon_{cm} + \Sigma\tau \cdot \omega$$

Έτσι τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s θα είναι:

$$\frac{dK}{dt} = 1.600 \text{ W} + 1.600 \text{ W} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 3.200 \text{ W}$$

Πώς από τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάποια χρονική στιγμή t_1 βρίσκουμε την κινητική ενέργεια τη στιγμή t_1.

6.47 **Ένας κύλινδρος μάζας $M = 5$ kg και ακτίνας $R = 0{,}4$ m αρχικά ισορροπεί σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στο κέντρο του K οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του κυλίνδρου είναι $\frac{dK_{\sigma\tau\rho o\varphi}}{dt} = 32$ W. Να υπολογίσετε:**



α. Το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του δαπέδου.

β. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

γ. Την κινητική ενέργεια K του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.

δ. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ως τη χρονική στιγμή t_1.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

λύση

α. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dK_{στροφ}}{dt} = Στ \cdot ω \xRightarrow{Στ=Iα_γ} \frac{dK_{στροφ}}{dt} = Iα_γ ω \qquad (1)$$

Ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική και μεταφορική κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα. Επομένως $ω = α_γ t$ και έτσι η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{dK_{στροφ}}{dt} = Iα_γ α_γ t = Iα_γ^2 t \Rightarrow α_γ = \sqrt{\frac{1}{It} \cdot \frac{dK_{στροφ}}{dt}} \qquad (2)$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s έχουμε $\frac{dK_{στροφ}}{dt} = 32$ W και $I = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I = 0{,}4\ kg \cdot m^2$.

Έτσι από τη σχέση (2) έχουμε:

$$α_γ = \sqrt{\frac{1}{0{,}4 \cdot 5} \cdot 32} \Rightarrow α_γ = 4\ \frac{rad}{s^2}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε:

$$Στ = Iα_γ \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2 α_γ \Rightarrow T = \frac{1}{2}MRα_γ \Rightarrow T = 4\ N$$

β. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου:

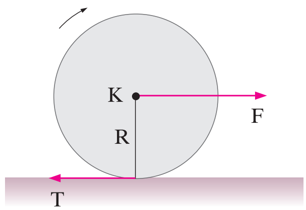
$$ΣF = Mα_{cm} \Rightarrow F - T = Mα_γ R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = T + Mα_γ R \Rightarrow F = 12\ N$$

γ. Ο κύλινδρος εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Επομένως η κινητική του ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}Iω^2 + \frac{1}{2}Mυ_{cm}^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2ω^2 + \frac{1}{2}Mω^2R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{3}{4}MR^2ω^2 \qquad (3)$$



Πώς στην κύλιση χωρίς ολίσθηση από τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάποια στιγμή t_1 βρίσκουμε την κινητική ενέργεια του σώματος αυτή τη στιγμή

Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

1. Δίνεται ο (στιγμιαίος) ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας εξαιτίας **της μεταφορικής** κίνησης. Έχουμε:

$$\frac{dK_{μεταφ}}{dt} = ΣF \cdot υ_{cm} \xRightarrow{υ_{cm}=α_{cm}t}$$

$$\Rightarrow \frac{dK_{μεταφ}}{dt} = ΣF \cdot α_{cm}t = Mα_{cm}^2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow α_{cm} = \sqrt{\frac{1}{Mt} \cdot \frac{dK_{μεταφ}}{dt}} \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1), αν είναι γνωστή και η μάζα M, βρίσκουμε την επιτάχυνση $α_{cm}$ και από τη σχεση:

$$α_{cm} = α_γ R \Rightarrow α_γ = \frac{α_{cm}}{R}$$

βρίσκουμε και την $α_γ$. Έτσι τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$υ_1 = υ_0 \pm α_{cm}t_1$$

και $\quad ω_1 = ω_0 \pm α_γ t_1$

→

Γνωρίζοντας πλέον τις ταχύτητες $υ_1$ και $ω_1$, έχουμε για την κινητική ενέργεια του σώματος:

$$K = K_{μεταφ} + K_{στροφ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{1}{2}Mυ_1^2 + \frac{1}{2}Iω_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1 = γνωστή$$

2. Δίνεται ο (στιγμιαίος) ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας εξαιτίας της **περιστροφικής** κίνησης. Έχουμε:

$$\frac{dK_{στροφ}}{dt} = Στ \cdot ω \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dK_{στροφ}}{dt} = Iα_γ ω \xRightarrow{ω=α_γ t}$$

$$\Rightarrow \frac{dK_{στροφ}}{dt} = Iα_γ^2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow α_γ = \sqrt{\frac{1}{It} \cdot \frac{dK_{στροφ}}{dt}} \qquad (2)$$

Από τη σχέση (2) υπολογίζουμε τη γωνιακή επιτάχυνση $α_γ$ του τροχού και από τη σχέση $α_{cm} = α_γ R$ βρίσκουμε και την $α_{cm}$.

Έτσι τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$υ_1 = υ_0 \pm α_{cm} t_1$$

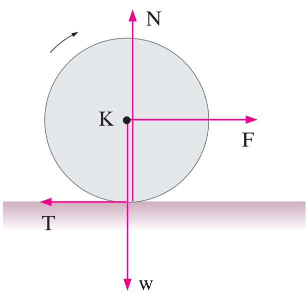
$$\text{και} \quad ω_1 = ω_0 \pm α_γ t_1$$

Τέλος, έχουμε:

$$K = K_{μεταφ} + K_{στροφ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{1}{2}Mυ_1^2 + \frac{1}{2}Iω_1^2$$

$$\Rightarrow K_1 = γνωστή$$



Τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s ο κύλινδρος έχει γωνιακή ταχύτητα $ω_1 = α_γ t_1 \Rightarrow ω_1 = 20\ \frac{rad}{s}$. Έτσι από τη σχέση (3) έχουμε ότι η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$K_1 = \frac{3}{4}MR^2ω_1^2 \Rightarrow K_1 = 240\ J$$

δ. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας (Θ.Μ.Κ.Ε.) για την κίνηση του κυλίνδρου:

$$ΔK = ΣW \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = ΣW$$

και, επειδή $K_{αρχ} = 0$, έχουμε:

$$ΣW = K_{τελ} \qquad (4)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του $\vec{w}$, η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ από το δάπεδο, η στατική τριβή $\vec{T}$ και η δύναμη $\vec{F}$. Από αυτές, το βάρος $\vec{w}$ και η κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ είναι δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση του κυλίνδρου, οπότε δεν παράγουν έργο.

Αφού το σώμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, το έργο της στατικής τριβής κατά τη μετατόπιση σε οποιοδήποτε διάστημα s είναι ίσο με μηδέν. Μια καλύτερη απόδειξη γι' αυτό θα βρείτε στην ερώτηση εμβάθυνσης 6.1.

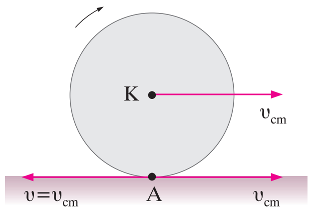
Μια άλλη εξήγηση, λιγότερο αυστηρή, για το ότι το έργο της στατικής τριβής στην κύλιση χωρίς ολίσθηση είναι μηδέν είναι η εξής:

Καθώς ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, η στατική τριβή κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλίνδρου. Αυτό είναι το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το δάπεδο (δείτε το σημείο Α στο σχήμα της επόμενης σελίδας).

Η ταχύτητα του σημείου Α κάθε χρονική στιγμή είναι:

$$υ_A = υ_{cm} - υ = υ_{cm} - υ_{cm} \Rightarrow υ_A = 0$$

Επομένως, αφού $\upsilon_A = 0$, το σημείο εφαρμογής της τριβής στην κύλιση χωρίς ολίσθηση **είναι σαν να μη μετατοπίζεται**, οπότε το έργο της στατικής τριβής είναι ίσο με μηδέν.



Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, η μόνη δύναμη που παράγει έργο κατά την κίνηση του κυλίνδρου είναι η $\vec{F}$, οπότε $\Sigma W = W_F$. Έτσι η σχέση (4) γίνεται:

$$\Sigma W = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} = K_1 \Rightarrow W_F = 240 \text{ J}$$

Λύσε ασκήσεις σε πρώτο επίπεδο

«Ξεκλειδώνοντας» με τα βασικά «κλειδιά»

6.48 Μικρό σώμα μάζας m εκτοξεύεται από ένα σημείο Ο του εδάφους κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε:

α. Τη μηχανική ενέργεια του σώματος στο σημείο Ο της εκτόξευσης.

β. Τη μηχανική του ενέργεια στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του.

γ. Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει.

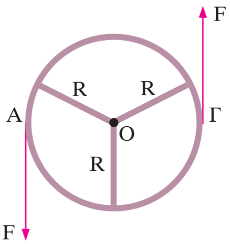
Δίνεται ότι $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

6.49 Λεπτή στεφάνη μάζας $M = 0{,}8$ kg και ακτίνας $R = 0{,}5$ m περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 20\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής της στεφάνης.

6.50 Λεπτός ομογενής δίσκος μάζας $M = 2$ kg και ακτίνας $R = 0{,}4$ m περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1.200\ \frac{\text{rad}}{\text{min}}$ ως προς άξονα $y'y$ που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής του δίσκου.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειάς του ως προς έναν άξονα $z'z$ που εφάπτεται στην περιφέρειά του και είναι παράλληλος προς τον άξονα περιστροφής $y'y$ είναι $I_{z'z} = \frac{3}{2}MR^2$.

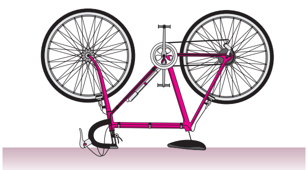
6.51 Η οριζόντια βάνα του σχήματος, ακτίνας $R = 30$ cm, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνάει από το κέντρο της Ο. Στα αντιδιαμετρικά σημεία της Α και Γ ασκείται το ζεύγος δυνάμεων $\vec{F}$ και $-\vec{F}$, καθεμία από τις οποίες έχει μέτρο $F = 40$ N.



α. Να υπολογίσετε το έργο της ροπής αυτού του ζεύγους δυνάμεων, όταν υπό τη συνεχή επίδρασή του η βάνα θα έχει στραφεί κατά γωνία $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

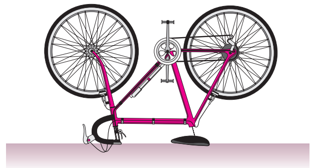
β. Η στεφάνη της βάνας έχει μάζα $M = 2$ kg και καθεμία από τις τρεις ακτίνες της έχει μάζα $m = 0{,}8$ kg. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της βάνας τη στιγμή που έχει στραφεί κατά γωνία $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad. Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I = \frac{1}{12}\,mL^2$.

6.52 Ο τροχός ποδηλάτου του σχήματος έχει μάζα $M = 2$ kg και ακτίνα $R = 0{,}5$ m. Ενώ ο τροχός ηρεμούσε, γυρίσαμε μία φορά τα πετάλια του ποδηλάτου και, μόλις ολοκληρώθηκε αυτή η πεταλιά, η γωνιακή ταχύτητα του τροχού ήταν $\omega = 4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



Να υπολογίσετε το έργο που παράχθηκε κατ' αυτή την πεταλιά.
Θεωρήστε ότι όλο το έργο της ροπής που έστρεψε τα πετάλια αποδόθηκε στον τροχό και ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = MR^2$.

6.53 Ο τροχός ποδηλάτου του σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Ο τροχός αρχικά ηρεμεί.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εφαρμόστηκε στον τροχό σταθερή ροπή $\tau = 25$ N · m. Τη χρονική στιγμή $t = 4$ s η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι $\omega = 300\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια του τροχού τη χρονική στιγμή $t = 4$ s.

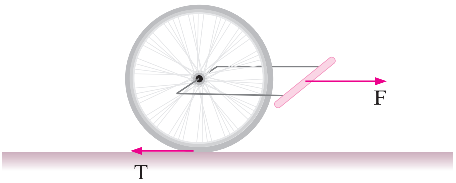
6.54 Ένας τροχός μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές. Ο τροχός αρχικά ηρεμεί. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εφαρμόζουμε στον τροχό σταθερή ροπή $\tau = 30$ N · m. Τη χρονική στιγμή $t = 5$ s η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι $\omega = 400\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε:

α. Το έργο της ροπής τ για το χρονικό διάστημα των $t = 5$ s.

β. Την κινητική ενέργεια του τροχού τη χρονική στιγμή $t = 5$ s.

γ. Τη ροπή αδράνειας του τροχού.

6.55 Στο σχήμα εικονίζεται ένας τροχός μάζας $m = 2$ kg και ακτίνας $R = 1$ m που αρχικά ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.



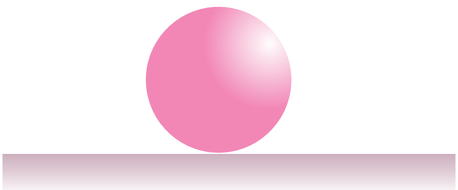
Ασκούμε με κάποιον τρόπο μια οριζόντια δύναμη $F = 40$ N στον άξονα του τροχού, με αποτέλεσμα ο τροχός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα υ_{cm} του τροχού, όταν η μετατόπιση του κέντρου μάζας του θα είναι $x = 5$ m.

β. Τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού τότε.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = mR^2$.

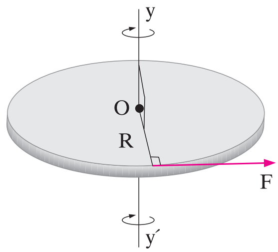
6.56 Η σφαίρα του σχήματος έχει μάζα $m = 10$ kg, ακτίνα $R = 0{,}2$ m και αρχικά ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο.



Να υπολογίσετε το έργο που απαιτείται ώστε να τεθεί σε κίνηση η σφαίρα και να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\ \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς μία διάμετρό της είναι $I = \dfrac{2}{5}\ mR^2$.

6.57 Ο αρχικά ακίνητος ομογενής δίσκος του σχήματος έχει μάζα $M = 4$ kg και ακτίνα $R = 0{,}8$ m.



Ο δίσκος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου εφαπτομενική δύναμη σταθερού μέτρου $F = 12$ N. Να υπολογίσετε:

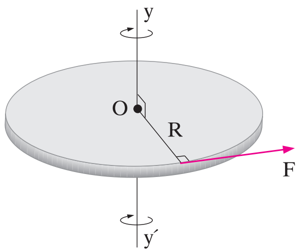
α. Την κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s.

β. Τον (στιγμιαίο) ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον δίσκο (τη στιγμιαία ισχύ της δύναμης) τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s.

γ. Τον (μέσο) ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον δίσκο (τη μέση ισχύ της δύναμης) στη χρονική διάρκεια από $t = 0$ ως τη στιγμή t_1.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \dfrac{1}{2}MR^2$.

6.58 Ο αρχικά ακίνητος οριζόντιος δίσκος του σχήματος μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον σταθερό κατακόρυφο άξονα $y'y$ που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος έχει ροπή αδράνειας $I = 2\ kg \cdot m^2$ ως προς τον άξονα $y'y$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στην περιφέρεια του δίσκου εφαπτομενική δύναμη $\vec{F}$.

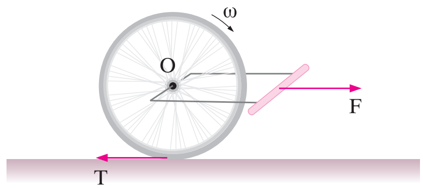


Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\ s$ ο (στιγμιαίος) ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στον δίσκο έχει τιμή $P_1 = 400\ W$.

α. Να υπολογίσετε τη (στροφική) κινητική ενέργεια του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\ s$.

β. Αν ο δίσκος έχει ακτίνα $R = 0{,}4\ m$, να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

6.59 Ο τροχός του σχήματος έχει μάζα $m = 4\ kg$, ακτίνα $R = 0{,}5\ m$ και αρχικά ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα μια οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 40\ N$ στον άξονα του τροχού, με αποτέλεσμα ο τροχός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:

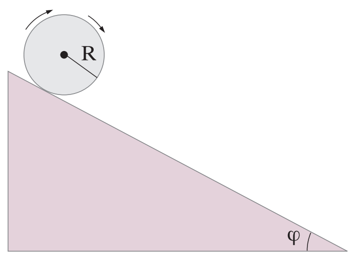
α. Τον ρυθμό μεταβολής $\dfrac{dK_{μεταφ}}{dt}$ της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του τροχού τη χρονική στιγμή $t_1 = 8\ s$.

β. Τον ρυθμό μεταβολής $\dfrac{dK_{στροφ}}{dt}$ της στροφικής κινητικής ενέργειας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1.

γ. Τον ρυθμό μεταβολής $\dfrac{dK}{dt}$ της κινητικής ενέργειας του τροχού τη χρονική στιγμή t_1.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = mR^2$.

6.60 Στο σχήμα εικονίζεται ένας κύλινδρος μάζας $m = 2\ kg$ και ακτίνας $R = 0{,}2\ m$ που τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται να κινηθεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\hat{φ}$ με $ημφ = 0{,}6$.



Στη συνέχεια ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατεβαίνοντας το κεκλιμένο επίπεδο.

Α. Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο.

Β. Να υπολογίσετε:

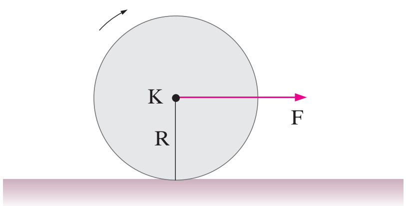
α. Τον ρυθμό μεταβολής $\frac{dK_{μεταφ}}{dt}$ της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.

β. Τον ρυθμό μεταβολής $\frac{dK_{στροφ}}{dt}$ της στροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.

γ. Τον ρυθμό μεταβολής $\frac{dK}{dt}$ της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη στιγμή t_1.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

6.61 Ένας κύλινδρος μάζας $M = 4$ kg και ακτίνας $R = 0{,}4$ m αρχικά ισορροπεί σε ένα οριζόντιο επίπεδο.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στο κέντρο του K οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}$, οπότε ο κύλινδρος αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10$ s ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής του κυλίνδρου είναι $\frac{dK_{στροφ}}{dt} = 51{,}2$ W. Να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και του δαπέδου.

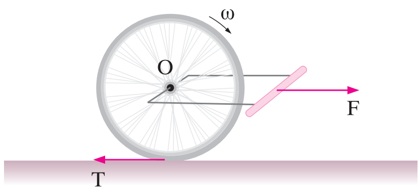
β. Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.

γ. Την κινητική ενέργεια K_1 του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1.

δ. Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ από τη χρονική στιγμή $t = 0$ ως τη χρονική στιγμή t_1.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

6.62 Ο τροχός του σχήματος αρχικά ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο.



Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα μια οριζόντια δύναμη $F = 80$ N στον άξονα του τροχού, με αποτέλεσμα ο τροχός να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Η στατική τριβή που αναπτύσσεται ανάμεσα στον τροχό και στο επίπεδο έχει μέτρο T και τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του τροχού είναι $\frac{dK}{dt} = 1.200$ W. Να υπολογίσετε:

α. Την επιτάχυνση $α_{cm}$ του τροχού.

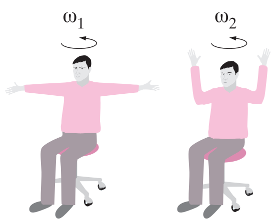
β. Την ταχύτητα $υ_1$ του κέντρου μάζας του τροχού τη χρονική στιγμή $t_1 = 5$ s.

γ. Τον ρυθμό μεταβολής $\frac{dK_{μεταφ}}{dt}$ της κινητικής ενέργειας του τροχού εξαιτίας της μεταφορικής του κίνησης τη χρονική στιγμή t_1.

δ. Τον ρυθμό μεταβολής $\frac{dK_{στροφ}}{dt}$ της κινητικής ενέργειας του τροχού εξαιτίας της περιστροφικής του κίνησης τη χρονική στιγμή t_1.

Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = mR^2$.

Και άλλα λυμένα παραδείγματα σε δεύτερο επίπεδο



6.63 Έργο που προκαλεί τη μεταβολή της στροφορμής.

Ο άνθρωπος του σχήματος κάθεται σε ένα περιστρεφόμενο κάθισμα και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 12\ \frac{rad}{s}$ έχοντας τεντωμένα τα χέρια του. Κάποια στιγμή ο άνθρωπος μαζεύει τα χέρια του (από έκταση σε ανάταση). Η ροπή αδράνειας του συστήματος κάθισμα-άνθρωπος με τα χέρια στην έκταση είναι $I_1 = 5\ kg \cdot m^2$, ενώ με τα χέρια στην ανάταση είναι $I_2 = 4\ kg \cdot m^2$. Να υπολογίσετε:

α. **Τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ανθρώπου, όταν έχει τα χέρια στην ανάταση.**

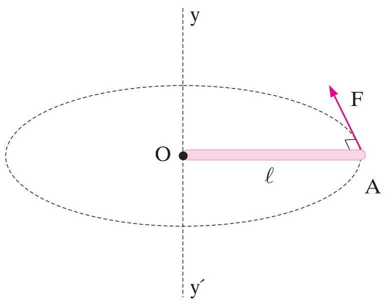
β. **Το έργο που παράγει ο άνθρωπος κατά τη συσπείρωση των χεριών του.**

λύση

α. Επειδή στο σύστημα κάθισμα-άνθρωπος δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, η στροφορμή του παραμένει σταθερή. Δηλαδή:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow 5 \cdot 12 = 4\omega_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 15\ \frac{rad}{s}$$



Η ράβδος ήταν αρχικά ακίνητη και αρχίζει να στρέφεται με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}$. Να υπολογίσετε:

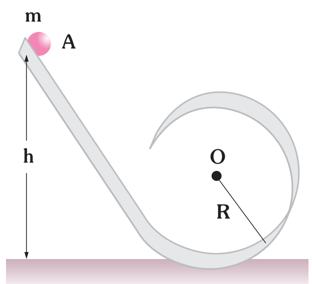
α. Το έργο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$ σε μία περιστροφή της ράβδου.

β. Τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου τη στιγμή που ολοκληρώνει μία πλήρη περιστροφή.

γ. Τον ρυθμό με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο (δηλαδή την ισχύ της δύναμης) εκείνη τη στιγμή.

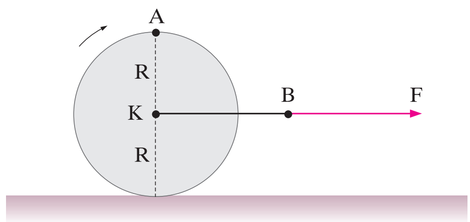
Δίνεται για τη ράβδο $I_{cm} = \dfrac{1}{12}\, m\ell^2$.

6.85 Η μικρή σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από το σημείο A πάνω σε οδηγό-αυλάκι, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αν η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ποιο είναι το μικρότερο ύψος h στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το σημείο A από το οποίο αφήνεται η σφαίρα ώστε να κάνει ανακύκλωση; Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της είναι $I = \dfrac{2}{5}\, mr^2$. Η ακτίνα του ανακυκλωτήρα είναι $R = 0{,}5$ m. (Θεωρήστε ότι $r << R$.)

6.86 Ο κύλινδρος του σχήματος αρχικά ηρεμεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ με τη βοήθεια ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος ασκούμε μια οριζόντια δύναμη $F = 60$ N στον άξονα του κυλίνδρου, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



Τη χρονική στιγμή $t_1 = 8$ s ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του κυλίνδρου είναι $\dfrac{dK}{dt} = 1.920$ W. Να υπολογίσετε:

α. Την επιτάχυνση α_{cm} του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

β. Την ταχύτητα υ_1 του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή t_1.

γ. Την επιτάχυνση α_A του πάνω πάνω σημείου του κυλίνδρου.

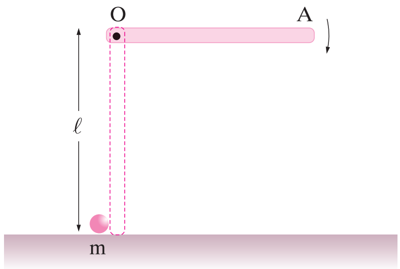
δ. Την επιτάχυνση α_B του σημείου εφαρμογής της δύναμης.

ε. Τον ρυθμό μεταβολής $\dfrac{dK_{μεταφ}}{dt}$ της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου εξαιτίας της μεταφορικής του κίνησης τη χρονική στιγμή t_1.

στ. Τον ρυθμό μεταβολής $\frac{dK_{στροφ}}{dt}$ της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου εξαιτίας της περιστροφικής του κίνησης τη χρονική στιγμή t_1.

Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{2}mR^2$.

6.87 Η λεπτή ομογενής ράβδος ΟΑ του παρακάτω σχήματος έχει μήκος $\ell = 0{,}83$ m, μάζα M και την κρατάμε οριζόντια με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα.



Το άκρο της O είναι ακίνητο και η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από αυτό σε κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές. Κάποια στιγμή αφήνουμε τη ράβδο ελεύθερη να περιστραφεί, οπότε τη στιγμή που γίνεται κατακόρυφη το άκρο της A συγκρούεται πλαστικά και συσσωματώνεται με αρχικά ακίνητο μικρό σφαιρίδιο μάζας $m = M$, το οποίο βρίσκεται σε λείο οριζόντιο δάπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

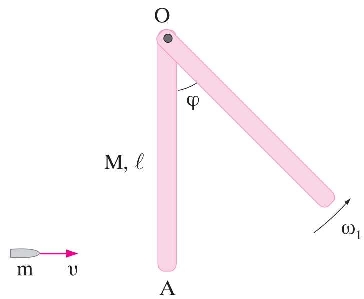
α. Τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος ράβδος-σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση.

β. Τη μέγιστη γωνία φ που θα σχηματίσει η ράβδος με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο O, μετά την κρούση της με το σώμα.

γ. Τη στιγμιαία επιτάχυνση με την οποία το σύστημα ράβδος-σφαιρίδιο θα ξεκινήσει να κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτήν είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

6.88 Η ράβδος ΟΑ του σχήματος έχει μήκος ℓ, μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O χωρίς τριβές.



Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση. Βλήμα μάζας m κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα υ σφηνώνεται στο κάτω άκρο A της ράβδου.

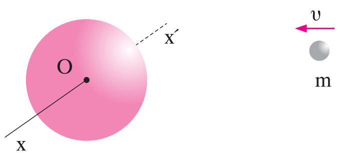
α. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή ($υ_{min}$) της ταχύτητας υ του βλήματος για την οποία το συσσωμάτωμα ράβδος-βλήμα θα κάνει ανακύκλωση.

β. Με βάση αυτή την τιμή ταχύτητας $υ_{min}$, να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής $\dfrac{dK_{στροφ}}{dt}$ της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος της ράβδου και του βλήματος εξαιτίας της στροφικής του κίνησης τη στιγμή που ανεβαίνοντας η ράβδος σχηματίζει γωνία $\varphi = 45°$ με την αρχική της διεύθυνση.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_O = \dfrac{1}{3}M\ell^2$ και $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$.

Αριθμητική εφαρμογή: $M = 4$ kg, $m = 0{,}5$ kg, $\ell = 1$ m.

6.89 Η σφαίρα του σχήματος έχει μάζα $M = 0{,}9$ kg, ακτίνα $R = 0{,}1$ m και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο της. Το σφαιρίδιο έχει μάζα $m = 0{,}1$ kg και κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 100\ \dfrac{m}{s}$.



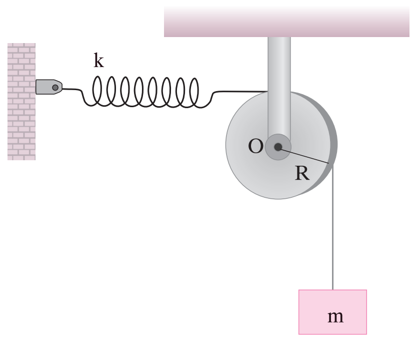
Το σφαιρίδιο συγκρούεται με την αρχικά ακίνητη σφαίρα σε ένα σημείο της επιφάνειάς της και κολλάει σε αυτό. Να υπολογίσετε:

α. Τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

β. Το επί τοις εκατό ποσοστό της απώλειας κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = \dfrac{2}{5}MR^2$.

6.90 Στο σχήμα φαίνεται μια τροχαλία μάζας $M = 2$ kg και ακτίνας R, η οποία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από τον άξονά της. Από την τροχαλία διέρχεται αβαρές νήμα που στο ένα άκρο του δένεται σώμα μάζας $m = 4$ kg, ενώ το άλλο άκρο του δένεται στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 80\ \dfrac{N}{m}$, του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο ακλόνητα σε τοίχο. Κρατάμε το σώμα μάζας m ανυψωμένο τόσο, ώστε το ελατήριο να έχει το φυσικό του μήκος και το νήμα να είναι τεντωμένο. Κάποια στιγμή αφήνουμε το σώμα ελεύθερο.



Α. Να υπολογίσετε τη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου.

Β. α. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα αποκτήσει σε κάποια θέση μέγιστη ταχύτητα υ_{max}.

β. Να υπολογίσετε την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος από την αρχική θέση μέχρι να αποκτήσει την $υ_{max}$.

γ. Να υπολογίσετε την $υ_{max}$.

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$, $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ και το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία.

«Πνεύμα» Πανελληνίων

1ο-2ο ΘΕΜΑ

6.91 Στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω. Αν η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι I, να αποδείξετε ότι η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της στροφικής του κίνησης δίνεται από τη σχέση $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

Εξετάσεις 2003
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

6.92 Δύο ομογενείς δακτύλιοι Α, Β των οποίων το πάχος είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα τους έχουν την ίδια μάζα και ακτίνες R_A, R_B, όπου $R_A > R_B$.
Οι δακτύλιοι περιστρέφονται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

α. Ποιος από τους δύο δακτυλίους έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής;

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2003 (Αποδήμων)

6.93 Ένα ομογενές σώμα με κανονικό γεωμετρικό σχήμα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την κινητική του ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Το γεωμετρικό σχήμα του σώματος είναι:

α. σφαίρα.

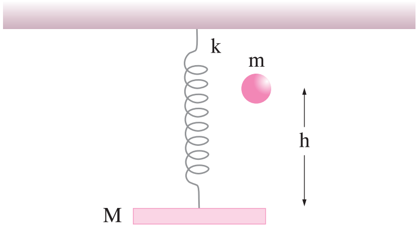
β. λεπτός δακτύλιος.

γ. κύλινδρος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2004
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

6.94 Σώμα ακίνητο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0$ να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Αν τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής εί-



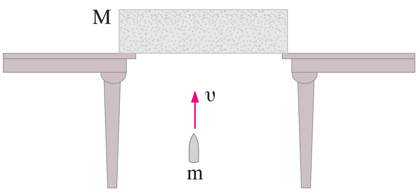
Να βρεθούν:

α. Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

β. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί αυτό το σύστημα.

Δίνεται ότι $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$.

7.103 Βλήμα μάζας $m = 10$ g, που κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, φτάνει με ταχύτητα $υ = 20\ \dfrac{m}{s}$ στην κάτω επιφάνεια ενός κομματιού φελιζόλ μάζας $M = 500$ g, που στηρίζεται στις άκρες δύο υποστηριγμάτων, όπως στο σχήμα.



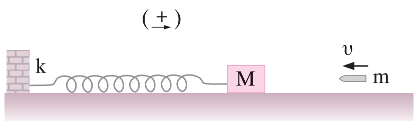
Ποιο είναι το μικρότερο βάθος s στο οποίο μπορεί να εισχωρήσει το βλήμα στο φελιζόλ χωρίς να ανυψωθεί το σύστημα φελιζόλ-βλήμα, αν η δύναμη που ασκεί το φελιζόλ στο βλήμα θεωρηθεί σταθερή; Δίνεται ότι $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$.

7.104 Αυτοκίνητο με μάζα $m = 10^4$ kg, που κινείται με ταχύτητα $υ = 8\ \dfrac{m}{s}$, πέφτει μετωπικά πάνω σε άλλο αυτοκίνητο μάζας $m_1 = 5 \cdot 10^3$ kg, που βρίσκεται σε ηρεμία. Μετά τη σύγκρουση, η ταχύτητα του δεύτερου αυτοκινήτου σε σχέση με το πρώτο είναι $2\ \dfrac{m}{s}$. Να βρεθεί η απώλεια μηχανικής ενέργειας σε Joule.

7.105 Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 1$ kg και $m_2 = 2$ kg κινούνται με ταχύτητες $υ_1 = 5\ \dfrac{m}{s}$ και $υ_2 = 3\ \dfrac{m}{s}$, που σχηματίζουν με τη διάκεντρό τους γωνίες $\hat{φ} = 30°$ και $\hat{θ} = 60°$ αντίστοιχα. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται πλαστικά και συσσωματώνονται. Να βρεθεί η ταχύτητα $\vec{u}$ του συσσωματώματος μετά την κρούση.

Γ. Συνδυαστικές

7.106 Ένα σώμα μάζας $M = 0{,}9$ kg είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ \dfrac{N}{m}$.



Ένα βλήμα μάζας $m = 0{,}1$ kg κινείται με οριζόντια ταχύτητα $υ = 40\ \dfrac{m}{s}$ και σφηνώνεται στο σώμα. Να υπολογίσετε:

α. Το πλάτος Α της Α.Α.Τ. που εκτελεί το σύστημα μετά την κρούση.

β. Την περίοδο Τ και την κυκλική συχνότητα ω αυτής της Α.Α.Τ.

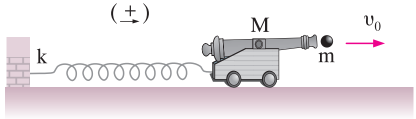
γ. Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις $x = f(t)$ και $υ = f(t)$ γι' αυτή την Α.Α.Τ.

δ. Σε πόσο χρόνο μετά από την έναρξή της θα είναι $x = +\frac{A}{2}$ και $\upsilon < 0$.

ε. Το έργο W_{F_ε} της δύναμης επαναφοράς του ελατηρίου για το παραπάνω χρονικό διάστημα.

Δίνεται ότι $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. Τριβές δεν υπάρχουν.

7.107 Ένα πυροβόλο μάζας M βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και βάλλει οριζόντια βλήμα μάζας m με αρχική ταχύτητα υ_0.



Το πυροβόλο, κατά την ανάκρουσή του, συμπιέζει οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k. Αν δεν υπάρχουν τριβές, να υπολογίσετε:

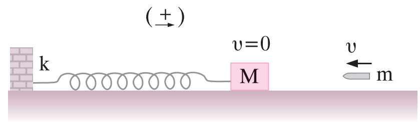
α. Το διάστημα s που κινήθηκε προς τα πίσω το πυροβόλο μετά την έκρηξη.

β. Πόσο χρόνο διήρκεσε η προς τα πίσω κίνηση του πυροβόλου.

γ. Αν μεταξύ του πυροβόλου και του οριζόντιου επιπέδου υπάρχουν τριβές με συντελεστή τριβής μ, να υπολογίσετε το ολικό διάστημα $s_{o\lambda}$ που θα διανύσει το πυροβόλο, μετά την ανάκρουση, μέχρι να σταματήσει. (Θεωρήστε ότι στην αρχή και στο τέλος του φαινομένου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος.)

Δίνεται η g.

7.108 Το σώμα μάζας M = 4 kg είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο του οριζόντιου ελατηρίου του σχήματος.



Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο ακλόνητα. Ένα βλήμα μάζας m = 1 kg, που κινείται κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου, συγκρούεται πλαστικά και μετωπικά με το σώμα μάζας M. Το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ. και διέρχεται από δύο σημεία με απομακρύνσεις $x_1 = -0{,}1$ m και $x_2 = -0{,}2$ m, με ταχύτητες $\upsilon_1 = 10\ \frac{m}{s}$ και $\upsilon_2 = 2\ \frac{m}{s}$ αντίστοιχα. Τριβές δεν υπάρχουν. Να υπολογίσετε:

α. Την περίοδο T της Α.Α.Τ.

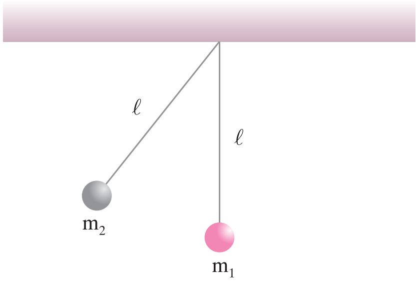
β. Την ολική ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος.

γ. Την κινητική ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος, όταν αυτό διέρχεται από τη θέση με απομάκρυνση $x_3 = -0{,}15$ m.

δ. Την ταχύτητα υ του βλήματος.

ε. Την εξίσωση $x = f(t)$ για την Α.Α.Τ. του συσσωματώματος.

7.109 Τα δύο εκκρεμή του σχήματος έχουν ίσες ελαστικές μάζες $m_1 = m_2 = m$ και ίσα μήκη $\ell_1 = \ell_2 = \ell$. Απομακρύνουμε το εκκρεμές m_2 κατά πολύ μικρή γωνία προς τα αριστερά, το αφήνουμε ελεύθερο, οπότε χτυπάει κεντρικά το άλλο, που ισορροπεί κατακόρυφα. Δίνεται η αρχική απομάκρυνσή του $x = -A$.



α. Να υπολογίσετε κάθε πόσο χρόνο θα συμβαίνει συνάντηση μεταξύ των δύο εκκρεμών. Η περίοδος T της ταλάντωσης του απλού εκκρεμούς δίνεται από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

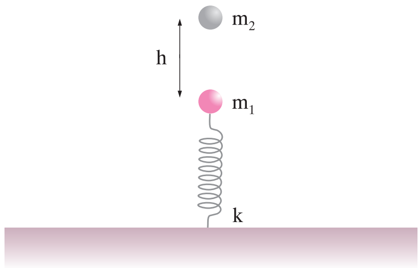
β. Να προσδιορίσετε τη σχέση $x = f(t)$ για καθένα από τα δύο εκκρεμή, θεωρώντας χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερο το εκκρεμές m_2.

γ. Να παραστήσετε γραφικά τις δύο συναρτήσεις $x = f(t)$ για τον χρόνο μιας περιόδου.

δ. Τι είδους κίνηση κάνει το καθένα από τα εκκρεμή;

Δίνεται η g. Η χρονική διάρκεια των κρούσεων θεωρείται αμελητέα.

7.110 Το ένα άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 200\ \frac{N}{m}$ στερεώνεται σε οριζόντιο επίπεδο και στο άλλο άκρο του στερεώνεται σώμα μάζας $m_1 = 2$ kg. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Από ύψος $h = 5$ m πάνω από τη μάζα m_1 αφήνεται να πέσει σώμα μάζας $m_2 = 1$ kg. Οι δύο μάζες συγκρούονται ελαστικά και μετωπικά.



α. Πόσο χρόνο θα διαρκέσει η προς τα πάνω κίνηση της μάζας m_2 μετά την κρούση;

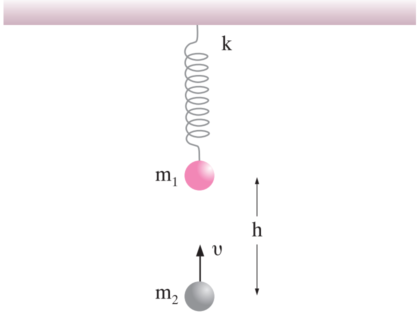
β. Να υπολογίσετε το πλάτος A της Α.Α.Τ. που εκτελεί η μάζα m_1 μετά την κρούση.

γ. Να προσδιορίσετε γι' αυτή την Α.Α.Τ. τις εξισώσεις $x = f(t)$ και $\alpha = f(t)$.

δ. Ύστερα από πόσο χρόνο από τη στιγμή που ξεκίνησε η Α.Α.Τ. θα είναι $x = +\frac{A}{2}$ για πρώτη φορά;

Το ελατήριο έχει πολύ μεγάλο μήκος και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

7.111 Το ελατήριο του σχήματος έχει σταθερά $k = 100\ \frac{N}{m}$, το ένα άκρο του στηρίζεται ακλόνητα στην οροφή, ενώ στο άλλο του άκρο έχει στερεωθεί σφαίρα με μάζα $m_1 = 2$ kg. Από απόσταση $h = 2{,}6$ m, κάτω από τη θέση που ισορροπεί αρχικά η μάζα m_1, εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω μάζα $m_2 = 2$ kg με αρχική ταχύτητα $\upsilon = 14\ \frac{m}{s}$. Η μάζα m_2 ανεβαίνοντας συγκρούεται πλαστικά και μετωπικά με τη μάζα m_1. Δίνεται ότι $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

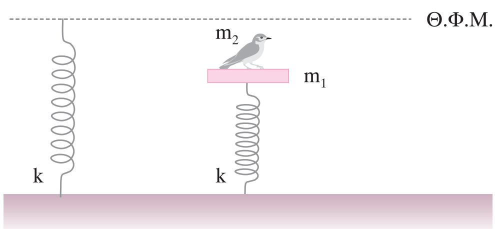


α. Να υπολογίσετε το πλάτος A της Α.Α.Τ. που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα των μαζών m_1 και m_2 μετά την κρούση.

β. Σε πόσο χρόνο το ταλαντευόμενο συσσωμάτωμα θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας (κέντρο) της ταλάντωσής του;

γ. Να προσδιορίσετε τις εξισώσεις $x = f(t)$ και $\upsilon = f(t)$ γι' αυτή την Α.Α.Τ.

7.112 Ελατήριο σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$ είναι στερεωμένο κατακόρυφα. Στο πάνω άκρο του, που είναι ελεύθερο, είναι προσαρμοσμένος ένας δίσκος μάζας $m_1 = 0{,}3$ kg.



Πάνω στον δίσκο πάει και κάθεται ένα πουλί με μάζα $m_2 = 0{,}5$ kg. Ενώ το σύστημα έχει ισορροπήσει, ένας θόρυβος τρομάζει το πουλί, που αναπηδά κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $\upsilon_2 = 3\ \frac{m}{s}$.

Να υπολογίσετε:

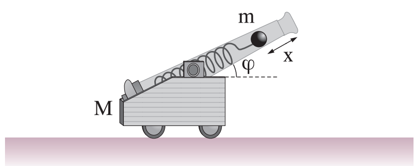
α. Το πλάτος της Α.Α.Τ. που θα εκτελέσει το σύστημα ελατήριο-μάζα m_1 μετά την αναπήδηση του πουλιού.

β. Να γράψετε τις εξισώσεις απομάκρυνσης-χρόνου $x = f(t)$ και ταχύτητας-χρόνου $\upsilon = f(t)$ γι' αυτή την Α.Α.Τ.

γ. Τον χρόνο από την έναρξη της Α.Α.Τ. στον οποίο ο δίσκος μάζας m_1 θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

δ. Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας $\frac{dK}{dt}$ του δίσκου τότε.

7.113 Το σύστημα που φαίνεται στο σχήμα είναι ένα παιδικό κανόνι. Έχει μάζα $M = 0{,}9$ kg και το βλήμα που εκτοξεύει έχει μάζα $m = 0{,}1$ kg.



Η γωνία $\varphi = 30°$ και το ελατήριο αμελητέας μάζας μέσα στην κάννη είναι συμπιεσμένο κατά $x = 0{,}2$ m, που είναι και η απόσταση μέχρι την έξοδο της κάννης. Ελευθερώνουμε το βλήμα με τηλεχειριστήριο, οπότε το σύστημα, μετά την εκτόξευση του βλήματος, κινείται προς τα πίσω με ταχύτητα μέτρου $V = 1\ \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου. (Τριβές δεν υπάρχουν).

«Πνεύμα» Πανελληνίων

1ο-2ο ΘΕΜΑ

7.114 Σφαίρα μάζας m κινούμενη με ταχύτητα μέτρου $υ_1$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα ίσης μάζας. Να βρείτε τις σχέσεις που δίνουν τις ταχύτητες των δύο σφαιρών, μετά την κρούση, με εφαρμογή των αρχών που διέπουν την ελαστική κρούση.
Εξετάσεις 2002 (Ημερήσιου Λυκείου)

7.115 Σε κάθε κρούση ισχύει:
α. Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας.
β. Η αρχή διατήρησης της ορμής.
γ. Η αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου.
δ. Όλες οι παραπάνω αρχές.
Εξετάσεις 2002 (Εσπερινού Λυκείου)

7.116 Κατά την κεντρική ανελαστική κρούση δύο σφαιρών (οι οποίες κατά τη διάρκεια της κρούσης αποτελούν μονωμένο σύστημα) διατηρείται σταθερή:
α. Η κινητική ενέργεια κάθε σφαίρας.
β. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών.
γ. Η ορμή κάθε σφαίρας.
δ. Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών.
Εξετάσεις 2002 (Αποδήμων)

7.117 Σφαίρα Α που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με άλλη όμοια αλλά ακίνητη σφαίρα Β που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο. Να αποδείξετε ότι η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίση με το μισό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α πριν από την κρούση.
Εξετάσεις 2003 (Ημερήσιου Λυκείου)

7.118 Σώμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $υ_1$. Το σώμα συγκρούεται με κατακόρυφο τοίχο και ανακλάται με ταχύτητα μέτρου $υ_2$ όπου $υ_2 < υ_1$. Η κρούση είναι:
α. Ελαστική.
β. Ανελαστική.
Ποια από τις δύο περιπτώσεις είναι η σωστή;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
Εξετάσεις 2003 (Αποδήμων)

7.119 Μια μικρή σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα μάζας m_2. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με αντίθετες ταχύτητες ίσων μέτρων. Ο λόγος των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$ των δύο σφαιρών είναι:
α. 1.
β. $\frac{1}{3}$.

γ. $\frac{1}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2004 (Ημερήσιου Λυκείου)

7.120 Σφαίρα Α μάζας m_A συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη ακίνητη σφαίρα Β μάζας m_B. Το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που έχει μεταφερθεί από την Α στη Β μετά την κρούση γίνεται μέγιστο όταν:

α. $m_A = m_B$.

β. $m_A < m_B$.

γ. $m_A > m_B$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2004 (Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

7.121 Σε μετωπική κρούση δύο σωμάτων Α και Β που έχουν μάζες m και 2m αντίστοιχα, δημιουργείται συσσωμάτωμα που παραμένει ακίνητο στο σημείο της σύγκρουσης. Ο λόγος των μέτρων των ορμών των δύο σωμάτων πριν από την κρούση είναι:

α. $\frac{1}{2}$.

β. 2.

γ. 1.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Εξετάσεις 2004 (Αποδήμων)

7.122 Μια κρούση λέγεται πλάγια όταν:

α. Δεν ικανοποιεί την αρχή διατήρησης της ορμής.

β. Δεν ικανοποιεί την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

γ. Οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση έχουν τυχαία διεύθυνση.

δ. Οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση είναι παράλληλες.

Εξετάσεις 2005 (Ημερήσιου Λυκείου)

7.123 Στην παρακάτω ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη Σωστό για τη σωστή πρόταση και τη λέξη Λάθος για τη λανθασμένη.

α. Στην περίπτωση των ηλεκτρικών ταλαντώσεων κύριος λόγος απόσβεσης είναι η ωμική αντίσταση του κυκλώματος.

β. Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση ο ρυθμός μείωσης του πλάτους μειώνεται, όταν αυξάνεται η σταθερά απόσβεσης b.

γ. Κατά τον συντονισμό η ενέργεια μεταφέρεται στο σύστημα κατά το βέλτιστο τρόπο, γι' αυτό και το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο.

δ. Ένας αθλητής καταδύσεων, καθώς περιστρέφεται στον αέρα, συμπτύσσει τα άκρα του. Με την τεχνική αυτή αυξάνεται η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.

ε. Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Εξετάσεις 2005 (Ημερήσιου Λυκείου)

7.124 Σώμα μάζας m, το οποίο έχει κινητική ενέργεια K, συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας 4m. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μένει ακίνητο. Η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι:

α. $\frac{5}{4}$ Κ.

β. Κ.

γ. $\frac{7}{4}$ Κ.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2005 (Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

7.125 Σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα διπλάσιας μάζας.

Α. Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση έχει μέτρο:

α. 2υ.

β. $\frac{υ}{2}$.

γ. $\frac{υ}{3}$.

Β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2005 (Εσπερινού Λυκείου)

7.126 Σφαίρα $Σ_1$ κινούμενη προς ακίνητη σφαίρα $Σ_2$, ίσης μάζας με τη $Σ_1$, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με αυτήν. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της $Σ_1$ που μεταβιβάζεται στη $Σ_2$ κατά την κρούση είναι:

α. 50%.

β. 100%.

γ. 75%.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2006 (Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

7.127 Σε μια κρούση δύο σφαιρών:

α. το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σφαιρών πριν από την κρούση είναι πάντα ίσο με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών τους μετά την κρούση.

β. οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των σφαιρών πριν και μετά από την κρούση βρίσκονται πάντα στην ίδια ευθεία.

γ. το άθροισμα των ορμών των σφαιρών πριν από την κρούση είναι πάντα ίσο με το άθροισμα των ορμών τους μετά από την κρούση.

δ. το άθροισμα των ταχυτήτων των σφαιρών πριν από την κρούση είναι πάντα ίσο με το άθροισμα των ταχυτήτων τους μετά από την κρούση.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση.

Εξετάσεις 2006 (Εσπερινού Λυκείου)

7.128 Δύο μικρά σώματα με μάζες m_1 και m_2 συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν $ΔK_1$ είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 και $ΔK_2$ είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_2 λόγω της ελαστικής κρούσης, τότε ισχύει:

α. $\frac{ΔK_1}{ΔK_2} = -1$.

β. $\frac{ΔK_1}{ΔK_2} = 1$.

γ. $\frac{ΔK_1}{ΔK_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή σχέση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Εξετάσεις 2006 (Αποδήμων)

7.129 Σε μια ελαστική κρούση δε διατηρείται:

α. η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος.

β. η ορμή του συστήματος.

γ. η μηχανική ενέργεια του συστήματος.

δ. η κινητική ενέργεια κάθε σώματος.

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

Εξετάσεις 2007 (Ημερήσιου Λυκείου)

7.130 Ένα αυτοκίνητο Α μάζας Μ βρίσκεται σταματημένο σε κόκκινο φανάρι. Ένα άλλο αυτοκίνητο Β μάζας m, ο οδηγός του οποίου είναι απρόσεκτος, πέφτει στο πίσω μέρος του αυτοκινήτου Α. Η κρούση θεωρείται κεντρική και πλαστική. Αν αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει το $\frac{1}{3}$ της κινητικής ενέργειας που είχε αμέσως πριν την κρούση, τότε θα ισχύει:

α. $\frac{m}{M} = \frac{1}{6}$.

β. $\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$.

γ. $\frac{m}{M} = \frac{1}{3}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2007 (Ημερήσιου Λυκείου)

7.131 Σώμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου υ. Στην πορεία συγκρούεται μετωπικά με άλλο σώμα και επιστρέφει κινούμενο με ταχύτητα μέτρου 2υ. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του είναι:

α. 0.

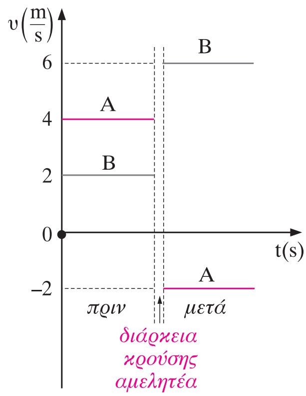
β. mυ.

γ. 2mυ.

δ. 3mυ.

Εξετάσεις 2007
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

7.132 Δύο σώματα Α και Β με μάζες m_A και m_B, αντίστοιχα, συγκρούονται μετωπικά.



Οι ταχύτητές τους πριν και μετά την κρούση σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνονται στο παραπάνω διάγραμμα. Ο λόγος των μαζών m_A και m_B είναι:

α. $\frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{5}$.

β. $\frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{2}$.

γ. $\frac{m_A}{m_B} = \frac{2}{3}$.

δ. $\frac{m_A}{m_B} = \frac{3}{2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2007
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

7.133 Σφαίρα μάζας m_1 προσπίπτει με ταχύτητα $υ_1$ σε ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 με την οποία συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση η σφαίρα μάζας m_1 γυρίζει πίσω με ταχύτητα μέτρου ίσου με το $\frac{1}{5}$ της αρχικής της τιμής. Για τον λόγο των μαζών ισχύει:

α. $\frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{2}$.

β. $\frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{3}$.

γ. $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2007 (Εσπερινού Λυκείου)

7.134 Μια ανελαστική κρούση μεταξύ δυο σωμάτων χαρακτηρίζεται πλαστική όταν:

α. η ορμή του συστήματος δε διατηρείται.

β. τα σώματα μετά την κρούση κινούνται χωριστά.

γ. η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

δ. οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων, δηλαδή στη δημιουργία συσσωματώματος.

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

Εξετάσεις 2007 (Αποδήμων)

7.135 Δύο σώματα Α και Β, με μάζες 3m και m αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Δίνουμε στο σώμα Β αρχική ταχύτητα υ έτσι ώστε να συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα Α. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος Β μετά την κρούση;

α. $-\frac{\upsilon}{2}$.

β. $\frac{\upsilon}{2}$.

γ. $\frac{\upsilon}{4}$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Εξετάσεις 2007 (Αποδήμων)

7.136 Η κρούση στην οποία διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων ονομάζεται:

α. Ελαστική.

β. Ανελαστική.

γ. Πλαστική.

δ. Έκκεντρη.

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

Εξετάσεις 2008 (Ημερήσιου Λυκείου)

7.137 Σε μια ελαστική κρούση δύο σωμάτων:

α. ένα μέρος της κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική.

β. η ορμή κάθε σώματος παραμένει σταθερή.

γ. η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

δ. η κινητική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται.

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

Εξετάσεις 2008 (Εσπερινού Λυκείου)

7.138 Σε κάθε κρούση:

α. η συνολική ορμή του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων διατηρείται.

β. η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

γ. η μηχανική ενέργεια κάθε σώματος παραμένει σταθερή.

δ. η ορμή κάθε σώματος διατηρείται σταθερή.

Ποια είναι η σωστή απάντηση;

Εξετάσεις 2008
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

7.139 Ακίνητο σώμα Σ μάζας M βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\upsilon = 100\ \frac{m}{s}$ σε διεύθυνση που διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος Σ και σφηνώνεται σε αυτό.
Αν η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι $V = 2\ \frac{m}{s}$, τότε ο λόγος των μαζών $\frac{M}{m}$ είναι ίσος με:

α. 50.

β. $\frac{1}{25}$.

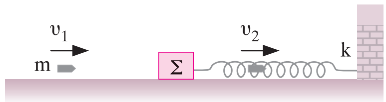
γ. 49.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Εξετάσεις 2008 (Αποδήμων)

3ο-4ο ΘΕΜΑ

7.140 Σώμα Σ μάζας M = 0,1 kg είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου και ηρεμεί. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι σταθερά συνδεδεμένο με κατακόρυφο τοίχο. Μεταξύ σώματος και οριζόντιου δαπέδου δεν εμφανίζονται τριβές.



Βλήμα μάζας m = 0,001 kg κινούμενο κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα $\upsilon_1 = 200\ \frac{m}{s}$ διαπερνά ακαριαία το σώμα Σ και κατά την έξοδό του η ταχύτητά του γίνεται $\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{2}$.

Να βρεθούν:

α. Η ταχύτητα V με την οποία θα κινηθεί το σώμα Σ αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος.

β. Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου.

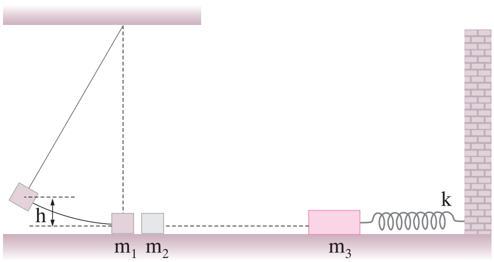
γ. Η περίοδος με την οποία ταλαντώνεται το σώμα Σ.

δ. Η ελάττωση της μηχανικής ενέργειας κατά την παραπάνω κρούση.

Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου $k = 1.000\ \frac{N}{m}$.

Εξετάσεις 2004 (Εσπερινού Λυκείου)
(4ο θέμα)

7.141 Σώμα μάζας $m_1 = 0{,}1$ kg που είναι προσδεδεμένο στο άκρο τεντωμένου νήματος αφήνεται ελεύθερο από ύψος h, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το νήμα βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 2\ \frac{m}{s}$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2, όπου $m_2 = m_1$. Το σώμα μάζας m_2, μετά τη σύγκρουση, κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας $m_3 = 0{,}7$ kg. Το σώμα μάζας m_3 είναι προσδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 20\ \frac{N}{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Τη στιγμή της σύγκρουσης, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και ο άξονάς του συμπίπτει με τη διεύθυνση της κίνησης του σώματος μάζας m_2. Να θεωρήσετε αμελητέα τη χρονική διάρκεια των κρούσεων και τη μάζα του νήματος.



Να υπολογίσετε:

α. Το ύψος h από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας m_1.

β. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2, με την οποία προσκρούει στο σώμα μάζας m_3.

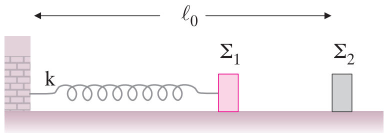
γ. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα που προέκυψε από την πλαστική κρούση.

δ. Το μέτρο της ορμής του συσσωματώματος μετά από χρόνο $t = \frac{\pi}{15}$ s από τη χρονική στιγμή που αυτό άρχισε να κινείται.

Δίνονται $g = 10\ \frac{m}{s^2}$, $συν\frac{\pi}{3} = 0{,}5$.

Εξετάσεις 2003
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)
(4ο θέμα)

7.142 Τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, αμελητέων διαστάσεων, με μάζες $m_1 = 1$ kg και $m_2 = 3$ kg αντίστοιχα, είναι τοποθετημένα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα $Σ_1$ είναι δεμένο στη μία άκρη του ελατηρίου σταθεράς $k = 100\ \frac{N}{m}$. Η άλλη άκρη του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένη.



Το ελατήριο με τη βοήθεια νήματος είναι συσπειρωμένο κατά 0,2 m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το $Σ_2$ ισορροπεί στο οριζόντιο επίπεδο στη θέση που αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος ℓ_0 του ελατηρίου. Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα $Σ_1$ κινούμενο προς τα δεξιά συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα $Σ_2$. Θεωρώντας ως αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή της κρούσης και ως θετική φορά κίνησης την προς τα δεξιά, να υπολογίσετε:

α. Την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$ λίγο πριν την κρούση του με το σώμα $Σ_2$.

β. Τις ταχύτητες των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ αμέσως μετά την κρούση.

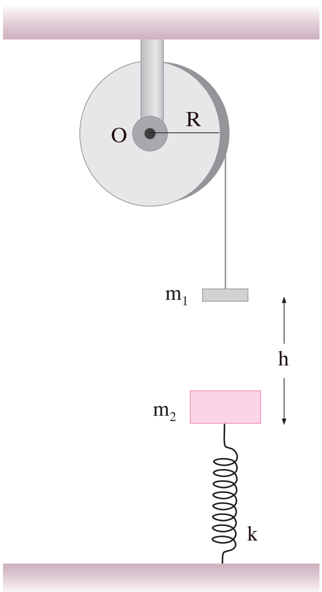
γ. Την απομάκρυνση του σώματος $Σ_1$, μετά την κρούση, σε συνάρτηση με τον χρόνο.

δ. Την απόσταση μεταξύ των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ όταν το σώμα $Σ_1$ ακινητοποιείται στιγμιαία για δεύτερη φορά.

Δεχτείτε την κίνηση του σώματος $Σ_1$ τόσο πριν όσο και μετά την κρούση ως απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς k.
Δίνεται: $π = 3{,}14$.

Εξετάσεις 2006 (Ημερήσιου Λυκείου)
(3ο θέμα)

7.143



Η ομογενής τροχαλία του σχήματος ακτίνας $R = 0{,}2$ m και μάζας $M = 3$ kg μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της O και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Σώμα $Σ_1$ μάζας $m_1 = 1$ kg είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο αβαρούς νήματος το οποίο είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια της τροχαλίας. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο. Κάτω από το σώμα $Σ_1$ και σε απόσταση h βρίσκεται σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 3$ kg το οποίο ισορροπεί στερεωμένο στη μια άκρη κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200\ \dfrac{N}{m}$ η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη στο έδαφος. Αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα τροχαλίας-σώματος $Σ_1$ να κινηθεί. Μετά από χρόνο $t = 1$ s το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα $Σ_2$, ενώ το νήμα κόβεται. Το συσσωμάτωμα εκτελεί αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση στην κατακόρυφη διεύθυνση. Να υπολογίσετε:

α. Το μέτρο της επιτάχυνσης με την οποία κινείται το σώμα $Σ_1$ μέχρι την κρούση.

β. Την κινητική ενέργεια της τροχαλίας μετά την κρούση.

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί το συσσωμάτωμα.

δ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος, τη στιγμή που απέχει από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης απόσταση $x = 0{,}1$ m.

Να θεωρήσετε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι της τροχαλίας.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της: $I = \dfrac{1}{2}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$.

Εξετάσεις 2004
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)
(4ο θέμα)

7.144 Σώμα μάζας $m_1 = 3$ kg είναι στερεωμένο στην άκρη οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\ \frac{N}{m}$, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο με περίοδο Τ και πλάτος ταλάντωσης $A = 0{,}4$ m. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση της μέγιστης θετικής απομάκρυνσης.

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{6}$, ένα σώμα μάζας $m_2 = 1$ kg που κινείται στην ίδια κατεύθυνση με το σώμα μάζας m_1 και έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_2 = 8\ \frac{m}{s}$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με αυτό. Να υπολογίσετε:

α. την αρχική φάση της ταλάντωσης του σώματος μάζας m_1.

β. τη θέση στην οποία βρίσκεται το σώμα μάζας m_1 τη στιγμή της σύγκρουσης.

γ. την περίοδο ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ. την ενέργεια της ταλάντωσης μετά την κρούση.

Δίνονται: $ημ\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $συν\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Εξετάσεις 2003 (Αποδήμων)
(4ο θέμα)

7.145 Σώμα $Σ_1$ με μάζα $m_1 = 1$ kg και ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο και κατά μήκος του άξονα x′x χωρίς τριβές, όπως στο σχήμα.

Το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται με σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 3$ kg που αρχικά είναι ακίνητο. Η κρούση οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων.

1. Να δικαιολογήσετε γιατί το συσσωμάτωμα που προκύπτει από τη συγκόλληση θα συνεχίσει να κινείται κατά μήκος του άξονα x′x.

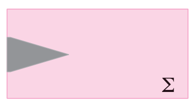
2. Να εξηγήσετε γιατί η θερμοκρασία του συσσωματώματος θα είναι μεγαλύτερη από την αρχική κοινή θερμοκρασία των δύο σωμάτων.

3. Να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{K_2}{K_1}$, όπου K_2 η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος και K_1 η κινητική ενέργεια του σώματος $Σ_1$ πριν την κρούση.

4. Να δικαιολογήσετε αν ο λόγος $\frac{K_2}{K_1}$ μεταβάλλεται ή όχι στην περίπτωση που το σώμα μάζας m_1 εκινείτο με ταχύτητα διπλάσια της υ_1.

Εξετάσεις 2004
(Επαναληπτικές Εσπερινού Λυκείου)
(4ο θέμα)

7.146



Έστω σώμα (Σ) μάζας $M = 1$ kg και κωνικό βλήμα (β) μάζας $m = 0{,}2$ kg. Για να σφηνώσουμε με τα χέρια μας ολόκληρο το βλήμα στο σταθερό σώμα (Σ), όπως φαίνεται στο σχήμα, πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια 100 J. Έστω τώρα ότι το σώμα (Σ) που είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο πυροβολείται με το βλήμα (β). Το βλήμα αυτό κινούμενο οριζόντια με κινητική ενέργεια K προσκρούει στο σώμα (Σ) και ακολουθεί πλαστική κρούση.

α. Για $K = 100$ J θα μπορούσε το βλήμα να σφηνωθεί ολόκληρο στο σώμα (Σ); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

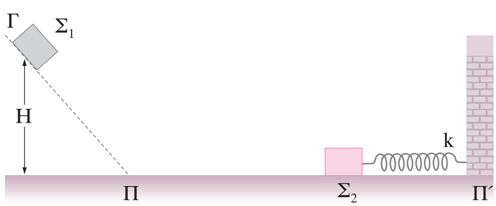
β. Ποια είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια K που πρέπει να έχει το βλήμα, ώστε να σφηνωθεί ολόκληρο στο σώμα (Σ);

γ. Για ποια τιμή του λόγου $\frac{m}{M}$ το βλήμα με κινητική ενέργεια $K = 100$ J σφηνώνεται ολόκληρο στο (Σ);

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2005 (Ημερήσιου Λυκείου) (4ο θέμα)

7.147



Το σώμα $Σ_2$ του σχήματος που έχει μάζα $m_2 = 2$ kg είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο. Το σώμα $Σ_2$ ταλαντώνεται οριζόντια πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο ΠΠ′ με πλάτος $A = 0{,}1$ m και περίοδο $T = \frac{\pi}{5}$ s.

Α. Να υπολογίσετε:

1. Την τιμή της σταθεράς k του ελατηρίου.

2. Τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σώματος $Σ_2$.

Β. Το σώμα $Σ_1$ του σχήματος με μάζα $m_1 = 2$ kg αφήνεται ελεύθερο να ολισθήσει πάνω στο λείο πλάγιο επίπεδο, από τη θέση Γ. Η κατακόρυφη απόσταση της θέσης Γ από το οριζόντιο επίπεδο είναι $H = 1{,}8$ m. Το σώμα $Σ_1$, αφού φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, συνεχίζει να κινείται, χωρίς να αλλάξει μέτρο ταχύτητας, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο ΠΠ′. Το $Σ_1$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το σώμα $Σ_2$ τη στιγμή που το $Σ_2$ έχει τη μέγιστη ταχύτητά του και κινείται αντίθετα από το $Σ_1$.

1. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου μετά από αυτήν την κρούση.

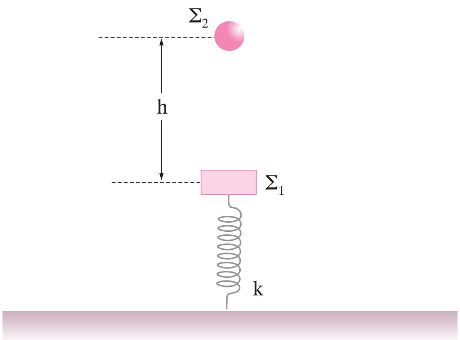
2. Να δείξετε πώς στη συνέχεια το σώμα $Σ_2$ θα προλάβει το σώμα $Σ_1$ και θα συγκρουστούν πάλι πριν το σώμα $Σ_1$ φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου.

Η απόσταση από τη βάση του πλάγιου επιπέδου μέχρι το κέντρο της ταλάντωσης του $Σ_2$ είναι αρκετά μεγάλη. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

Δίνεται: $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$.

Εξετάσεις 2005 (Αποδήμων) (4ο θέμα)

7.148 Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k = 100\ \dfrac{N}{m}$ έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο.



Στο επάνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα $Σ_1$ με μάζα $M = 4$ kg που ισορροπεί. Δεύτερο σώμα $Σ_2$ με μάζα $m = 1$ kg βρίσκεται πάνω από το πρώτο σώμα $Σ_1$ σε άγνωστο ύψος h, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Μετακινούμε το σώμα $Σ_1$ προς τα κάτω κατά $d = \dfrac{\pi}{20}$ m και το αφήνουμε ελεύθερο, ενώ την ίδια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο και το δεύτερο σώμα $Σ_2$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή του ύψους h ώστε τα δύο σώματα να συναντηθούν στη θέση ισορροπίας του σώματος $Σ_1$.

β. Αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική, να δείξετε ότι το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση ακινητοποιείται στιγμιαία.

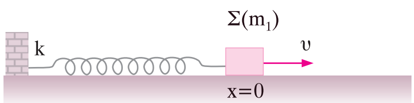
γ. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο συσσωμάτωμα.

Δίνεται $g = 10\ \dfrac{m}{s^2}$. Να θεωρήσετε ότι $\pi^2 \simeq 10$.

Εξετάσεις 2006 (Αποδήμων) (4ο θέμα)

7.149 Ένα σώμα Σ μάζας m_1 είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σύστημα ελατήριο-μάζα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε λείο οριζόντιο επίπεδο και τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα Σ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο κατά τη θετική φορά.



Η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του σώματος Σ δίνεται από τη σχέση $x = 0{,}1ημ10t$ (S.I.). Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E = 6$ J. Τη χρονική στιγμή $t = \dfrac{\pi}{10}$ s στο σώμα Σ σφηνώνεται βλήμα μάζας $m_2 = \dfrac{m_1}{2}$ κινούμενο με ταχύτητα $υ_2$ κατά την αρνητική φορά. Το συσσωμάτωμα που προκύπτει μετά την κρούση εκτελεί νέα απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A' = 0{,}1\sqrt{6}$ m.

α. Να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου και τη μάζα m_1 του σώματος Σ.

β. Να υπολογίσετε την ολική ενέργεια E' και τη γωνιακή συχνότητα ω' της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ_2 του βλήματος πριν από την κρούση.

Εξετάσεις 2007
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)
(4ο θέμα)

7.150 Στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου είναι στερεωμένο σώμα μάζας $m_1 = 1{,}44$ kg, ενώ το άλλο του άκρο είναι ακλόνητο. Πάνω στο σώμα κάθεται ένα πουλί μάζας m_2 και το σύστημα ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του συστήματος είναι $0{,}4\pi\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και η δυναμική του ενέργεια μηδενίζεται κάθε 0,5 s. Όταν το σύστημα διέρχεται από την ακραία θέση ταλάντωσης, το πουλί πετά κατακόρυφα και το νέο σύστημα ταλαντώνεται με κυκλική συχνότητα $2{,}5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Να βρείτε:

Α. Την περίοδο και το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης.

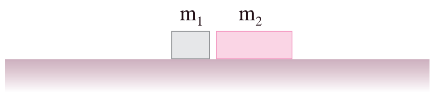
Β. Τη σταθερά του ελατηρίου.

Γ. Τη μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης.

Δ. Τη μάζα του πουλιού.

Εξετάσεις 2007 (Εσπερινού Λυκείου)
(3ο θέμα)

7.151 Σώμα μάζας m_1 κινούμενο σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2.



Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας m_1 κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = 9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

α. Να προσδιορίσετε τον λόγο των μαζών $\frac{m_1}{m_2}$.

β. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

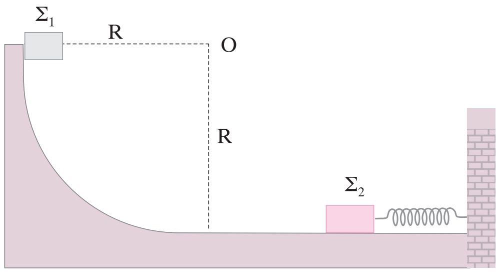
γ. Να βρεθεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 λόγω της κρούσης.

δ. Να υπολογισθεί πόσο θα απέχουν τα σώματα όταν σταματήσουν.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του επιπέδου και κάθε σώματος είναι $\mu = 0{,}1$. Δίνεται $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Εξετάσεις 2008 (Ημερήσιου Λυκείου)
(4ο θέμα)

7.152 Το σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1$ kg του επόμενου σχήματος αφήνεται να ολισθήσει από την κορυφή λείου κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R = 1{,}8$ m.



Στη συνέχεια το σώμα $Σ_1$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 2$ kg. Το σώμα $Σ_2$ είναι στερεωμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k = 300 \ \frac{N}{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Τη στιγμή της κρούσης η ταχύτητα του $Σ_1$ είναι παράλληλη με τον άξονα του ελατηρίου. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Να βρείτε:

Α. Την ταχύτητα του σώματος $Σ_1$, στο οριζόντιο επίπεδο, πριν συγκρουστεί με το $Σ_2$.

Β. Την ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση.

Γ. Το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα, μέχρι η ταχύτητά του να μηδενιστεί για πρώτη φορά.

Δ. Το χρονικό διάστημα από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή που η ταχύτητα του συσσωματώματος μηδενίζεται για δεύτερη φορά.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \ \frac{m}{s^2}$.

Εξετάσεις 2008 (Εσπερινού Λυκείου) (4ο θέμα)

✓ Αφού το υποβρύχιο ανταναλκά τα ηχητικά κύματα, θα το θεωρήσουμε στη συνέχεια ως μια πηγή S′ εκπομπής ηχητικών κυμάτων συχνότητας $f'_S = f_A = 19.864{,}8$ Hz, που κινείται με ταχύτητα $\upsilon'_S = \upsilon_A = 10\ \frac{m}{s}$.

Αντίστοιχα το πλοίο που δέχεται τα ανακλώμενα από το υποβρύχιο κύματα θα το θεωρήσουμε ως έναν ακίνητο παρατηρητή A′ ($\upsilon'_A = 0$). Η συχνότητα f'_A που αντιλαμβάνεται το πλοίο δίνεται από τη γενική σχέση:

$$f'_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon'_A}{\upsilon \mp \upsilon'_S} f'_S$$

όπου $\upsilon'_A = 0$ και, αφού η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, στον παρονομαστή της σχέσης θα βάλουμε πρόσημο (+). Έτσι έχουμε:

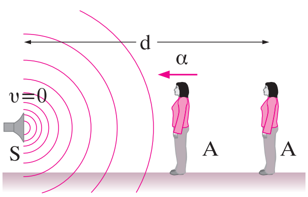
$$f'_A = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon'_S} f'_S \Rightarrow f'_A = \frac{1.480}{1.480 + 10} 19.864{,}8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_A = 19.731{,}5 \text{ Hz}$$

Η διαφορά των συχνοτήτων είναι:

$$\Delta f = f_S - f'_A \Rightarrow \Delta f = 268{,}5 \text{ Hz}$$

8.47 Το φαινόμενο Doppler στη μεταβαλλόμενη κίνηση.



Ένας παρατηρητής A βρίσκεται αρχικά ακίνητος σε απόσταση $d = 450$ m από ένα ακίνητο μεγάφωνο S που παράγει ήχο συχνότητας $f_S = 1.000$ Hz. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινάει κατευθυνόμενος ευθύγραμμα προς το μεγάφωνο με σταθερή επιτάχυνση.

α. **Αν η συχνότητα ήχου που ακούει τη στιγμή που φτάνει στο μεγάφωνο είναι $f_A = 1.088{,}2$ Hz, να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του.**

β. Να παραστήσετε γραφικά τη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής f_A σε συνάρτηση με τον χρόνο από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι να φτάσει στο μεγάφωνο.

Στην περιοχή επικρατεί άπνοια και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $\upsilon = 340\ \frac{m}{s}$.

λύση

α. Η συχνότητα του ήχου που ακούει ο κινούμενος παρατηρητής δίνεται από τη γενική σχέση:

$$f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_S} f_S$$

όπου $\upsilon_S = 0$ και, επειδή ο παρατηρητής πλησιάζει προς την πηγή, στον αριθμητή της σχέσης βάζουμε πρόσημο (+). Έτσι η γενική σχέση γίνεται:

$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_S \qquad \text{(A)}$$

Γνωρίζοντας ότι $f_S = 1.000$ Hz, $\upsilon = 340\ \frac{m}{s}$ και ότι τη στιγμή που φτάνει στο μεγάφωνο είναι $f_A = 1.088{,}2$ Hz, επιλύουμε την τελευταία σχέση ως προς υ_A και βρίσκουμε με τι ταχύτητα φτάνει ο παρατηρητής στο μεγάφωνο. Έχουμε:

$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_S \Rightarrow \upsilon_A = \frac{f_A - f_S}{f_S} \upsilon$$

και με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει ότι:

$$\upsilon_A = 30\ \frac{m}{s}$$

Ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση α χωρίς αρχική ταχύτητα. Η μετατόπισή του είναι $d = 450$ m και η τελική του ταχύτητα είναι $\upsilon_A = 30\ \frac{m}{s}$. Έστω t_A η χρονική διάρκεια της κίνησης αυτής.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν αυτή την κίνηση είναι:

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$\text{και} \quad \upsilon_A = \alpha t \qquad (2)$$

Αν $t = t_A$, τότε $x = d = 450$ m και $\upsilon_A = 30\ \frac{m}{s}$, οπότε οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

$$d = \frac{1}{2}\alpha t_A^2 \qquad (1')$$

$$\text{και} \quad \upsilon_A = \alpha t_A \qquad (2')$$

Απαλείφουμε τον χρόνο στις σχέσεις $(1')$ και $(2')$. Η σχέση $(2')$ γίνεται:

$$t_A = \frac{\upsilon_A}{\alpha}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $(1')$ έχουμε:

$$d = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\upsilon_A}{\alpha}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{\upsilon_A^2}{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\upsilon_A^2}{2d} \Rightarrow \alpha = 1\ \frac{m^2}{s}$$

β. Αντικαθιστούμε στη σχέση (A) όπου $\upsilon_A = \alpha t$ και έχουμε:

$$f_A = \frac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_S \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon + \alpha t}{\upsilon} f_S \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon} f_S + \frac{\alpha t}{\upsilon} f_S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_A = f_S + \frac{\alpha f_S}{\upsilon} t \quad \text{ή} \quad f_A = 1.000 + 2{,}94\ t \qquad \text{(S.I.)}$$

Γραφική παράσταση

Τη χρονική διάρκεια της κίνησης θα την υπολογίσουμε από τη σχέση $(2')$:

$$\upsilon_A = \alpha t_A \Rightarrow t_A = \frac{\upsilon_A}{\alpha} \Rightarrow t_A = 30\ \text{s}$$

Επομένως:

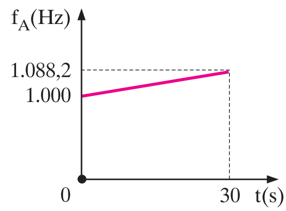
- Τη χρονική στιγμή t = 0 είναι:

$$f_A = 1.000 \text{ Hz}$$

- Τη χρονική στιγμή t = 30 s είναι:

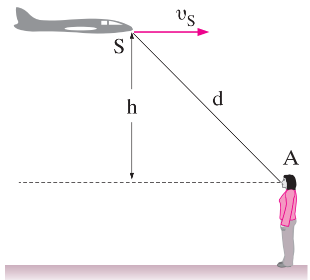
$$f_A = 1.088{,}2 \text{ Hz}$$

Έτσι προέκυψε η γραφική παράσταση που φαίνεται δίπλα.



8.48 Η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται σε διαφορετικές κατευθύνσεις.

Αεροπλάνο πετάει ευθύγραμμα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_S = 100\ \frac{m}{s}$ σε σταθερό ύψος h = 300 m πάνω από το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται τα αυτιά ενός ακίνητου παρατηρητή Α. Ο κινητήρας του αεροπλάνου εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S = 800 Hz. Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Α τη στιγμή ακριβώς που το αεροπλάνο βρίσκεται σε απόσταση d = 500 m από τα αυτιά του.
Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον ακίνητο αέρα (άπνοια) είναι $\upsilon = 340\ \frac{m}{s}$.



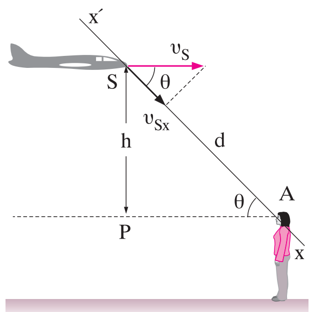
λύση

Σύμφωνα και με το σχόλιο που ακολουθεί:
Για να βρούμε τη συχνότητα f_A του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, θα βρούμε την προβολή υ_{Sx} της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_S$ στην ευθεία που ενώνει τον παρατηρητή με την πηγή τη στιγμή που εξετάζουμε.
Ισχύει ότι: $\upsilon_{Sx} = \upsilon_S$συνθ. Αλλά από το τρίγωνο APS έχουμε ότι:

$$\etaμθ = \frac{PS}{AS} = \frac{h}{d} \Rightarrow \etaμθ = 0{,}6$$

Επομένως:

$$συν^2θ + ημ^2θ = 1 \Rightarrow συνθ = \sqrt{1 - 0{,}6^2} \Rightarrow συνθ = 0{,}8$$



Έτσι, $\upsilon_{Sx} = \upsilon_S \sigma\upsilon\nu\theta = 100 \cdot 0{,}8 \Rightarrow \upsilon_{Sx} = 80\ \frac{m}{s}$.

Η πηγή του ήχου πλησιάζει προς τον ακίνητο παρατηρητή Α με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{Sx} = 80\ \frac{m}{s}$. Ο ήχος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Α θα έχει συχνότητα:

$$f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{Sx}} f_S = \frac{340}{340 - 80} 800 \Rightarrow f_A = 1.046{,}2\ Hz$$

Η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται σε διαφορετικές διευθύνσεις.

Όταν οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_S$ και $\vec{\upsilon}_A$ της πηγής και του παρατηρητή αντίστοιχα δε βρίσκονται στην ευθεία έστω $x'x$ πηγής - παρατηρητή, για να βρούμε τη συχνότητα f_A που ακούει ο παρατηρητής εργαζόμαστε ως εξής:

- *Παίρνουμε τις προβολές $\vec{\upsilon}_{Sx}$ και $\vec{\upsilon}_{Ax}$ των $\vec{\upsilon}_S$ και $\vec{\upsilon}_A$ αντίστοιχα πάνω στην ευθεία $x'x$ πηγής - παρατηρητή τη στιγμή που εξετάζουμε.*
- *Εφαρμόζουμε* ***κατάλληλα*** *τον γενικό τύπο:*

$$f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_{Ax}}{\upsilon \mp \upsilon_{Sx}} f_S$$

και έτσι υπολογίζουμε τη συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

Λύσε και άλλες ασκήσεις σε δεύτερο επίπεδο

8.49 Περιπολικό κυνηγάει μοτοσικλετιστή έχοντας ενεργοποιημένη τη σειρήνα του που εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_S = 1.000$ Hz. Ο μοτοσικλετιστής κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_A = 20\ \frac{m}{s}$ και πίσω του είναι το περιπολικό που κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_S = 30\ \frac{m}{s}$.

Τι συχνότητα ήχου ακούει ο μοτοσικλετιστής:

α. Όσο το περιπολικό βρίσκεται πίσω του;

β. Όταν τον προσπεράσει και για κάποιο χρονικό διάστημα το περιπολικό μπροστά και η μοτοσικλέτα πίσω κινούνται και τα δύο με τις ταχύτητες που είχαν πριν;

Στην περιοχή επικρατεί άπνοια και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $υ = 340\ \frac{m}{s}$.

8.50 Περιπολικό κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_S = 40\ \frac{m}{s}$. Μπροστά από το περιπολικό και προς την ίδια κατεύθυνση κινείται μια μοτοσικλέτα με σταθερή ταχύτητα $\vec{υ}_A$.

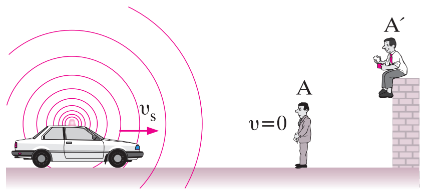
Κάποια στιγμή ($t = 0$) που το περιπολικό απέχει από τον μοτοσικλετιστή απόσταση $d = 300$ m ενεργοποιεί τη σειρήνα του εκπέμποντας ήχο συχνότητας $f_S = 1.000$ Hz. Ο μοτοσικλετιστής τον ήχο αυτό τον αντιλαμβάνεται με συχνότητα $f_A = 1.100$ Hz.

α. Αν περιπολικό και μοτοσικλέτα διατηρήσουν σταθερές τις ταχύτητές τους, θα φτάσει κάποια στιγμή το περιπολικό τη μοτοσικλέτα;

β. Αν ναι, σε πόσο χρόνο από τότε που ενεργοποιήθηκε η σειρήνα του περιπολικού;

Στην περιοχή επικρατεί άπνοια και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $υ = 340\ \frac{m}{s}$.

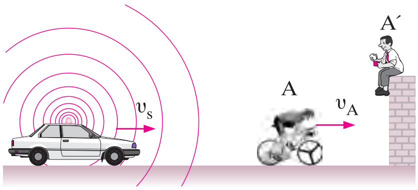
8.51 Ένα περιπολικό πλησιάζει προς ένα ψηλό τοίχο με ταχύτητα $υ_S = 30\ \frac{m}{s}$.



Το περιπολικό έχει τη σειρήνα του σε λειτουργία, η οποία εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_S = 800$ Hz. Να υπολογίσετε τις συχνότητες που αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής A όσο βρίσκεται ανάμεσα στο περιπολικό και στον τοίχο.

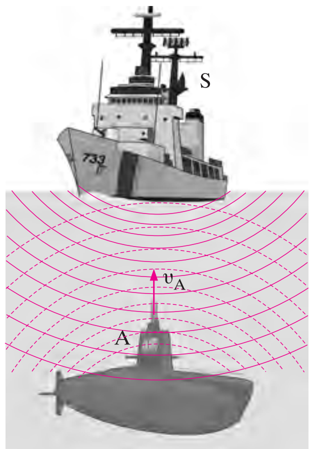
Στην περιοχή επικρατεί άπνοια και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $\upsilon = 340\ \frac{m}{s}$.

8.52 Ένα περιπολικό πλησιάζει προς έναν ψηλό τοίχο με ταχύτητα $\upsilon_S = 20\ \frac{m}{s}$.



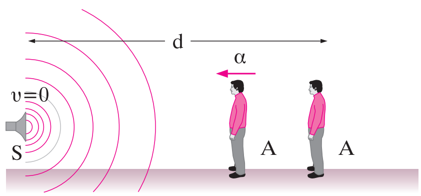
Το περιπολικό έχει τη σειρήνα του σε λειτουργία, η οποία εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_S = 1.000$ Hz. Ένας ποδηλάτης Α κινείται ανάμεσα στο περιπολικό και στον τοίχο ομόρροπα προς το περιπολικό με ταχύτητα $\upsilon_A = 10\ \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε τις συχνότητες που αντιλαμβάνεται ο ποδηλάτης Α όσο βρίσκεται ανάμεσα στο περιπολικό και στον τοίχο. Στην περιοχή επικρατεί άπνοια και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $\upsilon = 340\ \frac{m}{s}$.

8.53 Το σύστημα ηχοεντοπισμού (σόναρ) ενός αντιτορπιλικού S που είναι ακίνητο στη θάλασσα εκπέμπει ηχητικά κύματα συχνότητας $f_S = 10$ kHz. Τα κύματα αυτά ανακλώνται σε ένα υποβρύχιο Α που πλησιάζει με ταχύτητα $\upsilon_A = 20\ \frac{m}{s}$ προς το αντιτορπιλικό. Να υπολογίσετε πόσο διαφέρουν σε συχνότητα το εκπεμπόμενο από το σόναρ κύμα και το κύμα που επιστρέφει στο πλοίο μετά την ανάκλασή του στο υποβρύχιο.



Δίνεται ότι το νερό της θάλασσας είναι ακίνητο και η ταχύτητα του ήχου στο νερό $\upsilon = 1.480\ \frac{m}{s}$.

8.54 Ένας παρατηρητής Α βρίσκεται αρχικά ακίνητος σε απόσταση $d = 289$ m από ένα ακίνητο μεγάφωνο S που παράγει ήχο συχνότητας $f_S = 800$ Hz.



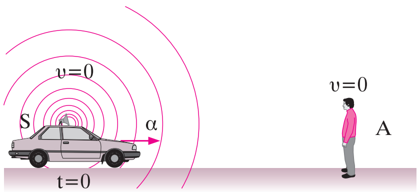
Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ξεκινάει κατευθυνόμενος ευθύγραμμα προς το μεγάφωνο με σταθερή επιτάχυνση.

α. Αν η συχνότητα του ήχου που ακούει τη στιγμή που φτάνει στο μεγάφωνο είναι $f_A = 880$ Hz, να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του.

β. Να παραστήσετε γραφικά τη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής σε συνάρτηση με τον χρόνο από τη στιγμή $t = 0$ μέχρι να φτάσει στο μεγάφωνο.

Στην περιοχή επικρατεί άπνοια και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $\upsilon = 340\ \dfrac{m}{s}$.

8.55 Αυτοκίνητο φέρει μεγάφωνο που εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_S = 1.000$ Hz. Το αυτοκίνητο βρίσκεται αρχικά ακίνητο σε μεγάλη απόσταση από επίσης ακίνητο παρατηρητή Α.



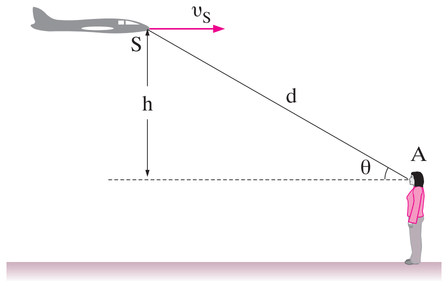
Κάποια στιγμή ($t = 0$) το αυτοκίνητο ξεκινάει να κινείται προς τον παρατηρητή Α με σταθερή επιτάχυνση $\alpha = 4\ \dfrac{m}{s^2}$, έχοντας το μεγάφωνο σε λειτουργία.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα f_{A_1} του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Α ύστερα από χρόνο $t_1 = 10$ s αφότου ξεκίνησε το αυτοκίνητο.

β. Να προσδιορίσετε τη σχέση που δίνει τη συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής σε συνάρτηση με τον χρόνο για όσο το αυτοκίνητο πλησιάζει προς τον παρατηρητή.

Στην περιοχή επικρατεί άπνοια και η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $\upsilon = 340\ \dfrac{m}{s}$.

8.56 Αεροπλάνο πετάει ευθύγραμμα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_S = 150\ \dfrac{m}{s}$ σε σταθερό ύψος $h = 400$ m πάνω από το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται τα αυτιά ενός ακίνητου παρατηρητή Α.



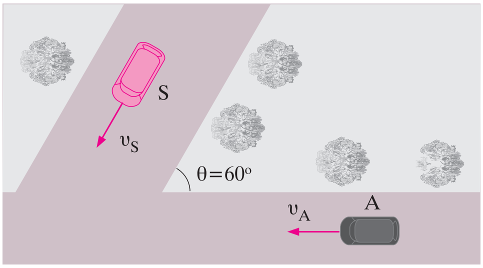
Ο κινητήρας του αεροπλάνου εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_S = 1.000$ Hz.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Α τη στιγμή ακριβώς που το αεροπλάνο βρίσκεται σε απόσταση $d = 500$ m από τα αυτιά του.

β. Ο παρατηρητής Α αντιλαμβάνεται ήχο σταθερής συχνότητας; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον ακίνητο αέρα (άπνοια) είναι $\upsilon = 340\ \dfrac{m}{s}$.

8.57 Το αυτοκίνητο S του σχήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_S = 40\ \frac{m}{s}$. Το αυτοκίνητο Α κινείται με σταθερή ταχύτητα $υ_A = 40\ \frac{m}{s}$ και αυτό.



Καθώς τα αυτοκίνητα πλησιάζουν στη διασταύρωση, ο οδηγός του αυτοκινήτου S πατάει προειδοποιητικά την κόρνα εκπέμποντας έναν ήχο συχνότητας $f_S = 1.200$ Hz. Η γωνία της διασταύρωσης είναι $θ = 60°$ και η ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα είναι $υ = 340\ \frac{m}{s}$.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα f_A με την οποία ο οδηγός του αυτοκινήτου Α ακούει τη συχνότητα της κόρνας πριν τα αυτοκίνητα διασταυρωθούν.

β. Αν η χρονική διάρκεια του κορναρίσματος είναι $t_S = 2$ s, επί πόσο χρόνο t_A ακούει την κόρνα ο οδηγός του αυτοκινήτου Α; (Θεωρήστε ότι όσο κρατάει το κορνάρισμα τα αυτοκίνητα δε διασταυρώνονται.)

«Πνεύμα» Πανελληνίων

1ο-2ο ΘΕΜΑ

8.58 Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της κάθε πρότασης και δίπλα τη λέξη που τη συμπληρώνει σωστά.

α. Στη σύνθεση δύο αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος και λίγο διαφορετικές συχνότητες, ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαφορετικές μεγιστοποιήσεις του πλάτους ονομάζεται .... του διακροτήματος.

β. Η ταυτόχρονη διάδοση δύο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή ενός ελαστικού μέσου ονομάζεται ....

γ. Όταν ένα σώμα μετακινείται στον χώρο και ταυτόχρονα αλλάζει ο προσανατολισμός του, λέμε ότι κάνει .... κίνηση.

δ. Ένας παρατηρητής ακούει ήχο με συχνότητα .... από τη συχνότητα μιας πηγής, όταν η μεταξύ τους απόσταση ελαττώνεται.

ε. Τα σημεία που πάλλονται με μέγιστο πλάτος ταλάντωσης σε ένα στάσιμο κύμα ονομάζονται . . . .

Εξετάσεις 2003 (Ημερήσιου Λυκείου)

8.59 Παρατηρητής πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα υ_A ακίνητη ηχητική πηγή και αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας f_A. Αν η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι υ, τότε η συχνότητα f_S του ήχου που εκπέμπει η πηγή είναι ίση με:

α. $\dfrac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_A} f_A$.

β. $\dfrac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_A} f_A$.

γ. $\dfrac{\upsilon + \upsilon_A}{\upsilon} f_A$.

δ. $\dfrac{\upsilon - \upsilon_A}{\upsilon} f_A$.

Εξετάσεις 2003 (Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

8.60 Να χαρακτηρίσετε αν το περιεχόμενο των ακολούθων προτάσεων είναι σωστό ή λάθος γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α. Το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης μπορεί να συμβεί όταν το φως μεταβαίνει από μέσο με μικρότερο δείκτη διάθλασης σε μέσο με μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης.

β. Η στροφορμή ενός στερεού σώματος παραμένει σταθερή, αν το αλγεβρικό άθροισμα ροπών των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό είναι διάφορο του μηδενός.

γ. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής, καθώς μια ηχητική πηγή πλησιάζει ισοταχώς προς αυτόν, είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή.

δ. Σε ιδανικό κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων LC η ολική ενέργεια παραμένει σταθερή.

ε. Κατά τη διάδοση ενός κύματος σ' ένα ελαστικό μέσο μεταφέρεται ενέργεια και ορμή.

Εξετάσεις 2003 (Αποδήμων)

8.61 Ένας παρατηρητής κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_A προς ακίνητη ηχητική πηγή. Οι συχνότητες που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής πριν και αφού διέλθει από την ηχητική πηγή διαφέρουν μεταξύ τους κατά $\dfrac{f_S}{10}$, όπου f_S η συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η ηχητική πηγή. Αν υ η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα, ο λόγος $\dfrac{\upsilon_A}{\upsilon}$ είναι ίσος με:

α. 10.

β. $\dfrac{1}{10}$.

γ. $\dfrac{1}{20}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2004 (Ημερήσιου Λυκείου)

8.62 Στην παρακάτω ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη Σωστό για τη σωστή πρόταση και τη λέξη Λάθος για τη λανθασμένη.

α. Η αύξηση της αντίστασης σε κύκλωμα με φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση συνεπάγεται και τη μείωση της περιόδου της.

β. Κατά την επιταχυνόμενη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων εκπέμπονται ηλεκτρομαγνητικά κύματα.

γ. Η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου που ορίζουν.

δ. Τα ραδιοκύματα εκπέμπονται από ραδιενεργούς πυρήνες.

ε. Το φαινόμενο Doppler ισχύει και στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Εξετάσεις 2004 (Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

8.63 Μια ηχητική πηγή κινείται με ταχύτητα υ_S ίση με το μισό της ταχύτητας του ήχου, πάνω σε μια ευθεία ε πλησιάζοντας ακίνητο παρατηρητή Π_1 ενώ απομακρύνεται από άλλο ακίνητο παρατηρητή Π_2. Οι παρατηρητές βρίσκονται στην ίδια ευθεία με την ηχητική πηγή. Ο λόγος της συχνότητας του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Π_1 προς την αντίστοιχη συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής Π_2 είναι:

α. 2.

β. 1.

γ. 3.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στο σωστό συμπλήρωμα.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Εξετάσεις 2005 (Αποδήμων)

8.64 Στην παρακάτω ερώτηση να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη Σωστό για τη σωστή πρόταση και τη λέξη Λάθος για τη λανθασμένη.

α. Το φαινόμενο Doppler χρησιμοποιείται από τους γιατρούς, για να παρακολουθήσουν τη ροή του αίματος.

β. Στις ανελαστικές κρούσεις δε διατηρείται η ορμή.

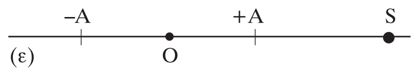
γ. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, η συνεισφορά κάθε κύματος στην απομάκρυνση κάποιου σημείου του μέσου εξαρτάται από την ύπαρξη του άλλου κύματος.

δ. Όταν μονοχρωματικό φως διέρχεται από ένα μέσο σε κάποιο άλλο με δείκτες διάθλασης $n_1 \neq n_2$, το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι το ίδιο στα δύο μέσα.

ε. Η σταθερά απόσβεσης b σε μια φθίνουσα ταλάντωση εξαρτάται και από τις ιδιότητες του μέσου.

Εξετάσεις 2006 (Ημερήσιου Λυκείου)

8.65 Σε σημείο ευθείας ε βρίσκεται ακίνητη ηχητική πηγή S που εκπέμπει ήχο σταθερής συχνότητας.



Πάνω στην ίδια ευθεία ε παρατηρητής κινείται εκτελώντας απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι μέγιστη, όταν αυτός βρίσκεται:

α. Στη θέση ισορροπίας Ο της ταλάντωσής του κινούμενος προς την πηγή.

β. Σε τυχαία θέση της ταλάντωσής του απομακρυνόμενος από την πηγή.

γ. Σε μία από τις ακραίες θέσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2006 (Ημερήσιου Λυκείου)

8.66 Ηχητική πηγή και παρατηρητής βρίσκονται σε σχετική κίνηση. Ο παρατηρητής ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας από αυτόν που παράγει η πηγή μόνο όταν:

α. Η πηγή είναι ακίνητη και ο παρατηρητής απομακρύνεται από αυτήν.

β. Ο παρατηρητής είναι ακίνητος και η πηγή απομακρύνεται από αυτόν.

γ. Ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται με ομόρροπες ταχύτητες, με τον παρατηρητή να προπορεύεται και να έχει κατά μέτρο μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτήν της πηγής.

δ. Ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται με ομόρροπες ταχύτητες, με την πηγή να προπορεύεται και να έχει κατά μέτρο ταχύτητα μικρότερη από αυτήν του παρατηρητή.

Εξετάσεις 2006
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

8.67 Να χαρακτηρίσετε αν το περιεχόμενο των ακόλουθων προτάσεων είναι σωστό ή λανθασμένο, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη (Σ) ή (Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.

α. Η περίοδος φθίνουσας ταλάντωσης, για ορισμένη τιμή της σταθεράς απόσβεσης, διατηρείται σταθερή.

β. Το φαινόμενο Doppler εμφανίζεται στα μηχανικά κύματα και όχι στα ηλεκτρομαγνητικά.

γ. Εάν η συνολική εξωτερική ροπή σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν, η ολική στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

δ. Η επιλογή ενός σταθμού στο ραδιόφωνο στηρίζεται στο φαινόμενο του συντονισμού.

ε. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια.

Εξετάσεις 2006 (Αποδήμων)

8.68 Μεταξύ δύο ακίνητων παρατηρητών Β και Α κινείται πηγή S με σταθερή ταχύτητα υ_S πλησιάζοντας προς τον Α. Οι παρατηρητές και η πηγή βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Η πηγή εκπέμπει ήχο μήκους κύματος λ, ενώ οι παρατηρητές Α και Β αντιλαμβάνονται μήκη κύματος λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Τότε για το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή θα ισχύει:

α. $\lambda = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$.

β. $\lambda = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$.

γ. $\lambda = \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2007 (Ημερήσιου Λυκείου)

8.69 Δεν έχουμε φαινόμενο Doppler όταν:

α. Ο παρατηρητής είναι ακίνητος και απομακρύνεται η πηγή.

β. Ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με την ίδια ταχύτητα.

γ. Ο παρατηρητής είναι ακίνητος και πλησιάζει η πηγή.

δ. Η πηγή είναι ακίνητη και πλησιάζει ο παρατηρητής.

Εξετάσεις 2007
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

8.70 Ένας παρατηρητής βρίσκεται ακίνητος στην αποβάθρα ενός σταθμού την ώρα που πλησιάζει ένα τρένο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η σειρήνα του τρένου εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι:

α. Ίση με τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός του τρένου.

β. Μεγαλύτερη από τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός του τρένου.

γ. Μικρότερη από τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός του τρένου.

δ. Ίση με τη συχνότητα που εκπέμπει η σειρήνα του τρένου.

Εξετάσεις 2007 (Αποδήμων)

8.71 Πηγή ηχητικών κυμάτων κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_S = \dfrac{\upsilon}{10}$, όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του ήχου στον αέρα. Ακίνητος παρατηρητής βρίσκεται στην ευθεία κίνησης της πηγής. Όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή, αυτός αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας f_1, και όταν η πηγή απομακρύνεται απ' αυτόν, ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας f_2. Ο λόγος $\dfrac{f_1}{f_2}$ ισούται με:

α. $\dfrac{9}{11}$.

β. $\dfrac{11}{10}$.

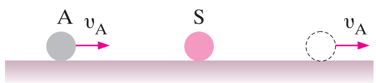
γ. $\dfrac{11}{9}$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Εξετάσεις 2008
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)

8.72 Παρατηρητής Α κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_A προς ακίνητη πηγή ήχου S, όπως φαίνεται στο σχήμα, αρχικά πλησιάζοντας και στη συνέχεια απομακρυνόμενος από αυτήν.



Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο με συχνότητα που είναι:

α. Συνεχώς μεγαλύτερη από τη συχνότητα της πηγής.

β. Συνεχώς μικρότερη από τη συχνότητα της πηγής.

γ. Αρχικά μεγαλύτερη και στη συνέχεια μικρότερη από τη συχνότητα της πηγής.

δ. Αρχικά μικρότερη και στη συνέχεια μεγαλύτερη από τη συχνότητα της πηγής.

Εξετάσεις 2008 (Αποδήμων)

3ο-4ο ΘΕΜΑ

8.73 Στην οροφή ερευνητικού εργαστηρίου είναι στερεωμένο ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 60\ \frac{N}{m}$, στο άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται σώμα Σ_1 με μάζα $m_1 = 17$ kg. Το σύστημα ισορροπεί. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ που ορίζει ο άξονας του ελατηρίου. Ο παρατηρητής εκτοξεύει κατακόρυφα προς τα πάνω σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3$ kg με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 12\ \frac{m}{s}$. Το σημείο εκτόξευσης απέχει απόσταση $h = 2{,}2$ m από το σώμα Σ_1. Το σώμα Σ_2 έχει ενσωματωμένη σειρήνα που εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_S = 700$ Hz.

α. Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής λίγο πριν από την κρούση του σώματος Σ_2 με το σώμα Σ_1.

β. Η κρούση που επακολουθεί είναι πλαστική και γίνεται με τρόπο ακαριαίο. Να βρεθεί η σχέση που περιγράφει την απομάκρυνση y της ταλάντωσης του συσσωματώματος από τη θέση ισορροπίας του συσσωματώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο. Για την περιγραφή αυτή θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου ($t = 0$) τη στιγμή της κρούσης και ως θετική φορά του άξονα των απομακρύνσεων τη φορά της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

γ. Η σειρήνα δεν καταστρέφεται κατά την κρούση. Να βρεθεί η σχέση που δίνει τη συχνότητα f_A, την οποία αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε συνάρτηση με τον χρόνο μετά την κρούση.

δ. Να βρεθεί ο λόγος της μέγιστης συχνότητας $f_{A,max}$ προς την ελάχιστη συχνότητα $f_{A,min}$ που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

Δίνονται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα $\upsilon_{\eta\chi} = 340\ \frac{m}{s}$ και $g = 10\ \frac{m}{s^2}$.

Εξετάσεις 2005
(Επαναληπτικές Ημερήσιου Λυκείου)
(4ο θέμα)